C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

GÉOMÉTRIE

Classe de Mathématiques



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

GÉOMÉTRIE

Classe de Mathématiques



**ÉDITIONS
JACQUES GABAY**

Extrait du catalogue

Emil ARTIN	*Algèbre géométrique*
Paul BARBARIN	*La géométrie non euclidienne*
Michel CHASLES	*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
Michel CHASLES	*La dualité et l'homographie*
H.S.M. COXETER et S.L. GREITZER	*Redécouvrons la géométrie*
Gaston DARBOUX	*Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* + *Sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes* + *Principes de géométrie analytique*
Robert DELTHEIL et Daniel CAIRE	*Géométrie et Compléments*
René DESCARTES	*La Géométrie*
Ernest DUPORCQ	*Premiers principes de géométrie moderne*
Federigo ENRIQUES	*Leçons de géométrie projective*
F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)	*Exercices de géométrie*
F. G.-M.	*Géométrie descriptive – Éléments et Exercices*
F. G.-M.	*Trigonométrie – Éléments, Compléments et Exercices*
D. GERLL et G. GIRARD	*Les Olympiades internationales de mathématiques*
Lucien GODEAUX	*Les Géométries*
F. GOMES TEIXEIRA	*Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*
Jacques HADAMARD	*Leçons de géométrie élémentaire*
David HILBERT	*Les fondements de la géométrie*
Félix KLEIN	*Le programme d'Erlangen*
Trajan LALESCO	*La géométrie du triangle.*
Henri LEBESGUE	*Leçons sur les constructions géométriques*
Henri LEBESGUE	*Les coniques*
Charles MICHEL	*Compléments de géométrie moderne* + *Exercices de géométrie moderne,* par Julien LEMAIRE + *Les correspondances algébriques,* par Gaston SINGIER
Gaspard MONGE	*Géométrie descriptive*
Georges PAPELIER	*Exercices de géométrie moderne*
Julius PETERSEN	*Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*
Henri POINCARÉ	*Œuvres, t. VI – Géométrie. Analysis situs (Topologie)*
Jean-Victor PONCELET	*Traité des propriétés projectives des figures*
E. ROUCHÉ et C. de COMBEROUSSE	*Traité de géométrie*
Joseph-Alfred SERRET	*Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*

Réimpression autorisée par les Éditions Nathan.

ISBN 2-87647-077-2

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

GÉOMÉTRIE

Classe de Mathématiques

PROGRAMMES DE 1945

FERNAND NATHAN, ÉDITEUR
18, Rue Monsieur-le-Prince, PARIS VI[e]
1961

NOTE DE L'ÉDITEUR

Ce cours de Géométrie de la Classe de Mathématiques Élémentaires est conçu dans le même esprit que les précédents. L'ouvrage est partagé en 24 leçons et respecte l'ordre du programme : géométrie orientée, transformations, coniques. L'étude de ces dernières est présentée, pour chacune d'elles, à partir de la définition classique. L'étude en est reprise ensuite à partir de la définition commune. Il semble que cette manière d'opérer soit de nouveau en faveur dans nos classes. Le plus grand soin a été apporté à la clarté des figures et au choix des exercices qui, dès les premières leçons, comportent des textes des problèmes proposés au Baccalauréat.

Quelques compléments, signalés dans le texte, ont été ajoutés à l'intention des candidats au Baccalauréat, section " Mathématiques et Technique ".

PROGRAMME DU 27 JUIN 1945

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Géométrie

Le programme de Géométrie de la classe de Mathématiques est un programme de complément, réduit à des lignes essentielles: l'enseignement comporte l'exposé de théories nouvelles et leurs principales applications; la révision et la mise au point des connaissances acquises dans les classes antérieures et des méthodes de raisonnement qui y ont fait leurs preuves, doivent être poursuivies par l'exécution d'exercices nombreux et gradués, où s'intégrera progressivement l'emploi des procédés nouveaux propres à la classe de Mathématiques. Cet enseignement fondamental est celui qui requiert le plus de soin et le plus de temps.

Toute liberté est laissée au professeur pour l'agencement de son cours.

I. — Vecteurs. — Equipollence. Rapport de deux vecteurs parallèles. Somme et différence vectorielles. Projections sur un plan et sur une droite. Projections sur un axe.

Systèmes d'axes de coordonnées. Projections d'un vecteur, coordonnées d'un point, dans le plan et dans l'espace. Transport des axes parallèlement à eux-mêmes.

Orientation de l'espace, orientation d'un plan. Mesures algébriques, dans un plan orienté, d'angles orientés de vecteurs ou de droites; lieu géométrique des points M d'un plan orienté tels que, A et B étant deux points fixes de ce plan, l'un des angles des vecteurs MA et MB ou des droites MA et MB ait une valeur algébrique données.

Trièdres. — Inégalités entre les faces. Trièdres supplémentaires ; inégalité entre les dièdres d'un trièdre. Trièdre orienté : sens d'un trièdre orienté.

II. — Figures égales dans l'espace; figures égales dans le plan.

Translation et rotation dans le plan et dans l'espace, définies comme transformations ponctuelles. Symétrie par rapport à une droite.

Deux figures données d'un même plan, directement égales, peuvent être déduites l'une de l'autre soit par une rotation, soit par une translation.

(L'étude du produit d'une translation et d'une rotation, ou de deux rotations, dans le plan et dans l'espace, n'est pas au programme.)

Symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan. Comparaison d'une figure symétrique d'une figure donnée F : 1° aux autres figures symétriques de F; 2° à la figure F elle-même; trièdres symétriques. Aires de deux polygones symétriques; volumes de deux polyèdres symétriques.

Homothétie, dans le plan et dans l'espace. Produit de deux homothéties.

Définition de deux figures semblables, dans le plan et dans l'espace. Rapport des aires de deux polygones semblables; rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

Similitude plane, définie comme transformation ponctuelle. Deux figures données d'un même plan directement semblables peuvent en général être déduites l'une de l'autre par une rotation et une homothétie de même centre.

III. — Division harmonique sur une droite. Faisceau harmonique de droites. Polaire d'un point par rapport à deux droites.

Puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère. Axe radical de deux cercles. Plan radical de deux sphères. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles ou à deux sphères.

Faisceaux de cercles : définition, différents genres de faisceaux. Condition d'orthogonalité de deux cercles; faisceaux orthogonaux. Condition d'orthogonalité de deux sphères.
Cercles passant par deux points et tangents à une droite donnée ou à un cercle donné.
Polaire d'un point par rapport à un cercle; pôle d'une droite. Plan polaire d'un point par rapport à une sphère; pôle d'un plan. (La transformation par polaires réciproques n'est pas au programme.)

Inversion (plan et espace). Projection stéréographique.

IV. — (Conformément à ce qui a été dit dans le préambule, toute liberté est laissée au professeur pour l'agencement de son cours sur les coniques. Pour l'étude de ces courbes et la résolution des problèmes classiques qui se posent à leur sujet, il partira chaque fois, de celle des propriétés caractéristiques qu'il jugera la plus commode.)

Définitions et propriétés caractéristiques de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole :
Lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux points donnés a une valeur donnée;
Lieu géométrique des centres des cercles passant par un point donné et tangents à un cercle donné ou à une droite donnée;
Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un point donné et à une droite donnée a une valeur donnée;

Etude des trois coniques :
Construction par points ; directions asymptotiques de la parabole et de l'hyperbole. Points intérieurs et points extérieurs.
Tangente en un point ; asymptotes de l'hyperbole. Enveloppe d'une droite qui varie de telle façon que la projection d'un point fixe sur cette droite décrive un cercle ou une droite. Problèmes sur les tangentes ; théorèmes de Poncelet.
Intersection avec une droite.

Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Equation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

Ellipse considérée comme projection orthogonale d'un cercle.

Sections planes d'un cylindre et d'un cône de révolution.

PREMIÈRE PARTIE

ÉLÉMENTS ORIENTÉS

PREMIÈRE LEÇON

VECTEURS

● **1. Eléments orientés.** — L'utilisation d'éléments orientés en Géométrie permet de donner à certains théorèmes une forme à la fois plus précise et plus générale.

Un axe est une droite orientée. — C'est une droite sur laquelle on a fixé un sens de parcours. Ce sens indiqué par une flèche (fig. 1) est appelé sens positif de l'axe. A toute droite $x'x$ correspondent deux axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{xx'}$ de sens opposés.

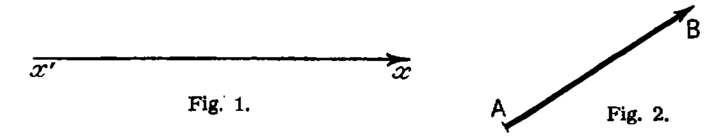


Fig. 1. Fig. 2.

Un vecteur est un segment de droite orienté. — Le symbole $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur d'origine A et d'extrémité B (fig. 2). La droite AB est le *support* du vecteur et la longueur AB est son *module*. Le sens de parcours de A vers B est le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Un segment AB définit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$. Un vecteur $\vec{V}$ est nul lorsque son module est nul. On écrit : $\vec{V} = 0$.

L'unité de longueur étant choisie on appelle *vecteur unitaire* tout vecteur de module 1. Tout vecteur unitaire $\vec{i}$ porté par un axe $x'x$ (fig. 3) et de même sens que lui est dit *vecteur unitaire de l'axe $x'x$*.

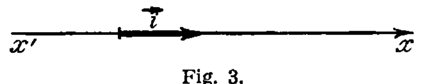


Fig. 3.

Deux vecteurs dont les supports sont parallèles (ou confondus) sont dits parallèles ou de même direction. Ces deux vecteurs peuvent être de même sens (fig. 6) ou de sens contraires (fig. 7).

Deux ou plusieurs vecteurs de même support sont dits *colinéaires*, tandis que des vecteurs situés dans un même plan sont dits *coplanaires*.

● **2. Vecteurs égaux (ou équipollents).** — ***Deux vecteurs égaux sont deux vecteurs de même direction, de même sens et de même module.***

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux (fig. 4 et 5) on écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

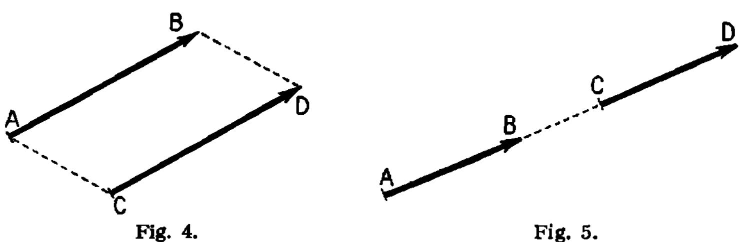


Fig. 4. Fig. 5.

Lorsque les deux vecteurs n'ont pas le même support le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, ce qui montre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et réciproquement. Si les deux vecteurs ont le même support il en est encore ainsi car la figure ABCD peut se retourner sur DCBA. Donc :

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est toujours équivalente à l'une des égalités $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ou $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$.

Autrement dit, dans l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on peut échanger les lettres moyennes ou les lettres extrêmes.

Notons que deux vecteurs égaux à un troisième sont égaux entre eux.

● **3. Rapport de deux vecteurs parallèles.** — ***Le rapport de deux vecteurs de même direction est le nombre algébrique qui a pour valeur absolue le rapport des modules des deux vecteurs et dont le signe est + ou — suivant que ces deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.***

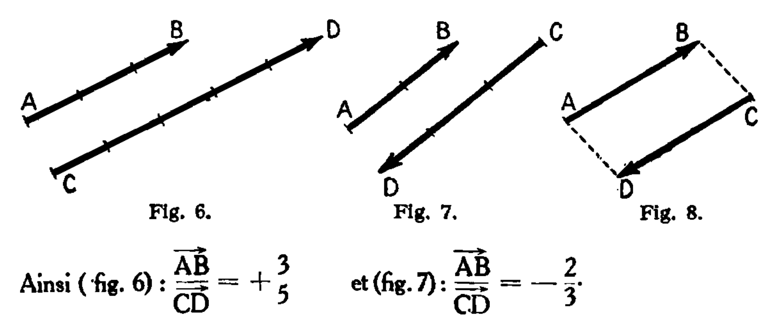


Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

Ainsi (fig. 6) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = +\dfrac{3}{5}$ et (fig. 7) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\dfrac{2}{3}$.

Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour rapport le nombre k le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est par définition le produit du vecteur $\overrightarrow{CD}$ par le nombre k.

L'égalité $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = k$ est donc équivalente à : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ et implique que les deux vecteurs ont même direction.

Si le rapport de deux vecteurs est égal à 1, les deux vecteurs sont *égaux*.

Deux vecteurs opposés sont deux vecteurs dont le rapport est — 1.

Ainsi (fig. 8) : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

Notons que : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

• **4. Mesure algébrique d'un vecteur.** — ***On appelle mesure algébrique d'un vecteur sur un axe parallèle (ou de même support) le rapport de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.***

La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'x$ (fig. 9) de vecteur unitaire $\vec{i}$

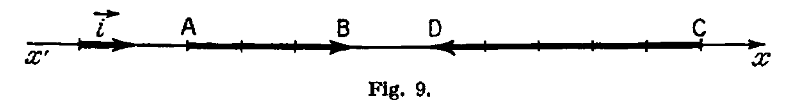


Fig. 9.

est représentée par la notation $\overline{AB}_{x'x}$, ou simplement par $\overline{AB}$. On a donc :

$$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}.$$

Il est clair que le nombre algébrique $\overline{AB}$ a pour valeur absolue la longueur AB et le signe + ou — suivant que $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que l'axe $x'x$ ou non.

• **5. Théorème.** — ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs mesures algébriques sur tout axe de même direction.***

En effet, les deux rapports $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ et $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ ont tous deux pour valeur absolue $\dfrac{AB}{CD}$.

Ils ont tous deux le signe + si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens, le signe — dans le cas contraire. Ces deux rapports sont donc égaux :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

La valeur du rapport $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ est donc indépendante du sens de l'axe $x'x$. C'est pourquoi il est souvent inutile de préciser ce sens. L'égalité $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ est donc équivalente à $\overline{AB} = k\,\overline{CD}$:

Si on multiplie un vecteur par un nombre sa mesure algébrique sur tout axe parallèle est multipliée par ce nombre.

En particulier $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ entraîne $\overline{AB} = \overline{CD}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ entraîne $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

• **6. Relation de Chasles.** — ***Lorsque trois points*** A, B, C ***appartiennent à un même axe, on a la relation :***

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0}$$

Supposons, par exemple (fig. 10), les trois points A, B, C disposés dans l'ordre B, A, C sur l'axe $x'x$. La relation évidente BC = BA + AC entraîne pour les mesures algébriques des vecteurs de même sens $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ la relation :

Fig. 10.

$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$$

équivalente à la relation proposée. Cette relation fondamentale est indépendante du sens de l'axe et de l'ordre des points A, B, C. Elle s'écrit aussi :

$$\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$$

et elle se généralise pour un nombre quelconque de points alignés. Ainsi :

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD}$$

donc $$\boxed{\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}$$

Remarque. — Si $\overline{AB} = \overline{CD}$ on a : $\overline{AC} = \overline{BD}$ et $\overline{DB} = \overline{CA}$.

Cette règle, conséquence de la règle analogue pour les vecteurs égaux (nº 2) se déduit de la relation de Chasles car $\overline{AB} = \overline{CD}$ entraîne par exemple :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CD} \quad \text{donc} \quad \overline{AC} = \overline{BD}.$$

• **7. Repérage d'un point sur un axe.** — Considérons sur l'axe $x'x$ le point fixe *origine* O et un point M quelconque (fig. 11) :

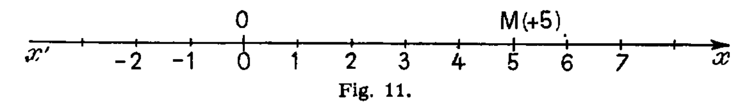


Fig. 11.

On appelle abscisse du point M ***sur l'axe*** $x'x$ ***le nombre algébrique*** $x = \overline{OM}$.

En désignant par $\vec{i}$ le vecteur unitaire de l'axe Ox on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overline{OM}\,\vec{i} = x\,\vec{i}$$

La position d'un point sur un axe est déterminée par son abscisse.

En effet, à tout nombre algébrique x on peut inversement associer un point M de l'axe Ox et un seul tel que $\overline{OM} = x$. Ce *point représentatif ou image* du nombre algébrique x est représenté par la notation M (x).

● **8. Théorèmes.** — 1° ***La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine.***

Soient (fig. 12) les points A(a) et B(b) de l'axe Ox. La relation de Chasles, $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ s'écrit : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ Soit :

$$\boxed{\overline{AB} = b - a}$$

0 A(a) I B(b)

Fig. 12.

2° ***L'abscisse du milieu d'un segment porté par un axe est égale à la demi-somme des abscisses de ses extrémités.***

Soit I(x) le milieu de AB. L'égalité $\overline{AI} = \overline{IB}$ donne :

$$x - a = b - x \quad \text{d'où} \quad 2x = a + b \quad \text{et}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}(a + b)}$$

SOMMES VECTORIELLES

● **9. Somme de deux vecteurs.** — Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ (fig. 13). A partir d'un point O donné, construisons $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$ puis $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$. Par définition :

Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est la somme géométrique des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

On écrit : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

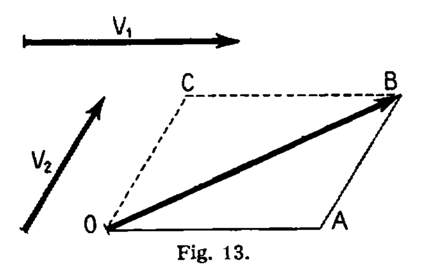


Fig. 13.

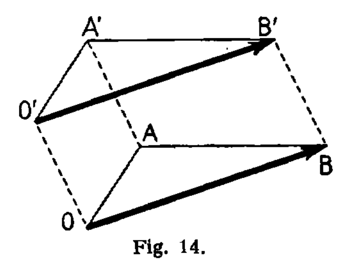


Fig. 14.

Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ *est indépendant du point* O. En prenant une autre origine O'

(fig. 14) on est amené à construire $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA}$ puis $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ ce qui entraîne (n° 2) $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$ donc : $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OB}$.

La somme de deux vecteurs est indépendante de leur ordre. En effet (fig. 13) construisons $\overrightarrow{OC} = \vec{V}_2$; on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ donc (n° 2) : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$

d'où : $$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

En particulier la somme $\overrightarrow{OM}$ de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ s'obtient en achevant le parallélogramme AOBM (fig. 18).

● **10. Différence de deux vecteurs.** — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qu'il faut ajouter au vecteur $\overrightarrow{OA}$ pour obtenir OB est par définition la différence des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$. Autrement dit :

L'égalité $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ équivaut à $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$.

Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc la différence des vecteurs obtenus en joignant successivement un point donné O à son extrémité puis à son origine.

Pour construire la différence $\overrightarrow{AB}$ de deux vecteurs donnés $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1$ on peut donc construire $\overrightarrow{OB} = \vec{V}_2$ puis $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$. Mais l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ montre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$. D'où la règle :

Pour retrancher un vecteur il suffit d'ajouter le vecteur opposé.

● **11. Somme de plusieurs vecteurs.** — La somme de plusieurs vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2 \ldots \vec{V}_n$ rangés dans cet ordre est, par définition, le vecteur $\vec{W}$ que l'on obtient en faisant la somme $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ des deux premiers, puis en ajoutant $\vec{V}_3$ au vecteur obtenu et ainsi de suite jusqu'à épuisement des vecteurs.

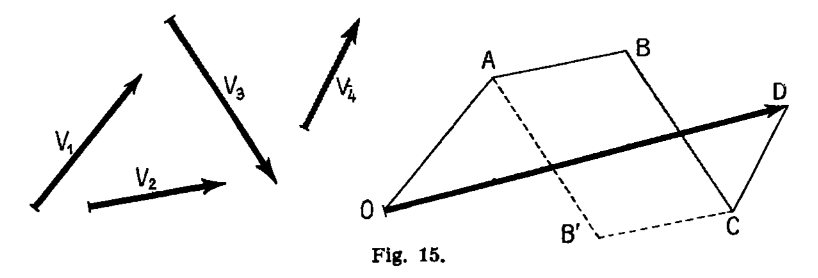


Fig. 15.

La somme de deux vecteurs étant indépendante de l'origine utilisée il en sera de même du vecteur final obtenu.

Ainsi (fig. 15) en construisant $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$, $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$, $\overrightarrow{BC} = \vec{V}_3$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{V}_4$ on obtient :

$$\overrightarrow{OB} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2, \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

et $$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \vec{V}_4 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = \vec{W}.$$

Il n'est pas nécessaire de tracer OB et OC et on a toujours quelle que soit la disposition des points O, A, B, C et D :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

• 12. Propriétés des sommes de vecteurs.

1° ***La somme de plusieurs vecteurs est indépendante de leur ordre.*** — Construisons $\overrightarrow{AB'} = \vec{V}_3$ (fig. 15). L'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB'}$ entraîne $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$ et l'égalité $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CD}$ montre que $\overrightarrow{OD} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_2 + \vec{V}_4$.

On peut donc, dans une somme de plusieurs vecteurs, échanger deux vecteurs consécutifs. En répétant cette opération il est possible de ranger les vecteurs dans un ordre donné quelconque. L'addition des vecteurs est une opération *commutative*.

$$\boxed{\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = \vec{V}_3 + \vec{V}_2 + \vec{V}_4 + \vec{V}_1}$$

En particulier la somme $\overrightarrow{OM}$ de trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ s'obtient en achevant le parallélépipède de diagonale OM construit sur OA, OB, OC, comme arêtes. En effet (fig. 19) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2° ***On peut dans une somme de plusieurs vecteurs remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par leur somme.***

La propriété est évidente pour des vecteurs consécutifs. Ainsi (fig. 15) :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) + \vec{V}_4$$

ou :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4).$$

Elle est également vraie pour tout groupe de vecteurs car d'après la propriété de commutativité, on a par exemple :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_5 + \vec{V}_4$$
$$= \vec{V}_2 + (\vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_5) + \vec{V}_4.$$

L'addition des vecteurs est une opération *associative*.

3° ***Lorsqu'on multiplie plusieurs vecteurs par un même nombre algébrique k leur somme est multipliée par ce nombre.***

Soit $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ une somme de vecteurs (fig. 16). A partir d'un point donné O, construisons : $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = k\,\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD'} = k\,\overrightarrow{OD}$.

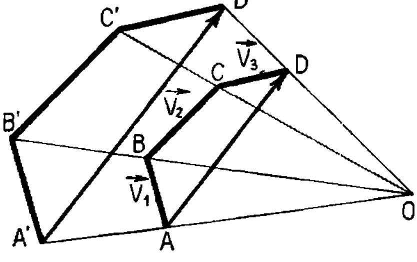


Fig. 16

D'après la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle OAB, la droite A'B' est parallèle à AB et la similitude des triangles OA'B' et OAB montre que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = |k|$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens si k est positif, de sens contraires si k est négatif. Donc $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB} = k\,\vec{V}_1$.

De même $\overrightarrow{B'C'} = k\,\vec{V}_2$, $\overrightarrow{C'D'} = k\vec{V}_3$ et $\overrightarrow{A'D'} = k\overrightarrow{AD} = k(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3)$.

L'égalité $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'D'}$ donne donc :

$$\boxed{k\vec{V}_1 + k\vec{V}_2 + k\vec{V}_3 = k(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3)}$$

4° ***Pour multiplier un vecteur par une somme algébrique on peut multiplier ce vecteur par chacun des termes de la somme et additionner les vecteurs obtenus.***

Soit v la mesure algébrique d'un vecteur $\vec{V}$ sur l'axe $x'x$ (fig. 17). Construisons sur cet axe les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \alpha\,\vec{V}$, $\overrightarrow{AB} = \beta\,\vec{V}$ et $\overrightarrow{BC} = \gamma\,\vec{V}$. On obtient (1) :

$\overrightarrow{OC} = \alpha\,\vec{V} + \beta\vec{V} + \gamma\vec{V}$.

Or d'après le n° 5 on a :

$\overline{OA} = \alpha v$, $\overline{AB} = \beta v$ et $\overline{BC} = \gamma\,v$ donc :

Fig. 17.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \alpha v + \beta v + \gamma v = (\alpha + \beta + \gamma)\,v.$$

Cette égalité montre que $\overrightarrow{OC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{V}$, soit d'après (1) :

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{V} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V} + \gamma\vec{V}}$$

• **13. Décomposition d'un vecteur.** — 1° Soit dans un plan un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et deux directions distinctes Ox et Oy (fig. 18). Les parallèles menées par M à Oy et Ox coupent Ox en A et Oy en B et on a (n° 9) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

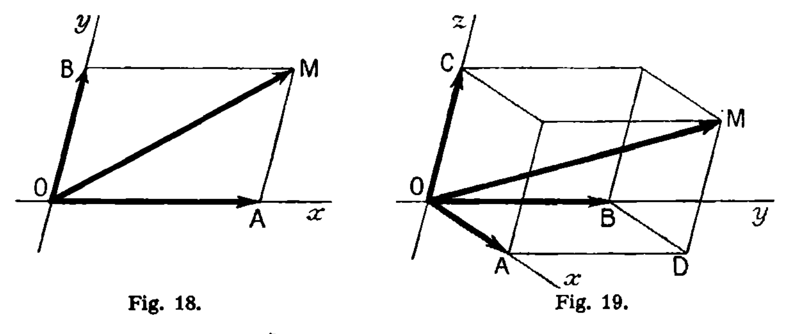


Fig. 18. Fig. 19.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est décomposé suivant les deux directions Ox et Oy.

2° Soit de même dans l'espace un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et trois directions non coplanaires Ox, Oy et Oz (fig. 19). En menant par M les plans parallèles aux trois plans yOz, zOx et xOy, on forme un parallélépipède d'arêtes OA, OB, OC, et de diagonale OM. Donc (n° 12) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

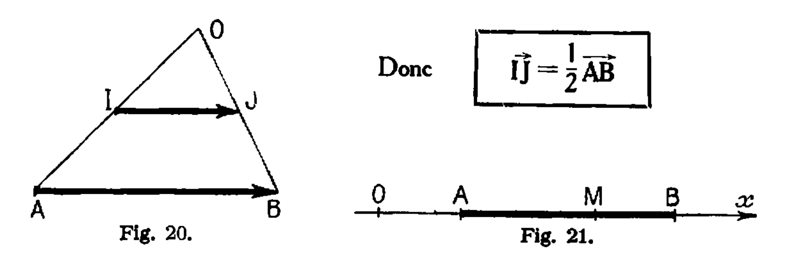
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est décomposé suivant les trois directions Ox, Oy et Oz. La décomposition ainsi obtenue est unique. *Les trois vecteurs* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ *sont les composantes vectorielles du vecteur* $\overrightarrow{OM}$, *suivant les trois directions* Ox, Oy et Oz.

APPLICATIONS

• **14 Théorème. — *Lorsque deux vecteurs ont même origine, le vecteur qui joint leurs milieux est égal à la moitié du vecteur qui joint leurs extrémités.***

Soient I et J les milieux respectifs de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (fig. 20). On peut écrire

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$



Donc $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

Fig. 20. Fig. 21.

On retrouve ainsi le théorème : *le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié.*

• **15. *Division d'un vecteur dans un rapport donné.*** — Rappelons qu'un point M d'une droite divise un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par cette droite dans le rapport algébrique k si :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}.$$

***Il existe un point unique* M *divisant un vecteur* $\overrightarrow{AB}$, *dans un rapport algébrique donné* k *différent de* $+1$.**

Prenons sur la droite AB une origine O (fig. 21). La relation $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ou $\overline{MA} = k\overline{MB}$ s'écrit :

$$\overline{OA} - \overline{OM} = k\,(\overline{OB} - \overline{OM}).$$

Soit : $$(k - 1)\,\overline{OM} = k\,\overline{OB} - \overline{OA}. \qquad (1)$$

Si $k \neq 1$, on obtient : $$\overline{OM} = \frac{k\,\overline{OB} - \overline{OA}}{k - 1}$$

relation qui détermine l'abscisse d'un point unique M.

Si $k = 1$, la relation (1) s'écrit : $0 = \overline{OB} - \overline{OA}$. Elle est donc impossible car A et B sont distincts. Il en résulte que :

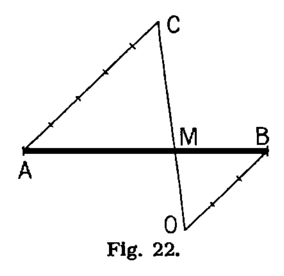


Fig. 22.

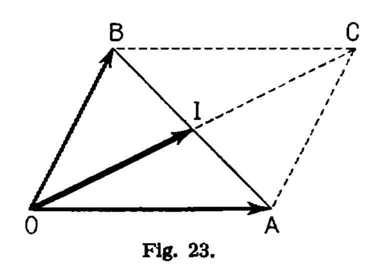


Fig. 23.

1° ***La valeur du rapport*** $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$ ***détermine la position d'un point*** M ***sur la droite*** AB ***aussi bien que l'abscisse de ce point.***

2° ***Lorsque deux points*** M ***et*** M' ***divisent un même vecteur dans le même rapport algébrique, ces points sont confondus.***

● **16. Remarques.** — 1° En prenant l'origine O en dehors de la droite AB on obtient de même : $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$,

soit $$\overrightarrow{OM} = \frac{k\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{k - 1} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{BO}}{1 - k}.$$

En construisant le vecteur $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{BO}$, on obtient le point M à l'intersection de OC et de AB (fig. 22).

2° Si $k = -1$, le point M est en I milieu de AB (fig. 23) et on a, quel que

soit O, la relation : $$\boxed{\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}\cdot$$

En terminant le parallélogramme AOBC on voit d'ailleurs directement que :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\cdot$$

3° Lorsque le rapport k est seulement donné en valeur arithmétique, il existe, si $k \neq 1$ deux points M et M' divisant le vecteur AB dans le rapport k.

● **17. Notion de barycentre.** — Considérons un groupe de points A, B, C, D (pas obligatoirement tous distincts) affectés respectivement des coefficients algébriques ou

masses $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (fig. 24). Proposons-nous de déterminer un point G, s'il existe, tel que

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = 0} \qquad (1)$$

En prenant une origine O, cette relation s'écrit :

$$\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) + \delta(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}) = 0$$

soit (2) :

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{OG}$$

1° Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$: on obtient (3):

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

Cette relation vectorielle permet de construire le vecteur $\overrightarrow{OG}$ et par suite le point G d'une façon unique.

Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ ***il existe un point unique*** G ***vérifiant la relation*** (1) ***appelé barycentre du système de points*** A(α), B(β), C(γ), D(δ).

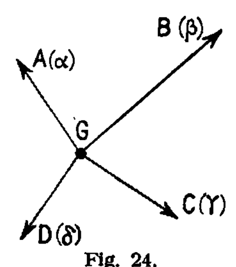


Fig. 24.

Par analogie avec la relation (2) on peut alors écrire, pour tout point M de l'espace :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG}.} \qquad (4)$$

2° Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ la relation (2) devient : $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD} = 0$.

Si cette condition indépendante de G, est réalisée, la relation (1) a lieu pour tout point G de l'espace. Sinon la relation (1) est impossible et il n'y a pas de barycentre.

● **18. Barycentre des points** A(α) **et** B(β). — C'est par définition le point G tel que

A (3) G B(2)

Fig. 25.

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

C'est donc le point qui divise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport $-\frac{\beta}{\alpha}$ (fig. 25). En particulier le barycentre de A (1) et B(1) est le milieu de AB.

● **19. Construction du barycentre.** — ***On peut dans la recherche d'un barycentre remplacer deux ou plusieurs points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.***

Soit G le barycentre du système A(α), B(β), C(γ), D(δ) et I le barycentre du système A(α), B(β), C(γ). La relation (4) du n° 17 donne pour le point G :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GI}$$

et la relation : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = 0$ qui définit G, s'écrit alors :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GI} + \delta\overrightarrow{GD} = 0.$$

Ce qui montre que G est le barycentre de I ($\alpha + \beta + \gamma$) et D(δ).

En remplaçant deux points du système donné par leur barycentre, on obtient un système avec un point de moins. En répétant cette opération on se ramène au cas de deux points.

● **20. Exemples.** — 1° **Centre de gravité d'un triangle.** — Soit à déterminer le barycentre G du système A(1), B(1), C(1) (fig. 26). Désignons par D, E et F les milieux respec-

tifs de BC, CA et AB. En remplaçant B(1) et C(1) par D(2) on voit que G est le barycentre de A(1), D(2). Le point G est situé sur AD et par analogie sur BE et CF. C'est donc le point de concours des médianes du triangle ABC.

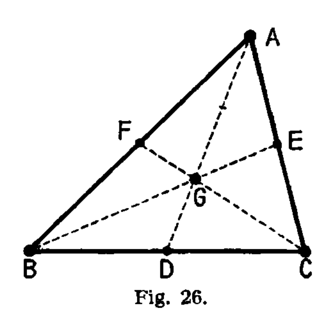


Fig. 26.

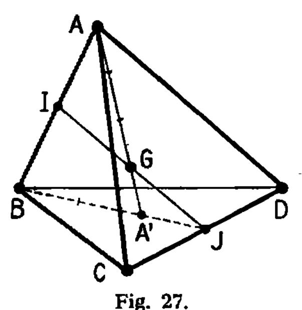


Fig. 27.

La relation $\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GD} = 0$ ou : $\overrightarrow{DA} = 3\,\overrightarrow{DG}$ montre que G est situé au tiers de DA à partir de D et la relation (4) du n° 17 donne pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}.$$

2° **Centre de gravité du tétraèdre** ABCD. — Soient I et J les milieux des arêtes AB et CD du tétraèdre ABCD (fig. 27) et A' le centre de gravité de la face BCD. Le barycentre G du système A(1), B(1), C(1), D(1) est le barycentre du système I(2) et J(2) ainsi que du système A(1) et A'(3) et on a :

$$2\,\overrightarrow{GI} + 2\,\overrightarrow{GJ} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GA'} = 0.$$

Le point G est donc situé au milieu de chacun des segments tels que IJ joignant les milieux de deux arêtes opposées et, sur les segments tels que AA' joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée, au quart à partir de cette face.

PROJECTIONS D'UN VECTEUR

• **21. Projection sur un plan.** — Considérons un plan fixe P, appelé **plan de projection** et une droite fixe Δ qui coupe le plan P (fig. 28). La parallèle à Δ menée par un point donné A de l'espace coupe le plan P en un point unique A'. Par définition :

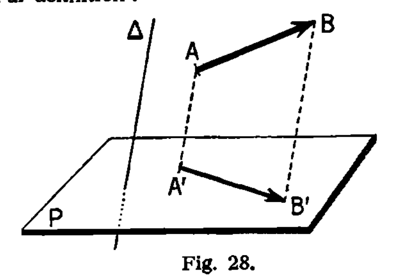


Fig. 28.

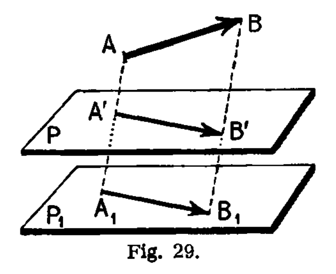


Fig. 29.

***Le point* A' *est la projection, effectuée parallèlement à* Δ*, du point* A *sur le plan* P.**

La droite AA′ est la projetante du point A. Si la direction Δ est perpendiculaire au plan P la projection est dite orthogonale au plan P, sinon elle est dite oblique. Il est clair que tout point du plan P est confondu avec sa projection sur ce plan.

Lorsqu'un point décrit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sa projection décrit le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ défini par les projections de A et de B. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est la projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le plan ABB′A′ est le plan projetant du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Notons que :

Les projections d'un vecteur, effectuées parallèlement à une même direction, sur deux plans parallèles, sont des vecteurs égaux.

En effet (fig. 29) si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se projette en $\overrightarrow{A'B'}$ sur le plan P et en $\overrightarrow{A_1B_1}$ sur le plan parallèle P_1 le quadrilatère $A'B'B_1A_1$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

• 22. Théorème. — ***Les projections, sur un même plan, de deux vecteurs égaux, sont deux vecteurs égaux.***

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs égaux non parallèles à Δ (fig. 30). Les droites AB et CD étant parallèles ainsi que les projetantes AA′ et CC′, il en est de même des plans projetants ABB′A′ et CDD′C′ et par suite de A′B′ et C′D′. Et puisque

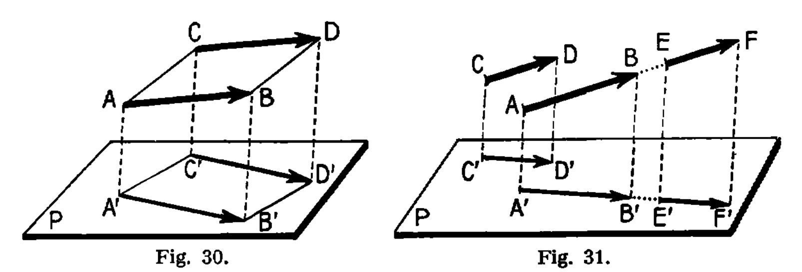


Fig. 30. Fig. 31.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ on voit de même que A′C′ et B′D′ sont parallèles. Il en résulte que la projection du parallélogramme ABDC est en général un parallélogramme A′B′D′C′. Donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Si les plans projetants ABB′A′ et CDD′C′ sont confondus, il suffit de projeter un vecteur auxiliaire $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Les égalités $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{E'F'}$ et $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{E'F'}$ entraînent $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

• 23. Corollaire. — ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs projections sur un même plan.***

Soient $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ les projections des vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 31). Construisons sur la droite AB un vecteur $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{CD}$. On a $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{C'D'}$ et d'après le théorème de Thalès dans le plan AA′F′F on a :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{E'F'}} \quad \text{soit} \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}.$$

● **24. Projection sur une droite.** — Considérons une droite fixe $x'x$ et un plan fixe sécant P (fig. 32). Le plan parallèle à P mené par un point quelconque A de l'espace coupe $x'x$ en A' :

***Le point* A' *est la projection, effectuée parallèlement au plan* P, *du point* A *sur la droite* $x'x$.**

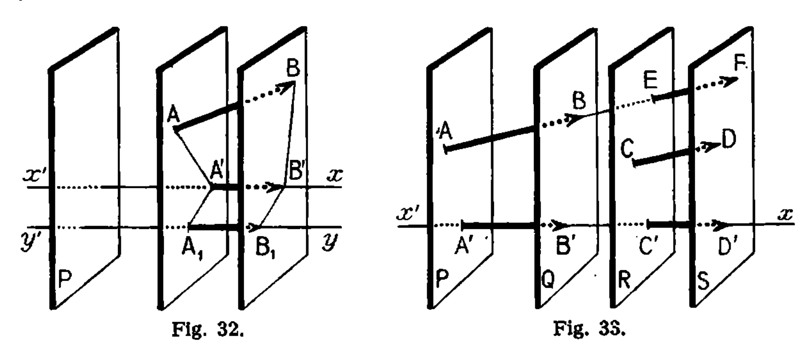


Fig. 32. Fig. 33.

La projection d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite $x'x$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ défini par les projections A' et B' de A et B. Si le plan P est perpendiculaire à $x'x$ la projection est dite orthogonale à la droite $x'x$. Sinon elle est dite oblique.

Les projections d'un vecteur sur deux droites parallèles sont deux vecteurs égaux.

Les projections $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A_1B_1}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ effectuées parallèlement au même plan P sur deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ sont égales comme portions de parallèles comprises entre deux plans parallèles.

● **25. Théorème.** — ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs projections sur une même droite.***

Soient deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et leurs projections $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sur la droite $x'x$ (fig. 33). Désignons par P, Q, R et S les plans projetants de A, B, C et D. Les plans R et S découpent sur la droite AB un vecteur $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{CD}$. Le théorème de Thalès dans l'espace donne sur les droites AB et $x'x$:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}.$$

● **26. Corollaire.** — ***Les projections sur une même droite de deux vecteurs égaux sont deux vecteurs égaux.***

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ la relation précédente donne : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

● **27. Remarque.** — En géométrie plane la projection d'un point ou d'un vecteur sur une droite $x'x$ du plan s'effectue parallèlement à une droite fixe Δ qui coupe $x'x$. On peut considérer cette projection comme la projection dans l'espace effectuée parallèlement à un plan quelconque issu de Δ. Les théorèmes précédents sont donc applicables.

• **28. Projection d'une somme vectorielle.** — ***La projection sur un même plan ou sur une même droite de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme des projections de chacun de ces vecteurs.***

Considérons les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ ainsi que leurs projections sur un plan P (ou sur une droite $x'x$) : $\vec{V}'_1$, $\vec{V}'_2$ et $\vec{V}'_3$ (fig. 34). Construisons $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_1$, $\overrightarrow{BC} = \vec{V}_2$, $\overrightarrow{CD} = \vec{V}_3$ et leurs projections $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$. On a (n° 22 ou 26) : $\overrightarrow{A'B'} = \vec{V}'_1$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{V}'_2$ et $\overrightarrow{C'D'} = \vec{V}'_3$. Or :

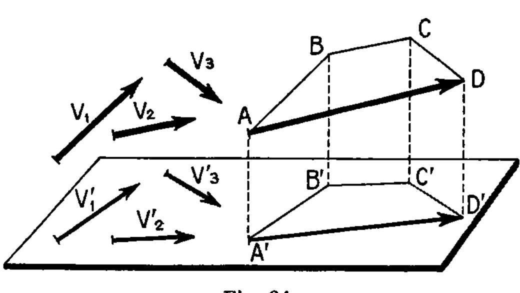


Fig. 34.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

et
$$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} = \vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 + \vec{V}'_3.$$

Donc la projection $\overrightarrow{A'D'}$ de la somme $\overrightarrow{AD}$ des vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est égale à la somme des projections $\vec{V}'_1$, $\vec{V}'_2$ et $\vec{V}'_3$ de ces vecteurs.

• **29. Projection sur un axe.** — Si la droite $x'x$ sur laquelle on effectue les projections des vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est orientée on a (n° 5) :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}. \quad \text{Donc si} \quad \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \quad \text{on a} \quad \overline{A'B'} = k\,\overline{C'D'}.$$

Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport des mesures algébriques de leurs projections sur un même axe.

De même dans la projection d'une somme vectorielle, l'égalité :

$$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} \quad \text{entraîne :} \quad \overline{A'D'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}.$$

La mesure algébrique de la projection sur un axe de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme des mesures algébriques des projections sur cet axe de chacun de ces vecteurs.

Il en résulte que toute relation linéaire entre plusieurs vecteurs telle que

$$\overrightarrow{AB} = m\,\overrightarrow{CD} + n\,\overrightarrow{EF} + p\,\overrightarrow{GH}$$

entraîne la relation analogue : $\overline{A'B'} = m\overline{C'D'} + n\overline{E'F'} + p\,\overline{G'H'}$ entre les mesures algébriques des projections de ces vecteurs sur un même axe.

COORDONNÉES

• **30. Repérage des points d'un plan.** — Considérons dans le plan deux axes concourants $x'x$ et $y'y$ de même origine O (fig. 35). Tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose suivant Ox et Oy d'une façon unique en deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.

On appelle coordonnées du point* M *les mesures algébriques $x = \overline{OP}$ ***et*** $y = \overline{OQ}$. Le nombre x est l'*abscisse* du point M et y son *ordonnée*.

En désignant par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \qquad \text{soit :} \quad \boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}.$$

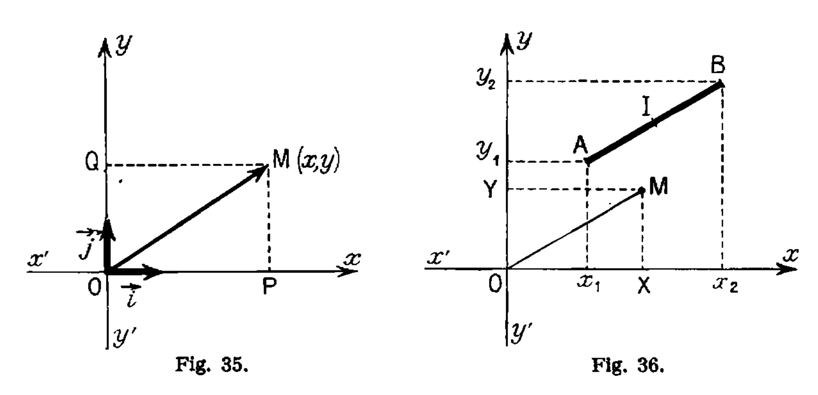


Fig. 35. Fig. 36.

La position d'un point du plan est déterminée par l'ensemble de ses deux coordonnées.

En effet, à tout couple de nombres algébriques (x, y) donné correspond un point M unique, désigné par M (x, y) et déterminé par l'égalité vectorielle précédente.

Sauf indication contraire, nous n'utiliserons que des coordonnées rectangulaires rapportées à deux axes perpendiculaires Ox et Oy. Dans ce cas les points P et Q (fig. 35) sont les projections orthogonales du point M sur les axes et l'égalité : $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$ donne alors :

$$\boxed{\overline{OM}^2 = x^2 + y^2}$$

• **31. Composantes scalaires d'un vecteur.** — Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur d'origine A (x_1, y_1) et d'extrémité B (x_2, y_2) (fig. 36). Construisons le point M (X, Y) tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

Les nombres X et Y sont les mesures algébriques des projections du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur les axes Ox et Oy. Ces deux nombres appelés *composantes scalaires du*

vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisent tout vecteur égal à $\overrightarrow{OM}$, donc égal à $\overrightarrow{AB}$. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ donne, en projection sur les axes :

$X = x_2 - x_1$	$Y = y_2 - y_1$

La longueur AB est égale à OM et par suite $\overline{AB}^2 = X^2 + Y^2$, soit :

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

On obtient les coordonnées x et y du milieu I de AB en projetant sur les axes l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

• **32. Équation d'une courbe.** — Toute condition imposée à un point M (x, y) du plan se traduit, en général, par une relation caractéristique équivalente $F(x, y) = 0$ entre ses coordonnées. *Cette relation est appelée l'équation de la courbe* (C), *lieu géométrique du point* M (x, y).

Ainsi l'équation du cercle de centre O et de rayon R s'obtient en écrivant que $\overline{OM}^2 = R^2$. Soit : $x^2 + y^2 = R^2$.

L'équation du cercle de centre ω (α, β) et de rayon R s'écrit de même :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

• **33. Translation des axes de coordonnées.** — Soit $\omega(x_o, y_o)$ un point donné du plan, $X'\omega X$ et $Y'\omega Y$ deux axes respectivement parallèles à $x'x$ et $y'y$ et de même sens (fig. 37). Désignons par X et Y les coordonnées du point M (x, y) par rapport aux nouveaux axes X'X et Y'Y. L'égalité vectorielle

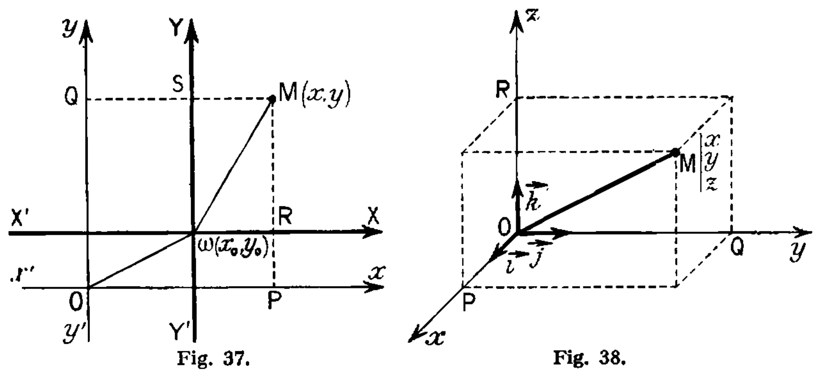


Fig. 37.

Fig. 38.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega M}$ donne en projection sur les axes Ox et Oy (n° 29) :

$x = x_0 + X$	$y = y_o + Y$

L'ancienne abscisse x *est égale à l'abscisse* x_o *de la nouvelle origine augmentée de la nouvelle abscisse* X.

On a la règle analogue pour la nouvelle ordonnée.

• **34. Repérage des points de l'espace.** — Dans l'espace on considère de même trois axes non coplanaires $x'x$, $y'y$ et $z'z$ de même origine O (fig. 38). Tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose d'une façon unique, suivant ces axes, en trois vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.

On appelle coordonnées du point M ***les mesures algébriques*** $x = \overline{OP}$, $y = \overline{OQ}$ ***et*** $z = \overline{OR}$. Les nombres x, y, z sont appelés respectivement *abscisse*, *ordonnée* et *cote* du point M.

En désignant par $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Cette égalité montre que, réciproquement, tout point M de l'espace est déterminé par l'ensemble de ses trois coordonnées x, y et z. Ce point M est désigné par la notation M (x, y, z).

Nous supposerons, en général, que les coordonnées sont rectangulaires c'est-à-dire que les axes sont deux à deux perpendiculaires. Dans ce cas on a :

$$\overline{OM}^2 = OP^2 + OQ^2 + \overline{OR}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

De même que dans le plan, tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par A (x_1, y_1, z_1) et par B (x_2, y_2, z_2) est tel que :

$$\overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

où X, Y et Z sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Les nombres algébriques X, Y, Z, sont les *composantes scalaires du vecteur* $\overrightarrow{AB}$. Elles sont égales aux mesures algébriques des projections de ce vecteur sur les axes. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ donne alors en projection sur les axes :

$$X = x_2 - x_1 \quad ; \quad Y = y_2 - y_1 \quad \text{et} \quad Z = z_2 - z_1.$$

D'autre part : $\overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

Soit : $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

Si on prend pour nouveaux axes, les axes ωX, ωY et ωZ issus du point ω (x_0, y_0, z_0) et respectivement parallèles à Ox, Oy et Oz et de même sens, l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega M}$ conduit à :

$$x = x_0 + X; \quad y = y_0 + Y \quad \text{et} \quad z = z_0 + Z.$$

D'où la règle analogue à celle du n° 33.

SUJET D'EXAMEN

Transport des axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes.
(*Besançon*, ME.)

EXERCICES

● 1. On désigne par M, N, P, Q les milieux des segments AC, BD, AD et BC. Démontrer que, quels que soient A, B, C et D, on a :

1° $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{MN}$; 2° $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{PQ}$

● 2. Soient trois points A, B, C d'un axe $x'x$. Démontrer, en prenant pour origine O la projection sur $x'x$ d'un point M quelconque que l'on a :

1° $\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0$;

2° $\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$.

● 3. 1° Étant donnés trois points A, B, C d'un axe $x'x$, montrer qu'il existe sur cet axe un point unique I tel que : $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{IC}^3 - 3\,\overline{IA}.\overline{IB}.\overline{IC} = 0$.

2° Démontrer que pour tout point M de l'axe on a alors :

a) $\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{MC}^3 - 3\,\overline{MA}.\overline{MB}.\overline{MC} = \frac{3}{2}\,\overline{MI}.[\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2]$;

b) $\overline{MA}^3.\overline{BC} + \overline{MB}^3.\overline{CA} + \overline{MC}^3.\overline{AB} + 3\,\overline{MI}.\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$.

● 4. Étant donné trois longueurs a, b, c, le point O et la direction OA, construire trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ tels que la somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ soit nulle et que $\frac{OA}{a} = \frac{OB}{b} = \frac{OC}{c}$.

● 5. Décomposer dans un plan un vecteur donné $\overrightarrow{OM}$ en deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de modules respectifs a et b, portés par les droites Ox et Oy quand on donne :

1° Ox et b; 3° $\widehat{xOy} = \alpha$ et a; 5° $\widehat{xOy} = \alpha$ et $\frac{a}{b}$

2° a et b; 4° $\widehat{xOy} = \frac{\pi}{2}$ et $a + b$; 6° $\widehat{xOy} = \frac{\pi}{4}$ et $a^2 + b^2$.

● 6. Décomposer dans l'espace un vecteur donné $\overrightarrow{OM}$ en trois vecteurs non coplanaires, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ de modules respectifs a, b, c portés par les droites Ox, Oy, Oz quand on donne :

1° $\overrightarrow{OC}$, Ox et $\widehat{xOy} = \alpha$; 3° Ox, Oy, $\frac{a}{b}$ et c;

2° $\overrightarrow{OC}$, Ox et b; 4° Ox, Oy, $a + b$ et c.

● 7. La diagonale AG du parallélépipède ABCDEFGH coupe en K et L les plans BDE et CFH.

1° Montrer que K et L sont les centres de gravité des triangles BDE et CFH;

2° Démontrer que $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = 0$ et en déduire que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AG}$.

● 8. Soient G et G′ les centres de gravité respectifs des triangles ABC et A′B′C′ :

1° Démontrer que $3\,\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$;

2° En déduire une condition pour que les deux triangles ABC et A′B′C′ aient même centre de gravité et montrer qu'il existe alors un point D tel que BA′CD et B′AC′D soient deux parallélogrammes,

● 9. Soient deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ tels que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$. Les droites AC et BD se coupent en I :

1° Démontrer que $\overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{ID}$;

2° Évaluer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de k, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

● **10.** On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC, par A' le milieu de BC et par M un point quelconque de l'espace :

1° Démontrer que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

2° En déduire la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

● **11.** Soit un polygone régulier de n côtés ABC... L et de centre O.

1° Montrer que la somme $\overrightarrow{OS}$ des n vecteurs tels que $\overrightarrow{OA}$ est nulle (on pourra démontrer que la projection de $\overrightarrow{OS}$ sur les perpendiculaires à $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$... est nulle).

2° Si M est un point quelconque de l'espace, la somme des n vecteurs tels que $\overrightarrow{MA}$ est égale à $n\,\overrightarrow{MO}$. Cas où M est en A?

● **12.** Dans un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O, on désigne par G le centre de gravité, par H l'orthocentre, par M le milieu de BC et par D le point diamétralement opposé à A sur le cercle ABC :

1° Nature du quadrilatère BHCD? Comparer les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{MO}$;

2° Démontrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\,\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;

3° De la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$ et préciser la position de G par rapport à O et H.

● **13.** Soient A', B', C' les pieds des médianes du triangle ABC et G le centre de gravité. A partir d'un point quelconque M on construit le vecteur

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} :$$

1° Démontrer que $\overrightarrow{AP} = 2\,\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MP} = 3\,\overrightarrow{MG}$. En déduire diverses constructions géométriques de l'un des points M ou P connaissant l'autre;

2° Montrer que si M est au centre O du cercle ABC, le point P est en H orthocentre du triangle ABC. Établir les relations :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'} \text{ et } \overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$

3° En prenant P en O montrer que le point ω tel que $\overrightarrow{\omega O} = \overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega B} + \overrightarrow{\omega C}$ est le milieu de OH et que $\overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega B} + \overrightarrow{\omega C} + \overrightarrow{\omega H} = 0$.

● **14.** 1° Démontrer que lorsque le point M est le barycentre du système A (α), B (β), C (γ) les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB sont proportionnelles à α, β, γ. (L'aire MBC par exemple sera affectée du signe + ou du signe — suivant que A et M sont ou non, d'un même côté de la droite BC).

2° En déduire qu'à tout point M du plan ABC on peut inversement affecter trois nombres (α, β, γ), définis à un facteur près, tels que le point M soit le barycentre du système A (α), B (β), C (γ) : point M (α, β, γ).

3° Démontrer que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est le point I (a, b, c), l'orthocentre le point H (tg A, tg B, tg C) et le centre du cercle ABC le point O (sin 2 A, sin 2 B, sin 2 C).

● **15.** Soient I et J les milieux des segments AB et CD. On construit les points M et N tels que : $\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MC} = 0$ et $\overrightarrow{NB} + k\,\overrightarrow{ND} = 0$:

1° Soit O le milieu de MN. Démontrer que $\overrightarrow{OI} + k\,\overrightarrow{OJ} = 0$. Lieu géométrique du point O lorsque k varie?

2° Démontrer que le point O est aussi le milieu du segment joignant les points P et Q tels que : $\overrightarrow{PA} + k\,\overrightarrow{PD} = 0$ et $\overrightarrow{QB} + k\,\overrightarrow{QC} = 0$.

● **16.** On construit le point I barycentre de A (α_1), B (β_1) et C (γ_1), le point J barycentre de A (α_2), B (β_2) et C (γ_2) et enfin le point M barycentre de A ($\alpha_1 + k\,\alpha_2$), B ($\beta_1 + k\,\beta_2$) et C ($\gamma_1 + k\,\gamma_2$).

1° Démontrer que $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\,\overrightarrow{MI} + k\,(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)\,\overrightarrow{MJ} = 0$;

2° Lieu du point M lorsque k varie, les autres coefficients restant fixes?

● **17.** On considère le système A (α), B (β), C (γ) tel que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et on construit les points A_1, B_1, C_1 définis par les relations :

$$\beta\,\overrightarrow{A_1B} + \gamma\,\overrightarrow{A_1C} = 0, \quad \gamma\,\overrightarrow{B_1C} + \alpha\,\overrightarrow{B_1A} = 0, \quad \alpha\,\overrightarrow{C_1A} + \beta\,\overrightarrow{C_1B} = 0.$$

1° Démontrer que pour tout point de l'espace la somme $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}$ est un vecteur $\overrightarrow{U}$, indépendant de M, égal à $\alpha\,\overrightarrow{A_1A}$.

2° En déduire que les trois vecteurs $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, et, $\overrightarrow{CC_1}$ sont parallèles et inversement proportionnels à α, β et γ.

● **18.** Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy on considère les points A $(a, 0)$ et B $(-a, 0)$ où a désigne une longueur donnée :

1° Trouver l'équation du lieu des points M (x, y) tels que $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$. Montrer que ce lieu est un cercle de centre O dont on calculera le rayon;

2° Montrer que le lieu des points M tels que $3\,\overline{MA}^2 - 2\,\overline{MB}^2 = k^2$ est également un cercle de centre ω. Calculer les coordonnées de ω et le rayon de ce cercle.

● **19.** Soit ABC un triangle quelconque, M un point quelconque de son plan, A', B', C' les symétriques du point M par rapport aux milieux respectifs des côtés BC, CA et AB :

1° Démontrer que les segments de droite AA', BB', CC' se coupent en leur milieu M';

2° Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe quand M se déplace d'une façon quelconque. *(Guyane.)*

● **20.** Dans un triangle ABC on désigne par O, H, G, ω le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle passant par les milieux des côtés du triangle :

1° On considère le vecteur $\overrightarrow{OS}$ somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et on projette cette somme sur le côté BC. Où se projette S? En déduire que S est confondu avec H;

2° Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est triple du vecteur $\overrightarrow{OG}$. En déduire la position relative des points O, G, H;

3° Préciser la position des points ω, O, G à l'aide de considérations analogues aux précédentes. *(Amérique du Sud.)*

DEUXIÈME LEÇON

ANGLES ORIENTÉS DANS LE PLAN

• **35. Plan orienté.** — Une demi-droite Oz du plan peut tourner autour de son origine O dans deux sens différents :

On appelle sens direct ou sens positif de rotation dans le plan le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le sens opposé est le sens rétrograde ou négatif.

Le plan est dit orienté (fig. 39). Au sens direct dans le plan correspond un sens direct de parcours sur toute ligne fermée non croisée du plan (fig. 40) et en particulier sur tout polygone convexe ou tout cercle du plan.

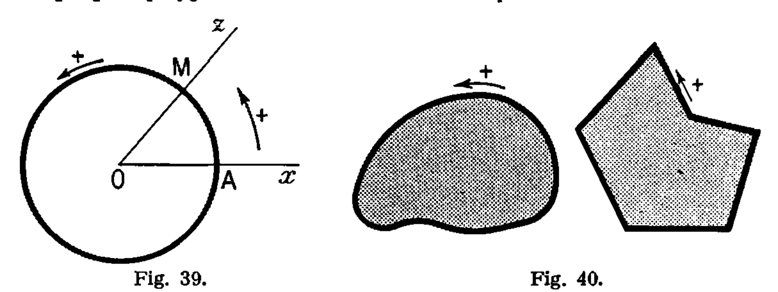


Fig. 39. Fig. 40.

ANGLE DE DEUX DIRECTIONS ORIENTÉES

• **36. Angle de deux demi-droites de même origine.** — ***On appelle angle orienté des demi-droites*** OA ***et*** OB ***prises dans cet ordre, l'un quelconque des angles dont il faut faire tourner dans un sens donné, une demi-droite mobile*** Oz ***pour l'amener du côté origine*** OA ***sur le côté extrémité*** OB.

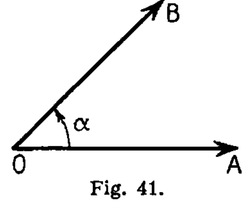


Fig. 41.

On écrit (fig. 41) : *angle* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ou simplement $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

En affectant la mesure arithmétique de l'angle balayé par Oz du signe + ou du signe — suivant que Oz a tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif, on obtient une mesure algébrique (ou détermination) de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

• **37. Théorème.** — ***Les différentes mesures algébriques en radians de l'angle*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ***sont données par la formule :***

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi.$$

où α *désigne une quelconque de ces mesures et* k *un entier algébrique arbitraire.*

Soit θ la mesure en radians du plus petit angle dont il faut faire tourner une demi-droite Oz, dans le sens positif, pour l'amener de OA sur OB. Chaque tour supplémentaire, dans le sens positif ramène Oz sur OB. On obtient ainsi les mesures algébriques :

$$\theta; \quad \theta + 2\pi; \quad \theta + 4\pi; \quad \theta + 6\pi, \text{ etc...}$$

Lorsque Oz tourne dans le sens négatif, les diverses mesures obtenues sont :

$$\theta - 2\pi; \; \theta - 4\pi; \quad \theta - 6\pi; \quad \theta - 8\pi, \text{ etc...}$$

On voit donc que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta + 2\,m\pi$. Si $\alpha = \theta + 2\,n\pi$ est l'une de ces mesures, on obtient, en éliminant θ, la formule, équivalente à la formule annoncée :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2\,(m - n)\,\pi.$$

La détermination principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ***est la mesure algébrique*** φ ***de cet angle comprise entre*** $-\pi$ ***et*** π.

Cette mesure φ est la mesure de l'angle saillant orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, dont le sens, parfaitement déterminé, correspond au signe de φ.

• **38. Corollaires.** — 1° ***On a l'égalité*** $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2\,k\pi$.

En effet si φ est la détermination principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, celle de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est $-\varphi$, ce qui entraîne, à $2k\pi$ près : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

2° ***Deux angles*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ***et*** $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ ***dont les côtés sont respectivement parallèles et de même sens ont mêmes mesures algébriques.***

On sait, en effet, que les angles saillants orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{O'B'})$ ont même valeur absolue et même sens. Les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ ont donc même détermination principale et par suite mêmes mesures.

• **39. Angle de deux vecteurs ou de deux axes.** — ***L'angle orienté*** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ ***des deux vecteurs*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{CD}$ ***est, par définition, l'un quelconque des angles*** $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ***obtenus en menant par un point arbitraire*** O ***les demi-droites*** $\overrightarrow{Ox}$ ***et*** $\overrightarrow{Oy}$ ***de même direction et de même sens que les vecteurs*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{CD}$ (fig. 42).

Comme l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ est indépendant du point O (n° 38), il en est de même de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

On définit de la même façon l'angle $(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2})$ de deux axes $\overrightarrow{\Delta_1}$ et $\overrightarrow{\Delta_2}$ ou bien l'angle $(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{AB})$ de l'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Chacun de ces angles constitue *un angle orienté de deux directions orientées.*

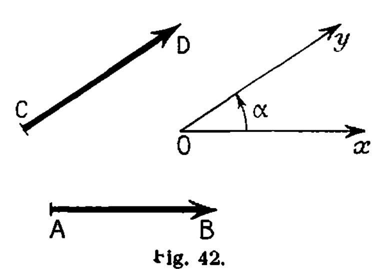


Fig. 42.

La mesure algébrique est celle de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ correspondant. Elle est donc définie à $2k\pi$ près.

• **40. Relation de Chasles.** — ***Quelle que soit la disposition des trois directions orientées*** $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ***et*** $\overrightarrow{OC}$, ***on a la relation :***

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi.} \qquad (1)$$

On peut toujours (fig. 43), en faisant tourner Oz *dans le sens positif*, l'amener successivement de OA sur OB puis sur OC. Si α et β sont les mesures obtenues pour $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ il est clair que la mesure obtenue pour $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est égale à $\alpha + \beta$, ce qui permet d'écrire (n° 37) :

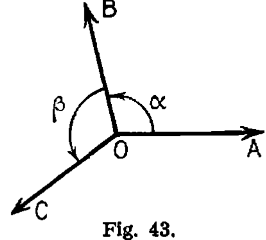


Fig. 43.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2l\pi, \qquad (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \beta + 2m\pi$$

et $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha + \beta + 2h\pi.$$

Éliminons α et β entre ces trois relations, nous obtenons :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2(h - l - m)\pi.$$

relation équivalente à la relation (1).

Cette relation s'écrit d'ailleurs aussi (n° 38, 1°) :

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = 2k\pi.} \qquad (2)$$

et se généralise pour un nombre quelconque de directions. Ainsi :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) =$$
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + [(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})] + 2k\pi$$

soit $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) + 2k\pi. \qquad (3)$$

Il en résulte, pour des angles de vecteurs ou d'axes :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) + 2k\pi.$$
$$(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_4) = (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2) + (\vec{\Delta}_2, \vec{\Delta}_3) + (\vec{\Delta}_3, \vec{\Delta}_4) + 2k\pi.$$

• **41. Angle polaire d'un vecteur ou d'un axe.** — Soit un axe fixe $\overrightarrow{x'x}$ appelé *axe polaire* ou *axe origine*. La direction $\vec{\Delta}$ est déterminée par l'angle $(\overrightarrow{x'x}, \vec{\Delta})$ appelé *angle polaire* de $\vec{\Delta}$ (fig. 44). De même l'angle $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB})$ est l'angle polaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

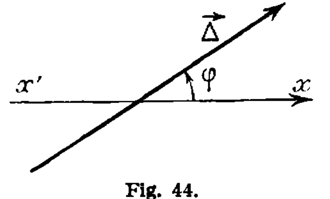


Fig. 44.

La mesure algébrique de l'angle de deux directions orientées est égale à l'angle polaire de la direction extrémité diminué de l'angle polaire de la direction origine.

L'égalité : $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CD}) + 2k\pi$ montre que :

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi}$$

• **42. Applications.** — 1° ***Si on change le sens de l'un des côtés d'un angle de vecteurs, la mesure algébrique de cet angle est modifiée de*** π.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + \pi \quad \text{à } 2k\pi \text{ près.}$$

Par suite : $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}) + 2k\pi.$$

2° ***Dans une égalité ou une différence entre deux angles de vecteurs, on peut échanger les côtés moyens ou les côtés extrêmes.***

Si par hypothèse : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) + \varphi + 2k\pi$
on peut écrire :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) + \varphi + 2k\pi$$

soit $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) + \varphi + 2k\pi$$

ce qui montre que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) - (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) = \varphi + 2k\pi.$$

• **43. Arcs orientés.** — Considérons sur un cercle orienté de centre O deux points fixes A et B (fig. 45). Lorsqu'un point mobile M, parcourant le cercle dans un sens donné, va de A en B, il décrit un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ d'origine A et d'extrémité B. Dans cette opération la demi-droite OM engendre un angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ dont la mesure algébrique en radians est égale à celle de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par le point M :

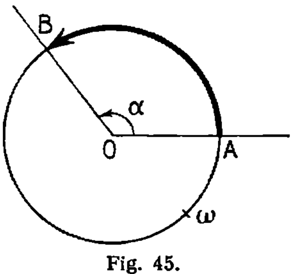


Fig. 45.

Les différentes mesures d'un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ ***sont données en radians par la formule :***

$$\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2k\pi$$

où α ***désigne une des mesures de l'arc*** $\overset{\frown}{AB}$ ***ou de l'angle*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Toutes les propriétés des angles au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ s'étendent aux arcs $\overset{\frown}{AB}$ interceptés. Ainsi la relation de Chasles devient :

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + 2k\pi.$$

En désignant par ω une origine des abscisses curvilignes sur le cercle on a :

$$\overset{\frown}{\overrightarrow{AB}} = \overset{\frown}{\overrightarrow{\omega B}} - \overset{\frown}{\overrightarrow{\omega A}} + 2k\pi.$$

La mesure algébrique d'un arc est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine.

ANGLE DE DEUX DROITES DANS LE PLAN

• **44. Définition.** — ***On appelle angle orienté de deux droites*** D ***et*** D', ***l'angle orienté de l'un quelconque des axes portés par*** D ***avec l'un quelconque des axes portés par*** D'.

Cet angle est représenté par le symbole (D, D') (fig. 46). L'angle des deux droites AB et CD (fig. 47) s'écrit de même (AB, CD) ou (AB, DC).

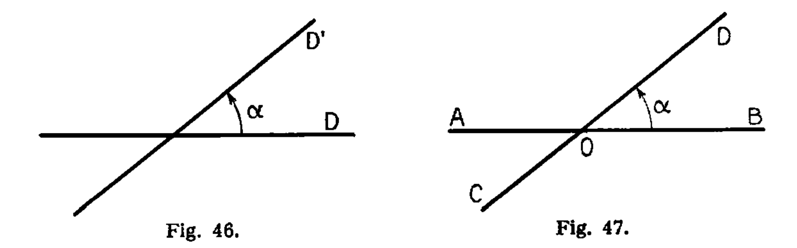


Fig. 46. Fig. 47.

• **45. Théorème.** — ***La mesure algébrique d'un angle de droites est définie à $k\pi$ près.***

Soit α l'une des mesures algébriques de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. On a (n° 42) :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}) = \alpha + 2m\pi$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = \alpha + \pi + 2n\pi$.
Donc :

$$(AB, CD) = \alpha + k\pi.$$

Dans cette formule α désigne l'une quelconque des déterminations de l'angle (AB, CD) et k un entier algébrique arbitraire. Notons que :

Toute mesure algébrique d'un angle d'axes ou de vecteurs est une mesure de l'angle de droites de leurs supports non orientés.

• **46. Corollaires.** — Il résulte de ce qui précède et des théorèmes (n° 38) :

1° *La position de la droite* OB *est déterminée par la donnée de la droite* OA *et de l'angle* (OA, OB) $= \alpha + k\pi$;

2° *Deux angles de droites à côtés respectivement parallèles sont égaux.*

3° *Si* D *et* D' *sont parallèles on a :* (D, D') $= k\pi$;

4° *Si* (D, D') $= \alpha + k\pi$, *on a :* (D', D) $= -\alpha + l\pi$.

• **47. Relation de Chasles.** — ***Quelles que soient les trois droites*** D_1, D_2, D_3 ***on a :***

$$\boxed{(D_1, D_3) = (D_1, D_2) + (D_2, D_3) + k\pi.} \qquad (1)$$

Menons par un point O les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ respectivement parallèles à D_1, D_2 et D_3 (fig. 48). Des relations :

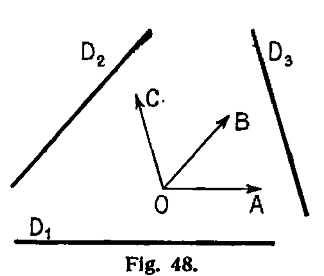


Fig. 48.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi$$

et

$$(D_1, D_2) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + l\pi;$$
$$(D_2, D_3) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + m\pi;$$
$$(D_1, D_3) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + n\pi$$

on déduit la relation équivalente à la relation (1) :

$$(D_1, D_3) = (D_1, D_2) + (D_2, D_3) + (2k - l - m + n)\pi$$

De même : $(D_1, D_2) + (D_2, D_3) + (D_3, D_1) = k\pi.$

et $(D_1, D_4) = (D_1, D_2) + (D_2, D_3) + (D_3, D_4) + k\pi.$

• **48. Corollaires.** — 1° ***Dans une égalité ou une différence entre deux angles de droites on peut échanger les côtés moyens ou les côtés extrêmes.***

Si on a l'égalité : $(D_1, D_2) = (D_3, D_4) + \varphi + k\pi$, on peut écrire :

$$(D_1, D_2) + (D_2, D_3) = (D_2, D_3) + (D_3, D_4) + \varphi + k\pi$$

soit $(D_1, D_3) = (D_2, D_4) + \varphi + k\pi$

ce qui montre que :

$$(D_1, D_2) - (D_3, D_4) = (D_1, D_3) - (D_2, D_4).$$

2° ***Deux angles de droites à côtés respectivement perpendiculaires sont égaux.***

Si D et D′ sont respectivement perpendiculaires à Δ et Δ′, on a, à $k\pi$ près :

$$(D, \Delta) = (D', \Delta') = \frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{(D, D') = (\Delta, \Delta') + k\pi.}$$

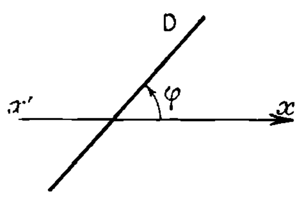


Fig. 49.

3° Si l'axe $\overrightarrow{x'x}$ est l'axe polaire (fig. 49) l'angle $(x'x, D)$ est l'angle polaire de la droite D. La relation : $(x'x, D) + (D, D') = (x'x, D') + k\pi$ ou $(D, D') = (x'x, D') - (x'x, D) + k\pi$ montre que :

***La mesure algébrique d'un angle de droites* (D,D') *est égal à l'angle polaire de la droite* D', *diminué de l'angle polaire de la droite* D.**

● **49. Bissectrice d'un angle d'axes ou de vecteurs.** — Étant donnés deux axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ (fig. 50) soit à déterminer un axe $\overrightarrow{Ou}$ tel que :

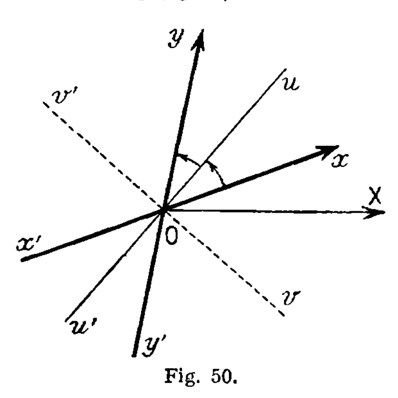


Fig. 50.

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou}) = (\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi. \quad (1)$$

En désignant par α, β et θ les angles polaires des axes Ox, Oy et Ou rapportés à un axe polaire OX donné, il faut et il suffit que (n° 41) :

$$(\theta - \alpha) = (\beta - \theta) + 2k\pi$$

soit

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2} + k\pi.$$

Pour $k = 2m$ on obtient un axe $\overrightarrow{Ou}$ d'angle polaire $\frac{\alpha + \beta}{2} + 2m\pi$ et pour $k = 2m + 1$, on obtient l'axe opposé $\overrightarrow{Ou'}$ d'angle polaire $\frac{\alpha + \beta}{2} + (2m + 1)\pi$.

La droite** $u'u$ **est par définition la bissectrice, ou l'axe de symétrie, des deux axes** $\overrightarrow{Ox}$ **et** $\overrightarrow{Oy}$. **Son angle polaire est à** $k\pi$ **près, la demi-somme des angles polaires de ces deux axes.

En prenant Ox comme axe polaire, on est conduit à la relation nécessaire et suffisante :

$$\boxed{(Ox, Ou) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + k\pi.}$$

La droite $v'v$ perpendiculaire en O à $u'u$ est la bissectrice des axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{yy'}$ (ou $\overrightarrow{xx'}$ et $\overrightarrow{y'y}$). Nous la désignerons sous le nom de *bissectrice extérieure de l'angle* $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

● **50. Théorème.** — ***Lorsque deux angles de vecteurs ont un côté commun, l'angle de droites de leurs bissectrices est égal à la moitié de l'angle de leurs côtés non communs.***

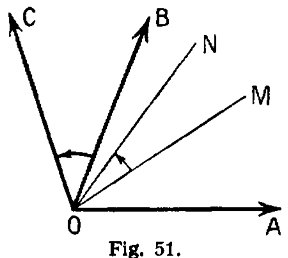


Fig. 51.

Soient (fig. 51) OM et ON les bissectrices des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

On a à $k\pi$ près :

$$(OM, ON) = (OA, ON) - (OA, OM) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

Donc :

$$\boxed{(OM, ON) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + k\pi.}$$

• **51. Bissectrices d'un angle de droites.** — On appelle *bissectrice de l'angle* (D, D′) toute droite Δ issue du point O commun à D et D′ telle que :

$$(D, \Delta) = (\Delta, D') + k\pi \qquad (1)$$

En désignant par α, β et φ les angles polaires de D, D′ et Δ on obtient :

$$\varphi - \alpha = \beta - \varphi + k\pi \qquad \text{d'où : } \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

Pour k pair on obtient une droite Δ et pour k impair une seconde droite Δ′ perpendiculaire à Δ.

Un angle de droites admet deux bissectrices rectangulaires.

Ce sont les deux droites formées par les bissectrices des quatre angles saillants déterminés par ces deux droites.

• **52. Angle de deux cercles.** — L'angle de deux courbes C et C′ se coupant en A (fig. 52) est, par définition, l'angle de droites (AT, AT′) de leurs tangentes en A. Les courbes sont tangentes en A si cet angle est nul, orthogonales en A si cet angle est égal à $\pm \frac{\pi}{2}$. Si les deux courbes C et C′ sont orientées, leur angle est l'angle $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'})$, chaque tangente étant orientée dans le sens de la courbe correspondante.

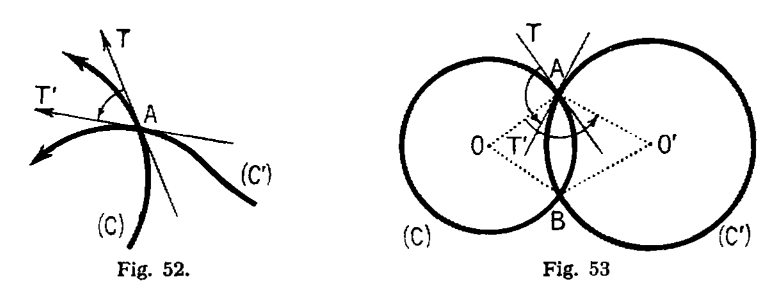


Fig. 52.   Fig. 53

Lorsque deux cercles (C) et (C′) de centres O et O′ se coupent en A et B, leur angle (AT, AT′) en A est égal à (AO, AO′), tandis que leur angle en B est égal à l'angle opposé (BO, BO′). En désignant par V la mesure arithmétique des angles saillants OAO′ et OBO′, on a par exemple (fig. 53) :

$$(AT, AT') = V + k\pi.$$

Les deux cercles (C) et (C′) sont tangents intérieurement si $V = 0$, tangents extérieurement si $V = \pi$, orthogonaux si $V = \frac{\pi}{2}$.

En orientant les deux cercles (C) et (C′) dans le même sens on aurait $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V + 2k\pi$, tandis qu'en les orientant en sens contraire, on aurait $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = V + \pi + 2k\pi$.

ANGLES INSCRITS

• **53. Théorème fondamental.** — ***Lorsque trois points*** A, B, M ***appartiennent à un cercle de centre*** O, ***on a :***

$$\boxed{(MA, MB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + k\pi.} \qquad (1)$$

Les droites MA et MB (fig. 54) sont respectivement perpendiculaires aux droites Ou et Ov, bissectrices des angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$. D'après les théorèmes nos 48 et 50 on peut donc écrire :

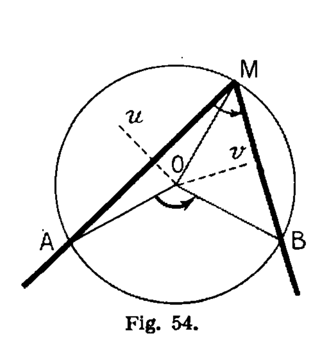


Fig. 54.

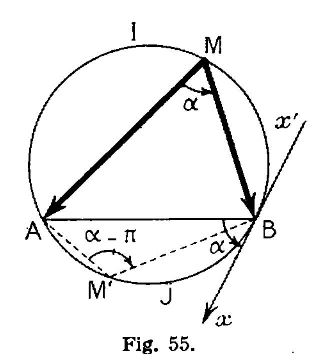


Fig. 55.

$$(MA, MB) = (Ou, Ov) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + k\pi.$$

Autrement dit :

Un angle de droites inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre de vecteurs correspondant.

• **54. Corollaire I.** — La relation (1) est valable quel que soit M. Lorsque le point M parcourant le cercle O, vient en B (fig. 55), la droite MA vient se confondre avec BA et la droite MB avec la tangente $x'x$ en B. Il en résulte que :

$$\boxed{(MA, MB) = (BA, Bx) + k\pi.} \qquad (2)$$

• **55. Corollaire II.** — Précisons cette deuxième formule. Soient AIB et AJB (fig. 55) les arcs géométriques situés respectivement à l'intérieur des angles saillants ABx' et ABx, et désignons par α l'une des déterminations de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Bx})$. Lorsque M décrit l'arc AIB, l'angle géométrique AMB et l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ restent constants et lorsque M vient en B, les axes $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ viennent se confondre avec $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{Bx}$.

Pour tout point M de l'arc AIB on a donc :

$$\boxed{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Bx}) = \alpha + 2k\pi.} \tag{3}$$

Pour tout point M' de l'arc AJB, on a par suite (n° 42) :

$$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Bx'}) = \alpha - \pi + 2k\pi. \tag{4}$$

• **56. Théorème.** — ***Étant donnés deux points fixes* A *et* B *et un angle orienté* α, *le lieu géométrique des points* M *tels que* (MA, MB) = $\alpha + k\pi$ *est un cercle passant par* A *et* B.**

(*Cercle capable de l'angle de droites* α *relatif à* A *et* B).

Soit M un point du lieu (fig. 56). Menons la tangente Bx au cercle ABM. La relation (MA, MB) = (BA, Bx) = $\alpha + k\pi$ montre que la droite Bx est indépendante de M. Il en est donc de même du cercle ABM dont le centre O est l'intersection de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire en B à Bx. Tout point M du lieu appartient donc à ce cercle et la relation (M'A, M'B) = (BA, Bx) = $\alpha + k\pi$ montre que tout point M' de ce cercle est un point du lieu.

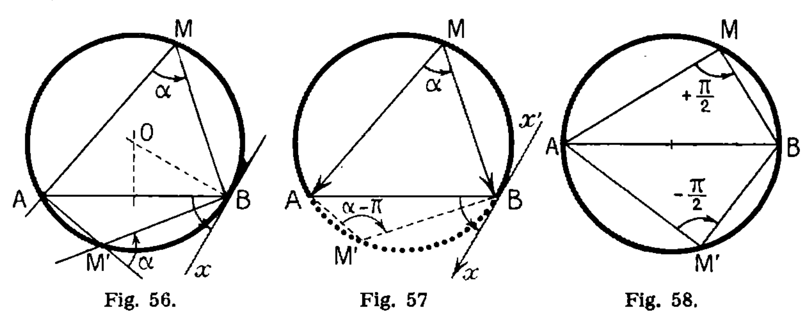


Fig. 56. Fig. 57 Fig. 58.

• **57. Corollaire.** — ***Le lieu géométrique des points* M *tels que* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$ *est un arc de cercle d'extrémités* A *et* B**
(*Arc capable de l'angle de vecteurs* α *relatif à* A *et* B).

Tout point M du lieu (fig. 57) appartient au cercle lieu des points tels que $(\text{MA}, \text{MB}) = \alpha + k\pi$. Soit x'x la tangente en B à ce cercle orientée de telle sorte que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Bx}) = \alpha + 2k\pi$. Pour tout point M de l'arc intérieur à l'angle saillant ABx', on a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$ tandis que pour tout point M' de l'arc intérieur à l'angle ABx on a $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \alpha + (2k+1)\pi$.

Le lieu cherché est donc l'arc AMB, tandis que l'arc AM'B est le lieu des points M' tels que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \alpha + \pi + 2k\pi$.

● **58. Cas particuliers.** — 1° *Le lieu des points* M *tels que* (MA, MB) = $k\pi$ *se réduit à la droite* AB. Le segment AB correspond à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (2k+1)\pi$ et ses prolongements à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2k\pi$.

2° *Le lieu des points* M *tels que* (MA, MB) $= \frac{\pi}{2} + k\pi$ *est le cercle de diamètre* AB (fig. 58). L'un des demi-cercles correspond à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et l'autre correspond à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

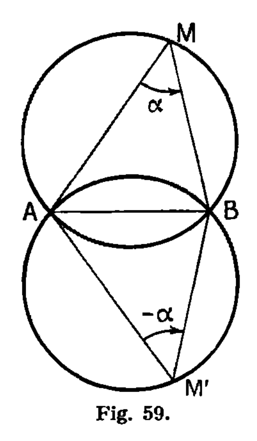


Fig. 59.

3° Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à la droite AB (fig. 59) les angles saillants $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ sont opposés. Donc si :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$$

on a

$$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = -\alpha + 2k\pi.$$

Les deux arcs de cercle AMB *et* AM'B *capables des angles de vecteurs* α *et* $-\alpha$ *sont symétriques par rapport à* AB. Il en est par suite de même des cercles AMB et AM'B capables des angles de droites α et $-\alpha$.

● **59. Points cocycliques.** — ***Pour que quatre points non alignés*** A, B, C ***et*** D ***appartiennent à un même cercle, il faut et il suffit que l'on ait :***

$$\boxed{(CA, CB) = (DA, DB) + k\pi.} \quad (1)$$

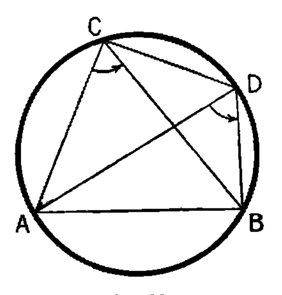


Fig. 60.

En effet, il faut et il suffit que C et D appartiennent à un même cercle capable relatif à A et B, donc que les angles (CA, CB) et (DA, DB) aient, à $k\pi$ près, la même valeur α (fig. 60). Il en résulte que la relation (1) équivaut à :

$$(CA, CD) = (BA, BD) + k\pi$$

ou

$$(BA, BC) = (DA, DC) + k\pi.$$

Dans l'égalité (1) on peut donc permuter deux quelconques des quatre lettres A, B, C et D. Rappelons que :

Lorsqu'un quadrilatère ABCD *a deux angles opposés* A *et* C *égaux à un droit, il est inscriptible dans le cercle de diamètre* DB *et réciproquement.*

• **60. Quadrangle.** — ***On appelle quadrangle la figure formée par quatre points et les six segments qui les joignent deux à deux.***

Les quatre points A, B, C, D sont les sommets du quadrangle ABCD (fig. 61 et 62). Les côtés tels que AC et BD sont dits opposés. Les points de rencontre I, J, K des trois couples de côtés opposés sont les *points diagonaux* et le triangle IJK est le *triangle diagonal.*

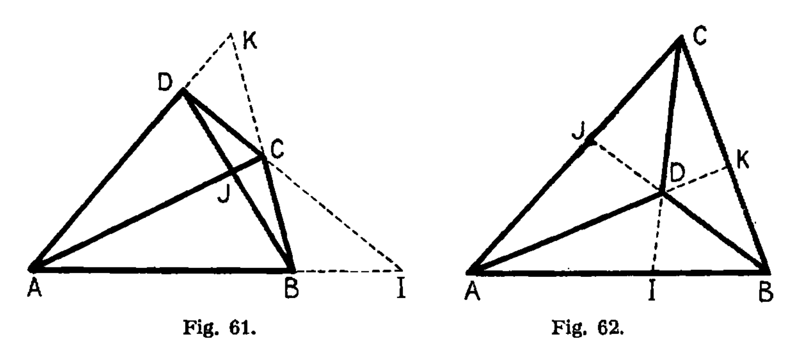


Fig. 61. Fig. 62.

La relation (CA, CB) = (DA, DB) + $k\pi$ est nécessaire et suffisante pour que le quadrangle ABCD soit inscriptible dans un cercle (fig. 60).

• **61. Droites antiparallèles.** — ***Deux couples de droites*** D, D′ ***et*** Δ, Δ′ ***sont antiparallèles si :*** (D, Δ) = (Δ′, D′) + $k\pi$ (1)

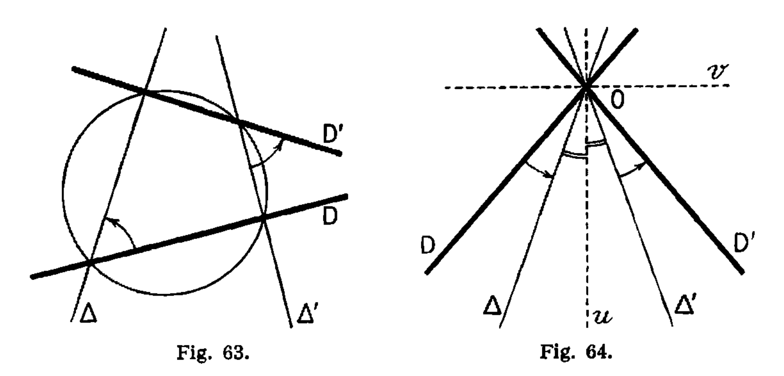


Fig. 63. Fig. 64.

On dit, par exemple (fig. 63), que Δ′ est antiparallèle à Δ par rapport à D et D′. Il en est ainsi notamment lorsque D et D′ sont respectivement perpendiculaires à Δ et Δ′ car :

$$(D, \Delta) = (\Delta', D') = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Si les quatre droites D, D′, Δ, Δ′ sont issues d'un même point O on dit également que Δ et Δ′ sont des isogonales de l'angle (D, D′) (fig. 64).

1° ***Pour que deux couples de côtés opposés d'un quadrangle* ABCD *soient antiparallèles, il faut et il suffit que ce quadrangle soit inscriptible.***

Pour que AB et CD soient antiparallèles par rapport à AD et BC, il faut et il suffit que : $(AB, AD) = (BC, CD) + k\pi$ soit $(AB, AD) = (CB, CD) + k\pi$ c'est-à-dire que le quadrangle ABCD soit inscriptible (n° 60).

2° ***Deux droites antiparallèles à une même troisième par rapport à un couple donné sont parallèles entre elles.***

Si Δ′ et Δ″ sont antiparallèles à Δ par rapport à D et D′, on a (à $k\pi$ près) : $(D, \Delta) = (\Delta', D') = (\Delta'', D')$ ce qui entraîne $(\Delta', \Delta'') = k\pi$.

Ainsi (fig. 65) CD et EF, antiparallèles à AB par rapport à Ax et By, sont parallèles.

3° ***Pour que deux couples* D, D′ *et* Δ, Δ′ *soient antiparallèles il faut et il suffit que les bissectrices des angles* (D, D′) *et* (Δ, Δ′) *aient mêmes directions.***

Si Ou est la direction d'une bissectrice de l'angle (D, D′), la relation (2) : $(D, Ou) = (Ou, D') + k\pi$ et la relation (1) : $(D, \Delta) = (\Delta', D') + l\pi$ entraînent par différence : $(\Delta, Ou) = (Ou, \Delta') + m\pi$ (3) et réciproquement, la relation (1) est conséquence des relations (2) et (3).

4° ***Lorsque deux couples de droites* D, D′ *et* D_1, D'_1 *sont séparément antiparallèles par rapport à un même troisième* Δ, Δ′, *ils sont antiparallèles entre eux.***

Les égalités $(D, \Delta) = (\Delta', D') + k\pi$ et $(D_1, \Delta) = (\Delta', D'_1) + l\pi$ donnent en effet par différence : $(D, D_1) = (D'_1, D') + m\pi$.

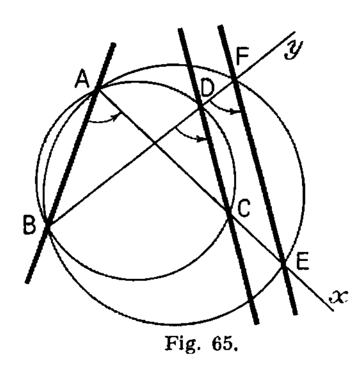


Fig. 65.

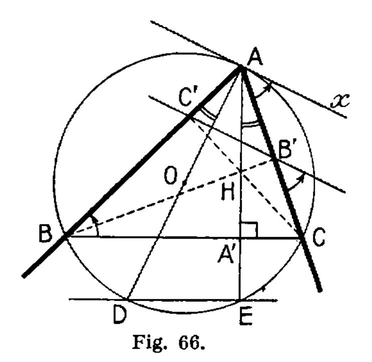


Fig. 66.

• **62. Exemples.** — Menons les hauteurs AA′, BB′ et CC′ du triangle ABC, puis le diamètre AD et la tangente Ax au cercle ABC (fig. 66). Le quadrangle BCB′C′ étant inscriptible les couples AB, AC; BB′, CC′ et BC, B′C′ sont deux à deux antiparallèles. Les angles (BC, BA) et (AC, Ax) étant égaux, les couples AB, AC et BC, Ax sont antiparallèles. Il en résulte que B′C′ et Ax sont paral-

lèles donc que AD est perpendiculaire à B'C'. Les droites AA' et AD, perpendiculaires à BC et B'C', sont antiparallèles par rapport à BC et B'C' donc par rapport à BB' et CC' ou par rapport à AB et AC. Notons que :

Deux côtés d'un triangle sont antiparallèles par rapport à la hauteur et au diamètre du cercle circonscrit issus du même sommet.

Ce qui revient à dire que les angles (AB, AC) et (AH, AD) ont mêmes bissectrices.

APPLICATIONS.

• **63. Théorème.** — ***Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit.***

Soit H l'orthocentre du triangle ABC et H_1 le symétrique de H par rapport à la droite BC (fig. 67). Les angles (AB, AC) et (HC, HB) ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires sont égaux, tandis que les angles (HB, HC) et (H_1B, H_1C) symétriques par rapport à BC sont opposés. Donc :

$$(AB, AC) = -(HB, HC) = (H_1B, H_1C) \text{ à } k\pi \text{ près.}$$

L'égalité $(H_1B, H_1C) = (AB, AC) + k\pi$ montre que le point H_1 est sur le cercle ABC (n° 59).

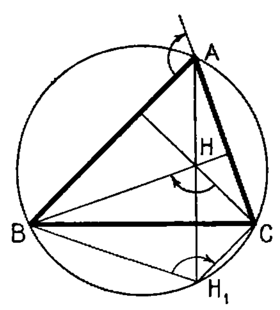


Fig. 67.

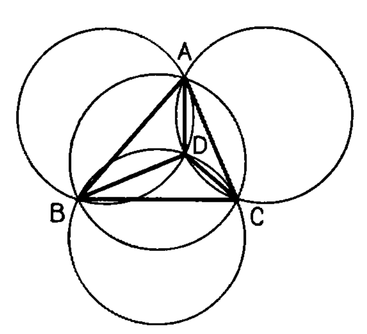


Fig. 68.

AUTRE ÉNONCÉ. — *Les symétriques du cercle circonscrit à un triangle par rapport aux côtés de ce triangle passent par l'orthocentre.*

Cela résulte aussi des égalités telles que $(HB, HC) = -(AB, AC) + k\pi$ (n° 58, 3°).

• **64. Corollaire.** — ***Les quatre cercles circonscrits aux triangles d'un quadrangle orthocentrique sont égaux.***

Un quadrangle ABCD est dit *orthocentrique* lorsqu'un sommet est l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres (fig. 68).

Le point D étant l'orthocentre du triangle ABC les trois cercles DBC, DCA et DAB sont égaux au cercle ABC, donc égaux entre eux.

Inversement si trois cercles égaux ABC, ACD *et* ADB *concourent en un même point* A, *le quadrangle* ABCD *est orthocentrique.*

Les cercles ACD et ABD sont symétriques du cercle ABC par rapport à AC et AB respectivement. L'orthocentre du triangle ABC, qui appartient à ces deux cercles, est donc le point D et le cercle BCD est égal à chacun des trois cercles donnés.

• **65. Droite de Simson.** — ***Le lieu géométrique des points dont les projections sur les côtés d'un triangle*** ABC ***sont en ligne droite est le cercle circonscrit au triangle.***

Pour que les points α, β, γ projections sur les droites BC, CA et AB, d'un point M du plan ABC soient alignés (fig. 69) il faut et il suffit que :

$$(\beta\alpha, \beta M) = (\beta\gamma, \beta M) + k\pi \qquad (1)$$

Or les quadrangles $\alpha\beta$CM et $\beta\gamma$AM sont inscriptibles (n° 60). Donc :

$$(\beta\alpha, \beta M) = (C\alpha, CM) = (CB, CM) + h\pi$$
$$(\beta\gamma, \beta M) = (A\gamma, AM) = (AB, AM) + l\pi.$$

La relation (1) est donc équivalente à la relation :

$$(CB, CM) = (AB, AM) + (k - h - l)\,\pi$$

nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne au cercle ABC.

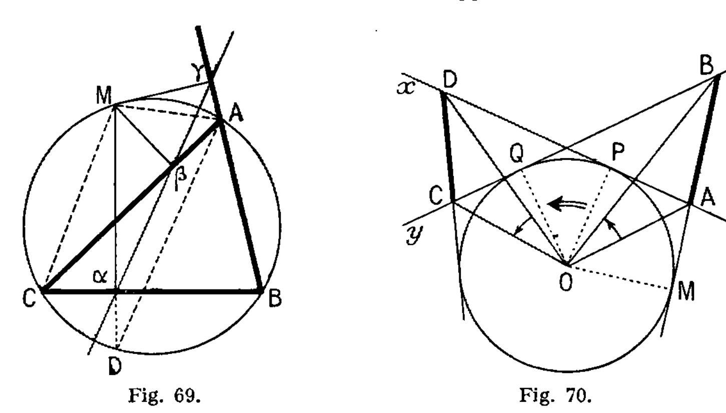


Fig. 69. Fig. 70.

La droite $\alpha\beta\gamma$ ***est la droite de Simson relative au point*** M ***du cercle*** ABC.

Soit D la seconde intersection de la droite Mα avec le cercle ABC. Les quadrangles $\alpha\beta$CM et DACM étant inscriptibles, les droites $\alpha\beta$ et AD sont séparément antiparallèles à MC par rapport aux droites AβC et MαD. Elles sont donc parallèles et la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ est parallèle à AD.

• **66. Tangentes à un cercle.**— ***La portion d'une tangente variable à un cercle comprise entre deux tangentes fixes est vue du centre sous un angle de droites constant.***

Soient Px et Qy deux tangentes fixes au cercle O et la tangente variable en M coupant respectivement Px et Qy en A et B (fig. 70). Les droites OA et OB sont les bissectrices des angles de vecteurs $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OQ})$. Donc (nº 50) :

$$(OA, OB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) + k\pi.$$

On en déduit que : *Lorsqu'un quadrilatère* ABCD *est circonscrit à un cercle de centre* O, *les deux couples de droites* OA, OC *et* OB, OD *sont antiparallèles.*

• **67. Angle de deux cercles.** — ***Toute sécante passant par un des points communs à deux cercles est vue de l'autre point commun sous un angle constant égal à l'angle des deux cercles.***

Soient deux cercles O et O′ sécants en A et B et une droite passant par B qui recoupe les deux cercles en M et M′ (fig. 71). On a, à $k\pi$ près :

$$(MA, MB) = (OA, OO') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

et

$$(M'B, M'A) = (O'O, O'A) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A})$$

D'où : $(MA, MM') + (M'M, M'A) = (OA, OO') + (OO', O'A) + k\pi.$

Soit $(AM, AM') = (AO, AO') + k\pi.$

On peut même préciser cette formule, car elle entraîne l'égalité des angles (AM, AO) et (AM', AO'), donc celles des angles aigus $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$ et $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AO'})$, si bien que l'on a :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) + 2k\pi.$$

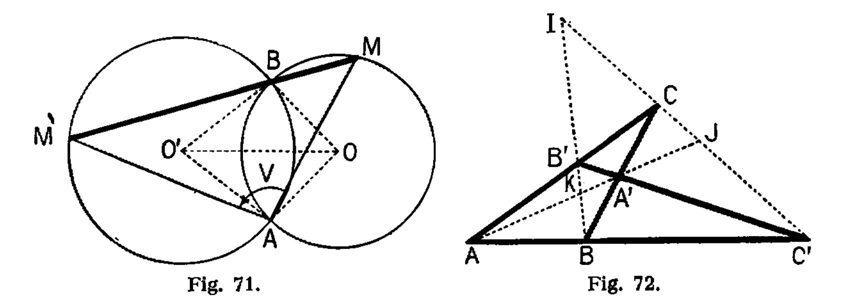


Fig. 71. Fig. 72.

• **68. Quadrilatère complet.** — ***On appelle quadrilatère complet la figure formée par quatre droites se coupant deux à deux.***

On obtient un quadrilatère complet ABC A′B′C′ en coupant les trois droites BC, CA et AB par une transversale A′B′C′ (fig. 72). Les quatre droites sont les côtés et leurs six points d'intersection sont les sommets du quadrilatère complet. Deux sommets tels que A et A′ non situés sur un même côté sont dits opposés et les trois droites AA′, BB′ et CC′ sont les *diagonales* du quadrilatère complet. Elles forment en général un triangle IJK appelé *triangle diagonal.*

● **69. Théorème.** — ***Les cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet concourent en un point ω dont les projections sur les côtés sont alignées.***

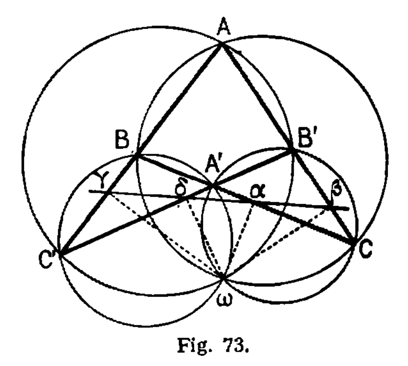


Fig. 73.

Soit ω le second point commun aux cercles ABC et AB'C' (fig. 73) et α, β, γ, δ, ses projections sur les droites A'BC, AB'C, ABC' et A'B'C'. Ces quatre points α, β, γ, δ sont alignés car αβγ et δβγ sont les droites de Simson de ω pour les triangles ABC et AB'C'. Le point ω ayant ses projections sur les côtés des triangles A'BC' et A'B'C alignées appartient aux cercles A'BC' et A'B'C.

SUJET D'EXAMEN

— Lieu géométrique des points M d'un plan orienté tel que, A et B étant deux points fixes de ce plan, l'un des angles des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ait une valeur donnée. (*Grenoble*, ME.)

EXERCICES

● **21.** 1° Démontrer que l'angle de droites de deux cordes AB et CD d'un cercle de centre O est donné par la formule : $(AB, CD) = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})\right] + k\pi$.

2° En désignant par α la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ intérieur à l'angle ADC et par β la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{BD}$ intérieur à l'angle BAD démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2k\pi.$$

● **22.** Soient trois points ABC d'un cercle de centre O. Démontrer que la mesure algébrique de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ est à $2k\pi$ près égale à la moitié de la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{BAC}$ inférieur au cercle entier.

● **23.** On considère deux arcs de cercle ACB et ADB et les tangentes $\overrightarrow{Ax}$ et $\overrightarrow{Ay}$ orientées dans les sens correspondants à $\overset{\frown}{ACB}$ et $\overset{\frown}{ADB}$. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + 2k\pi.$$

● **24.** Un point variable M décrit le cercle circonscrit au triangle isocèle ABC de sommet A. La droite AM coupe en P la droite BC :

1° Montrer que les cercles BMP et CMP sont respectivement tangents à AB et AC. Lieux de leurs centres ω et ω';

2° Comparer les angles (BA, BM) et (CA, CM) à l'angle (AM, BC).

● **25.** Deux cercles O et O′ se coupent en A et B. On mène la tangente commune CC′ la plus rapprochée de B et la sécante MBM′ parallèle à CC′. Soient V, φ et φ' les mesures algébriques des angles saillants $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$, $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})$:

1° Montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\varphi}{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM'}) = \frac{\varphi'}{2}$;

2° En déduire que la tangente commune CC′ est vue de A sous l'angle $\frac{V}{2}$ et de B sous l'angle $\pi - \frac{V}{2}$. Comparer les cercles ACC′ et BCC′.

● **26.** Soient trois points D, E, F pris respectivement sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC.

1° Montrer que les trois cercles AEF, BFD et CDE se recoupent en un même point M;

2° Évaluer l'angle (DE, DF) en fonction des angles (AB, AC) et (MB, MC);

3° Lieu géométrique du point M lorsque D, E et F varient en restant alignés.

● **27.** 1° On considère un triangle ABC, un point fixe D de AB, un point fixe E de AC et un point mobile M du cercle ABC. Les cercles BDM et CEM se recoupent en N. Trouver le lieu du point N.

2° Soit un quadrilatère ABCD et un point mobile M de BC. Les cercles ABM et CDM se recoupent en P. Lieu géométrique du point P?

● **28.** 1° On donne deux cercles fixes ABC et ABD. Une sécante mobile passant par B recoupe le premier cercle en M et le second en N. Les droites CM et DN se coupent en R. Trouver le lieu du point R.

2° Soient trois cercles fixes DAB, DAC et DBC et un point variable M du cercle DBC. La droite MB recoupe en N le cercle DAB et la droite MC recoupe en P le cercle DAC. Trouver l'enveloppe de NP.

● **29.** On mène par le point I trois droites Ix, Iy et Iz telles que $(Ix, Iy) = (Iy, Iz) = \frac{\pi}{3}$ puis par le point J trois droites analogues Jx', Jy' et Jz'. Les droites Ix, Iy et Iz coupent la droite Jx' en A, A′ et A″, la droite Jy' en B, B′ et B″ et la droite Jz' en C, C′ et C″. Démontrer que les trois triangles AB′C″, B″CA′ et C′A″B sont équilatéraux et qu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles.

● **30.** 1° Quel est le lieu des points de l'espace dont les projections sur les côtés d'un triangle sont en ligne droite?

2° Quel est le lieu des points de l'espace dont les projections sur les côtés d'un quadrilatère complet sont en ligne droite?

● **31.** Soit un triangle ABC. On construit trois droites Ax, By et Cz telles que : (AB, Ax) = (CB, Cz) et (AC, Ax) = (BC, By) :

1° Montrez que les trois couples BC, Ax; CA, By et AB, Cz sont deux à deux antiparallèles;

2° Démontrer que les trois droites Ax, By, et Cz sont concourantes en un point D du cercle ABC.

● **32.** Dans un triangle ABC on désigne par A la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, par H l'orthocentre, par I le centre du cercle inscrit et par J, K, L les centres des cercles exinscrits respectivement dans les angles A, B et C du triangle :

1° Évaluer en fonction de A, les angles (HB, HC), $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$ $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC})$, $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC})$ et $(\overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LC})$.

2° Déterminer les lieux géométriques de H, I, J, K et L lorsque le point A décrit un cercle passant par les points fixes B et C. Préciser les centres de ces cercles ainsi que les arcs décrits par chacun des points I, J, K et L.

● **33.** On considère trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ et on mène les bissectrices OM, ON et OP des angles $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$:

1° Démontrer que OM et ON sont antiparallèles par rapport à OP et OC;

2° Énoncer deux autres groupes analogues de quatre droites et écrire les égalités d'angles qui en résultent.

● **34.** Soit D le point de contact avec la droite BC d'un cercle de centre I tangent aux trois côtés du triangle ABC :

1° Démontrer que IA et ID sont antiparallèles par rapport à IB et IC;

2° En déduire que AI passe par le centre du cercle IBC.

● **35.** Étant donné un triangle ABC on construit extérieurement au triangle les points D et E tels que : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$, AD = AB et AE = AC.

1° Montrer que les droites BD et CE se coupent en un point I situé sur les cercles ACD et ABE.

2° Démontrer que les droites CD et BE ainsi que les cercles ABD et ACE concourent en un même point J. Que représente JA pour l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE})$?

3° La droite AJ coupe BD en P et CE en Q. Montrer que AI est tangente au cercle IPQ.

● **36.** On considère un triangle ABC dont l'angle A est obtus. Le cercle tangent en A à AB et passant par C recoupe BC en D. Le cercle tangent en A à AC et passant par B recoupe BC en E. Ces deux cercles se recoupent en ω :

1° Démontrer que AD = AE et que la droite ωA est bissectrice de l'angle BωC. Évaluer les angles $(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C})$ et $(\overrightarrow{\omega D}, \overrightarrow{\omega E})$ en fonction de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = A$.

2° Montrer que le cercle ωDE est tangent à AD et AE et que les cercles ωBD et ωCE sont respectivement tangents à AB et AC;

3° Le cercle ωDE recoupe ωA en I. Comparer les directions ID et IE aux directions AB et AC.

● **37.** Soient deux cercles de centres O et O' se coupant en A et B. On mène par le point B deux sécantes; l'une fixe CC', l'autre variable MM'. Les droites CM et C'M' se coupent en P :

1° Démontrer que les quadrilatères PACC' et PAMM' sont inscriptibles et trouver le lieu géométrique du point P;

2° Évaluer l'angle (CM, C'M') en fonction de $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V$ et démontrer que les trois angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})$, $(\overrightarrow{AC}, AM')$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC'})$ ont même bissectrice;

3° Soient D et D' les projections de A sur CM et C'M'. Montrer que la droite DD' passe par un point fixe.

● **38.** 1° Montrer que les projections d'un point ω d'un cercle sur les six côtés d'un quadrangle inscrit dans ce cercle sont les sommets d'un quadrilatère complet.

2° On considère un quadrilatère complet ABC A'B'C' et soit ω le point commun aux quatre cercles ABC, AB'C', A'BC' et A'B'C de diamètres respectifs ωM, ωN, ωP et ωQ. Démontrer que les six sommets du quadrilatère complet sont les projections de ω sur les six côtés du quadrangle MNPQ et en déduire que les cinq points ω, M, N, P et Q appartiennent à un même cercle.

● **39.** Deux cercles O et O', se coupent en A et B et une sécante mobile MM' passant par B recoupe le premier cercle en M et le second en M'. Les tangentes en M et M se coupent en I et les rayons OM et O'M' se coupent en J :

1° Montrer que I et J sont diamétralement opposés sur le cercle AMM' de centre ω et que les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ ont même bissectrice;

2° Évaluer en fonction de $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V$ les angles (IM, IM'), (JM, JM') et (ωO, ωO'). Déterminer le lieu géométrique de ω et J;

3° La droite AI recoupe en K le cercle AOO'. Démontrer que le segment KI est constant et égal au diamètre du cercle AOO'.

● **40.** On considère un cercle Γ de centre O, de rayon R, une corde BC et un point A de ce cercle. La tangente en A à Γ coupe la droite BC en T. On désigne par A l'angle BAC, par α l'angle formé par la bissectrice intérieure AA' de l'angle BAC avec la hauteur AH du triangle ABC, par I et J les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

1° B et C restant fixes et A décrivant le cercle Γ montrer que le lieu de I et de J appartient à deux cercles dont la somme des carrés des rayons est égale à 4 R^2;

2° Calculer en fonction de A et de α les angles des triangles ABC, CAT et BAT. Calculer en fonction de R, A, α les côtés des mêmes triangles. *(Lyon.)*

● **41.** Par les sommets ABC d'un triangle donné on mène respectivement les droites D_A, D_B et D_C telles que les trois angles (BC, D_A), (CA, D_B) et (AB, D_C) soient égaux à $k\pi$ près à un même angle α. Soit A'B'C' le triangle déterminé par ces trois droites :

1° Lieux des points A', B' et C' quand α varie;

2° Montrer que le point commun aux trois lieux obtenus est l'orthocentre H du triangle ABC. Que représente le point H pour le triangle A'B'C'?

3° Montrer que le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC et que leur rapport de similitude est $2|\cos \alpha|$. *(Dijon.)*

● **42.** Soit un triangle ABC : on désigne par U le cercle passant par A et B et centré en I sur AC, par V le cercle passant par A et C et centré en J sur AB, par W le cercle ABC et par K le centre de ce cercle :

1° En supposant donnés les points I, J, K construire le triangle ABC;

2° les cercles U et V se coupent en un point H distinct de A. Montrer que les points A, K, H sont alignés. *(Lille.)*

● **43.** Soient dans le plan $x'Ox$, $y'Oy$ deux droites rectangulaires fixes, Ot une demi-droite issue de O et sur cette demi-droite deux points P et Q tels que $OP = a$, $OQ = b$ (a et b constantes telles que $a > b$). Soit I le milieu de PQ. Le cercle de centre I passant par O recoupe $x'Ox$ en U, $y'Oy$ en V et Ot en W. Les cercles Γ et Ω respectivement circonscrits aux triangles WPU et WQV se recoupent en M et recoupent respectivement $x'Ox$ en S et $y'Oy$ en T.

1° Montrer que P et Q sont les projections sur OW respectivement de S et de T et que M est la projection de W sur ST;

2° Démontrer que les quatre points O, T, W, S sont sur un même cercle. En déduire que M est sur la droite UV;

3° Démontrer que QM est parallèle à $x'Ox$ et PM parallèle à $y'Oy$. *(Bordeaux.)*

TROISIÈME LEÇON

ÉLÉMENTS ORIENTÉS DANS L'ESPACE

• **70. Orientation de l'espace.** — Un demi-plan R issu d'un axe $z'z$ peut tourner autour de cet axe dans deux sens différents. Afin de distinguer ces deux sens, on imagine un observateur placé le long de l'axe $z'z$ de façon que le sens positif de l'axe soit le sens des pieds à la tête de l'observateur (fig. 74).

On appelle sens direct (ou sens positif) de rotation autour de l'axe $z'z$ le sens allant de la droite à la gauche de l'observateur en passant devant lui.

Le sens opposé est le sens rétrograde (ou négatif).

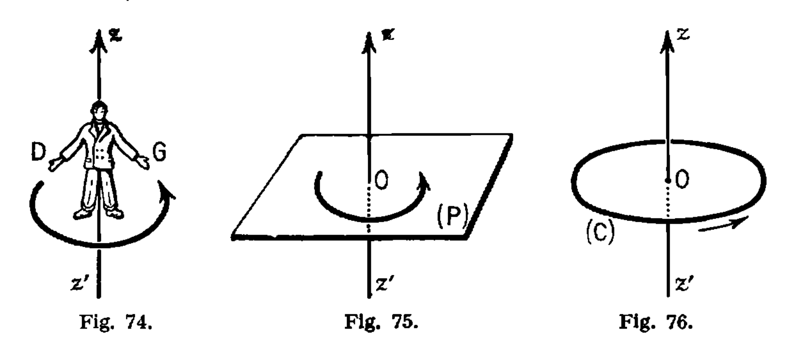


Fig. 74. Fig. 75. Fig. 76.

On définit de même le sens direct de rotation autour d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de l'espace. On dit que l'*espace est orienté.*

• **71. Plan orienté dans l'espace.** — Au sens direct de rotation autour d'un axe $z'z$ correspond un sens de rotation dans tout plan P perpendiculaire en O à cet axe (fig. 75). Pour un observateur placé dans le demi-espace contenant la demi-droite Oz, ce sens est le sens direct tel qu'il a été défini au n° 35. Si on change le sens de l'axe, le sens direct de rotation dans le plan P change également.

Pour orienter un plan dans l'espace il suffit d'orienter une perpendiculaire à ce plan. Le sens direct dans le plan est le sens direct autour de l'axe obtenu.

En particulier tout cercle de l'espace est orienté lorsque l'axe de ce cercle est lui-même orienté (fig. 76).

• **72. Dièdre orienté.** — Un demi-plan R issu de l'axe $z'z$ engendre en tournant dans un sens déterminé autour de $z'z$ un dièdre orienté (P, Q). La mesure algébrique, autour de $z'z$, du dièdre orienté (P, Q) s'obtient en affectant la mesure arithmétique du dièdre balayé par le demi-plan R, du signe + ou du signe —, suivant que le demi-plan R a tourné dans le sens direct ou dans le sens rétrograde autour de l'axe $z'z$.

Inversement deux demi-plans P et Q issus de l'axe $z'z$ définissent une infinité de dièdres orientés (P, Q). En effet un demi-plan R initialement confondu avec P, tournant dans un sens donné, peut venir s'appliquer sur le demi-plan Q et y revenir après avoir décrit un nombre entier quelconque de tours supplémentaires.

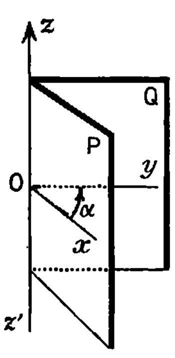


Fig. 77.

• **73. Définition.** — ***On appelle angle orienté de deux demi-plans*** P ***et*** Q ***issus d'un même axe*** $z'z$ ***l'un quelconque des dièdres dont il faut faire tourner, dans un sens donné, la face origine*** P ***pour l'amener sur la face extrémité*** Q.

Soit α la mesure algébrique autour de l'axe $z'z$ de l'un de ces dièdres.

On démontre comme cela a été fait pour les angles orientés dans le plan (n° 37) que les différentes mesures algébriques de l'angle des demi-plans P et Q sont données par la formule :

$$(P, z'z, Q) = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad (P, Q) = \alpha + 2k\pi.$$

Soit xOy le rectiligne du dièdre (P, Q). Les différentes mesures algébriques ainsi obtenues sont celles de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ dans le plan xOy orienté par l'axe $z'z$. *La détermination principale de l'angle des demi-plans* P *et* Q *est la mesure algébrique autour de* $z'z$ *du dièdre orienté saillant* (P, $z'z$, Q).

Cette détermination est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Elle est positive ou négative suivant que le sens du dièdre orienté saillant (P, Q) est le sens positif ou le sens négatif autour de $z'z$.

• **74. Angle de deux vecteurs dans l'espace.** — Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de l'espace (fig. 78) et par un point quelconque O menons les demi-droites $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ respectivement parallèles à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et de même sens.

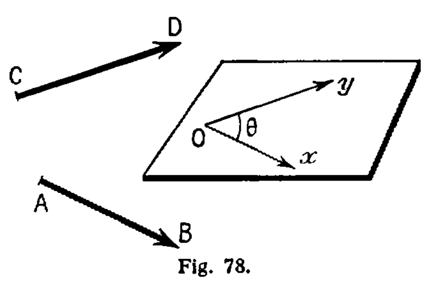


Fig. 78.

L'angle xOy obtenu est indépendant du point O et se conserve quand on remplace l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ par un vecteur parallèle et de même sens.

1° Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles à un plan P préalablement orienté (ou orthogonaux à un axe $z'z$), on peut prendre pour mesure algébrique de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

l'une des mesures algébriques de l'angle (Ox, Oy) dans le plan P (ou autour de $z'z$).

2° Dans le cas contraire on envisage seulement pour l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ la mesure arithmétique θ de l'angle saillant xOy car il n'y a aucune raison d'orienter le plan xOy dans un sens plutôt que dans l'autre. Donc :

Sauf indication contraire le symbole $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ dans l'espace désigne la mesure arithmétique θ, comprise entre 0 et π, de l'angle saillant xOy formé par deux demi-droites Ox et Oy de même direction et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On définit de même l'angle (Δ_1, Δ_2) de deux axes de l'espace. Cet angle est celui de leurs vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Soit : $(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2}) = (\vec{i}, \vec{j})$.

Notons que :

● **75. Théorème.** — ***L'angle de deux vecteurs ou de deux axes est défini en grandeur par son cosinus.***

Rappelons en effet que le cosinus de l'angle ($x'x$, $y'y$) est égal à la mesure algébrique, sur l'un des axes, de la projection du vecteur unitaire de l'autre. Ainsi (fig. 79) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{j} \quad \text{et} \quad \overline{O'M'} = \cos(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}).$$

● **76. Corollaire.** — ***La mesure algébrique de la projection $\overrightarrow{A'B'}$ sur un axe $x'x$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par l'axe $y'y$ est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le cosinus de l'angle des deux axes $x'x$ et $y'y$.***

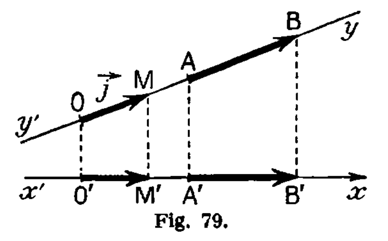


Fig. 79.

D'après le n° 25 :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{O'M'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OM}}$$

donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\cos(x'x,\ y'y)} = \frac{\overline{AB}}{1}$$

soit $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos(x'x,\ y'y)$.

En supposant l'axe $y'y$ de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ on a par suite :

$$\boxed{\overline{A'B'} = AB \,.\, \cos(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB})}$$

PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

• **77. Définitions.** — ***On appelle produit scalaire de deux vecteurs le produit de leurs modules par le cosinus de leur angle.***

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de modules u et v et d'angle θ (fig. 80). Leur produit scalaire se représente par le symbole $\vec{U}.\vec{V}$ (lire : « U scalaire V »).

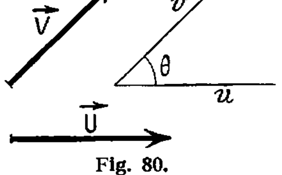


Fig. 80.

$$\vec{U}\,.\,\vec{V} = uv \cos\theta.$$

L'angle θ est l'angle des deux vecteurs dans l'espace. Mais si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont situés dans un même plan orienté, on peut prendre $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$ car cela ne change pas $\cos\theta$.

Le produit scalaire du vecteur $\vec{U}$ ***par lui-même est son carré scalaire*** $\vec{U}^2$.

On a donc: $\vec{U}^2 = u^2$ et par suite $\overrightarrow{AB}^2 = \overline{AB}^2$.

Un produit scalaire est commutatif : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U} = uv \cos\theta$. Si l'un des vecteurs $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul ce produit est nul. Le signe du produit scalaire de deux vecteurs non nuls est celui de $\cos\theta$. Ce produit est positif, nul ou négatif suivant que θ est aigu, droit ou obtus. Donc :

Pour que deux vecteurs non nuls aient un produit scalaire nul, il faut et il suffit qu'ils soient rectangulaires.

Notons que le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est le cosinus de leur angle et que le carré scalaire d'un vecteur unitaire est égal à 1.

• **78. Théorème.** — ***Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des mesures algébriques de l'un de ces vecteurs et de la projection de l'autre sur lui.***

Considérons (fig. 81) $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$ et soit B' la projection de B sur le support $x'x$ de $\overrightarrow{OA}$, orienté dans le sens de $\overrightarrow{OA}$.

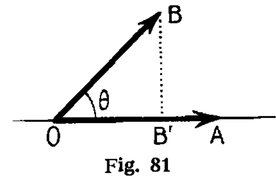


Fig. 81

On a :

$$\overline{OA} = u \quad \text{et} \quad \overline{OB'} = OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

soit : $\overline{OB'} = v \cos\theta.$

D'où :

$$\overline{OA}.\overline{OB'} = u.v \cos\theta = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \vec{U}.\vec{V}.$$

Si on change le sens de l'axe $x'x$ cela ne modifie pas le produit $\overline{OA} \cdot \overline{OB'}$.

Donc : $$\vec{U}.\vec{V} = \vec{OA}.\vec{OB} = \overline{OA}.\overline{OB'} = \overline{OA'}.\overline{OB}$$

• **79. Corollaires.** — 1° ***La mesure algébrique de la projection d'un vecteur sur un axe est le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur unitaire de l'axe.***

En effet (fig. 82) le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{OI}$ du vecteur $\vec{AB}$ par le vecteur unitaire $\vec{OI}$ de l'axe $x'x$ est égal à $\overline{OI}.\overline{A'B'} = \overline{A'B'}$.

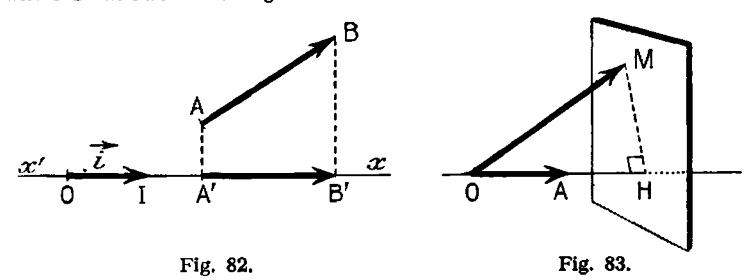


Fig. 82. Fig. 83.

2° *Si on déplace l'un des points* A *ou* B *dans un plan perpendiculaire au vecteur* $\vec{CD}$ *le produit scalaire* $\vec{AB}.\vec{CD}$ *reste constant.*

En effet A' et B' restent fixes donc il est de même de $\vec{AB}.\vec{CD} = \overline{A'B'}.\overline{CD}$.

3° Soient $\vec{OA}$ un vecteur fixe et $\vec{OM}$ un vecteur variable tels que le produit scalaire $\vec{OA}.\vec{OM}$ soit constant et égal à k (fig. 83). En désignant par H la projection du point M sur la droite OA, on a : $\vec{OA}.\vec{OM} = \overline{OA}.\overline{OH} = k$. Le point H est donc fixe et le lieu géométrique du point M est le plan (ou la droite) perpendiculaire en H à OA.

• **80. Propriétés du produit scalaire.**

1° ***Multiplication par un nombre algébrique.*** — Étant donné le nombre algébrique m construisons $\vec{OA} = \vec{U}$, $\vec{OB} = \vec{V}$ et $\vec{OC} = m\,\vec{OA} = m\,\vec{U}$ (fig. 84). En désignant par B' la projection de B sur OA; on a :

$$\vec{OC}.\vec{OB} = \overline{OC}.\overline{OB'} = m\,\overline{OA}.\overline{OB'} = m(\overline{OA}.\overline{OB'}) = m\,(\vec{OA}.\vec{OB}).$$

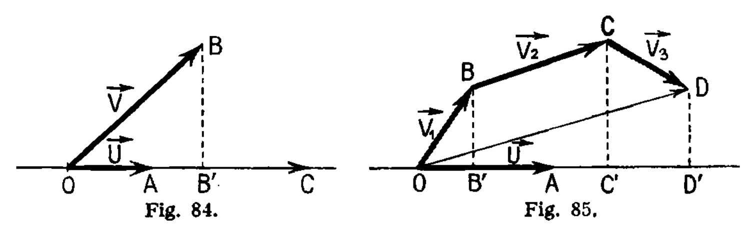


Fig. 84. Fig. 85.

Soit : $$(m\vec{U}).\vec{V} = m(\vec{U}.\vec{V})$$

et par suite : $$\boxed{(m\vec{U}).(n\vec{V}) = mn\,(\vec{U}.\vec{V}).}$$

2° ***Distributivité.*** — Soient (fig. 85) : $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{V}_1$, $\overrightarrow{BC} = \vec{V}_2$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{V}_3$

d'où : $$\overrightarrow{OD} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = \overline{OA}.\overline{OD'} = \overline{OA}.(\overline{OB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}) = \overline{OA}.\overline{OB'} + \overline{OA}.\overline{B'C'} + \overline{OA}.\overline{C'D'}$$

Soit : $$\vec{U}.(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{U}.\vec{V}_1 + \vec{U}.\vec{V}_2 + \vec{U}.\vec{V}_3$$

on en déduit que :

$$(\vec{U}_1 + \vec{U}_2).(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{U}_1.(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3) + \vec{U}_2.\ (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3). =$$

$$\vec{U}_1.\vec{V}_1 + \vec{U}_1.\vec{V}_2 + \vec{U}_1.\vec{V}_3 + \vec{U}_2.\vec{V}_1 + \vec{U}_2.\vec{V}_2 + \vec{U}_2.\vec{V}_3.$$

Et plus généralement :

$$\boxed{(\Sigma\, m_i\vec{U}_i).(\Sigma\, n_j\vec{U}_j) = \sum_i\sum_j m_i n_j\, \vec{U}_i.\vec{U}_j}$$

Cette règle est analogue à celle du calcul algébrique. On en déduit par exemple :

$$(\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + 2\vec{U}.\vec{V} + \vec{V}^2 \quad \text{et} \quad (\vec{U} + \vec{V})(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2.$$

En désignant par O le milieu de AB on a pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overline{MO}^2 - \overline{OA}^2$$

Ce qui montre que si A et B sont fixes, M variable tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$, on a: $\overline{MO}^2 - \overline{OA}^2 = k$. Le lieu du point M est une sphère de centre O.

3° ***Expression analytique.*** — Considérons dans l'espace rapporté aux axes rectangulaires Ox, Oy et Oz les vecteurs $\vec{V}$ (X, Y, Z) et $\vec{V'}$ (X', Y', Z'). On a :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$
$$\vec{V'} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}.$$

Faisons le produit scalaire des deux sommes en remarquant que :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

Un produit partiel tel que $X\vec{i}.X'\vec{i}$ est égal à $XX'\vec{i}^2 = XX'$ et un produit partiel tel que $X\vec{i}.Y'\vec{j}$ donne $XY'\vec{i}.\vec{j} = 0$. On obtient ainsi :

$$\boxed{\vec{V}.\vec{V'} = XX' + YY' + ZZ'}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme des produits des composantes scalaires de même nom de ces deux vecteurs.

On vérifie que : $\vec{V}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

Dans le plan, on obtient de même :

$$\vec{V}.\vec{V'} = XX' + YY' \quad \text{et} \quad \vec{V}^2 = X^2 + Y^2.$$

• **81. Applications.** — L'utilisation du produit scalaire permet de donner des démonstrations rapides à beaucoup de relations métriques ou trigonométriques.

Ainsi considérons dans le plan rapporté aux axes rectangulaires Ox et Oy (fig. 86) les deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ tels que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = a$ et

$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = b$. Le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ est égal à $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ soit à $\cos(a - b)$. Or les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $\cos a$ et $\sin a$ et celles du vecteur $\overrightarrow{ON}$ sont $\cos b$ et $\sin b$. Donc $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

D'où : $\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$

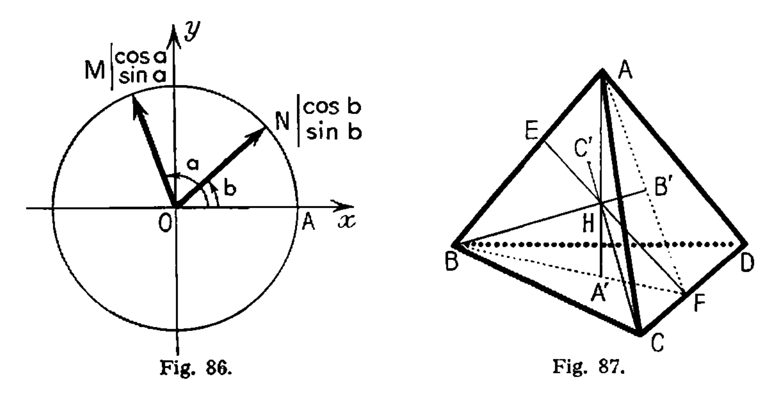


Fig. 86. Fig. 87.

• **82. Formule d'Euler généralisée** : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

(Permuter circulairement les lettres B, C et D). Si nous prenons A comme origine on obtient en remplaçant $\overrightarrow{CD}$ par exemple par $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$:

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}) = 0.$$

• **83. Tétraèdre orthocentrique.** — ***Lorsqu'un tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées rectangulaires, il en est de même du troisième.***

Si dans le tétraèdre ABCD les arêtes AB et AC sont respectivement orthogonales à CD et DB on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$. La relation d'Euler montre que l'on a alors $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ et que l'arête AD est orthogonale à BC.

Dans un tel tétraèdre (fig. 87) les arêtes issues de A se projettent sur la face BCD suivant les hauteurs de cette face. *Le pied* A' *de la hauteur* AA' *est donc l'orthocentre de la face opposée* BCD.

D'autre part on peut mener, par l'arête AB un *plan hauteur* perpendiculaire en F à l'arête opposée CD. Ce plan ABF contient les hauteurs AA' et BB' ainsi que la perpendiculaire commune EF à AB et CD. Ces trois droites AA', BB' et EF sont concourantes en un point H, orthocentre du triangle ABF. Or la hauteur CC', intersection des plans hauteurs CAA' et CBB' passe par H et il en est de même de la hauteur DD'.

Les quatre hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique sont concourantes en un point* H *appelé orthocentre du tétraèdre.

Ce point H appartient également aux trois perpendiculaires communes à deux arêtes opposées, ainsi qu'aux six plans hauteurs. Notons enfin, que le point A par exemple est l'orthocentre du tétraèdre HBCD.

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

• **84. Triangle rectangle.** — Dans un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH (fig. 88) on a les relations suivantes :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BH} \quad (1) \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad (2)$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH}.\overline{HC} \quad (3) \qquad AB.AC = BC.AH \quad (4)$$

$$\frac{1}{\overline{AH}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} \quad (5) \qquad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}. \quad (6)$$

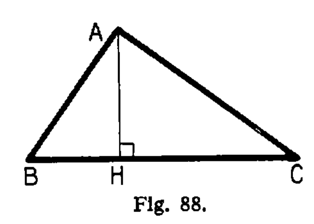


Fig. 88.

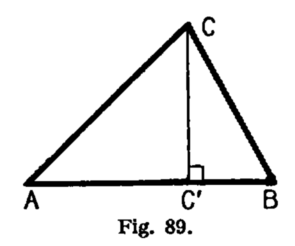


Fig. 89.

La relation (1) se déduit de l'égalité scalaire $\overline{BA}^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overline{BC}.\overline{BH}$ et la relation (3) de l'égalité $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ ou

$$(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0.$$

Les autres relations en sont des conséquences. Rappelons également que :

$$AC = BC \sin B = BC \cos C = AB \operatorname{tg} B = AB \operatorname{cotg} C.$$

• **85. Triangle quelconque.** — ***Dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.***

L'égalité scalaire : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ ou $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ (fig. 89) :

s'écrit :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A} \quad (1)$$

ou en désignant par C′ la projection de C sur AB :

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\,.\,\overline{AC'}} \quad (2)$$

On en déduit :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (3)$$

L'angle A est donc aigu, droit ou obtus suivant que $b^2 + c^2$ est supérieur, égal ou inférieur à a^2. La relation $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ donne alors en désignant par $2p$ le périmètre $a + b + c$ du triangle :

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (4)$$

● **86. Autres relations.** — On démontre directement que :

$h_a = b \sin C = c \sin B$ (5) $a = b \cos C + c \cos B = 2R \sin A$ (6)

et $$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} bc \sin A = p\,r = (p-a)\,r_a. \qquad (7)$$

On déduit de la relation (4) : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (8)

ainsi que : $$h_a = \frac{2S}{a}; \quad r = \frac{S}{p} \quad ; \quad r_a = \frac{S}{p-a}. \qquad (9)$$

puis : $bc = b.\,2R \sin C = 2R\,h_a$ et $abc = 2R.\,ah_a = 4\,RS$

d'où : $$R = \frac{abc}{4S}. \qquad (10)$$

Les relations (8), (9) et (10) permettent de calculer S, h_a, r, r_a, et R connaissant les trois côtés a, b, c du triangle.

● **87. Angle de deux cercles (ou de deux sphères).** — Désignons par d la distance OO′ des centres O et O′ de deux cercles (ou sphères) de rayons R et R′ ayant en commun le point A et par V l'angle OAO′ (fig. 90). D'après la formule (1) du nº 85 on a : $\overline{OO'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{O'A}^2 - 2OA.O'A \cos \widehat{OAO'}$.

ou $d^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos V$.

Soit :

$$\boxed{\cos V = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}}$$

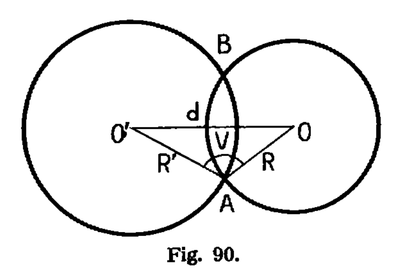


Fig. 90.

On voit que $\cos V = 0$ si les deux cercles sont orthogonaux, $\cos V = +1$ s'ils sont tangents intérieurement ($d = |R - R'|$) et $\cos V = -1$ s'ils sont tangents extérieurement ($d = R + R'$).

● **88. Théorèmes.** — 1º ***La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au double du carré de la médiane relative au troisième côté augmenté de la moitié du carré de ce troisième côté.***

2º ***La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au double produit du troisième côté par la projection sur ce côté de la médiane correspondante.***

Soient AH et AM la hauteur et la médiane issues de A dans le triangle ABC (fig. 91). Dans les triangles AMB et AMC on a (n° 85, 2) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 - 2\,\overline{MB}.\overline{MH}$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\,\overline{MC}.\overline{MH}$$

Compte tenu de $\overline{BM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, on obtient par addition :

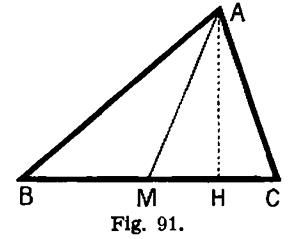


Fig. 91.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{1}{2}\overline{BC}^2. \qquad (1)$$

Et par différence : $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC}\cdot\overline{MH}.$ (2)

Ces relations se déduisent également des égalités scalaires :

$$\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 = \left(\vec{AM} - \frac{\vec{BC}}{2}\right)^2 + \left(\vec{AM} + \frac{\vec{BC}}{2}\right)^2 = 2\vec{AM}^2 + 2\frac{\vec{BC}^2}{4}.$$

$$\vec{AB}^2 - \vec{AC}^2 = (\vec{AB} - \vec{AC}).(\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{CB}.2\vec{AM} = 2\vec{BC}.\vec{MA} \qquad (3)$$

La relation (1) qui s'écrit : $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ donne

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad \text{soit} \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \qquad (4)$$

• **89. Applications.** — Soit AB un segment donné de milieu O et de longueur a. Désignons par H la projection sur la droite AB d'un point quelconque M. On a (fig. 92 et 93) :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MO}^2 + \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{AB}.\overline{OH}.$$

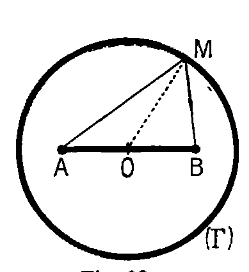


Fig. 92.

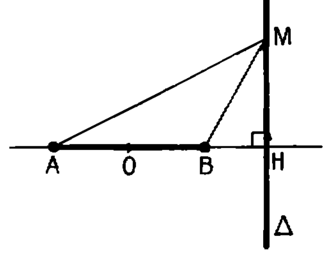


Fig. 93.

Pour qu'un point M satisfasse à la relation $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$ il faut et il suffit que : $2\overline{OM}^2 + \frac{a^2}{2} = k^2$ ou $\overline{OM}^2 = \frac{2k^2 - a^2}{4}.$

***Le lieu des points* M *tels que* $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k^2$ *est donc un cercle dans le plan (une sphère dans l'espace) dont le centre est le milieu de* AB (fig. 92).**

Pour que l'on ait $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k$ il faut et il suffit que $\overline{OH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$:

***Le lieu des points* M *tels que* $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k$ *est donc une droite dans le plan (un plan dans l'espace) perpendiculaire en* H *à* AB (fig. 93).**

• **90. Relation de Stewart.** — Soient trois points alignés A, B, C et un point quelconque M se projetant en H sur la droite AB (fig. 94). En éliminant CH entre les relations :

$$\begin{array}{l|l} \overline{MA}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\,\overline{CA}.\overline{CH} & \overline{BC} \\ \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{CB}.\overline{CH} & \overline{CA} \end{array}$$

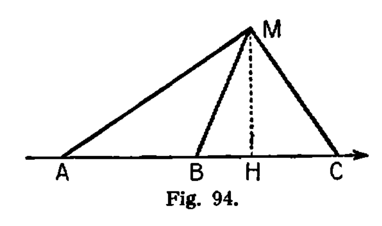


Fig. 94.

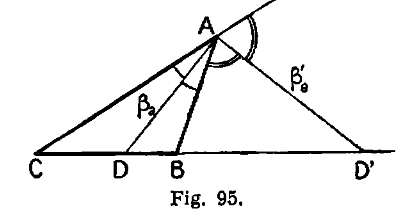


Fig. 95.

On obtient : $\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} = \overline{MC}^2\,(\overline{BC} + \overline{CA}) + \overline{BC}.\overline{CA}\,(\overline{CA} + \overline{BC})$

Soit : $\boxed{\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0.}$

• **91. Bissectrices d'un triangle.** — Les pieds D et D' des bissectrices de l'angle A du triangle ABC divisent le côté BC dans le rapport des côtés AB et AC (fig. 95). La relation $\overline{AB}^2.\overline{CD} + \overline{AC}^2.\overline{DB} + \overline{AD}^2.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DB}.\overline{BC} = 0$ donne alors compte tenu de : $\frac{\overline{CD}}{b} = \frac{\overline{DB}}{c} = \frac{a}{b+c}$

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}\,[(b+c)^2 - a^2].$$

Et avec D' on obtient de même : $\overline{AD'}^2 = \frac{bc}{(b-c)^2}\,[a^2 - (b-c)^2].$

• **92. Relation de Leibniz.** — Soit G le barycentre du système A (α), B (β), C (γ) et M un point quelconque. Les relations telles que :

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

donnent, compte tenu de $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0$:

$$\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 + \gamma\,\overline{MC}^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overline{MG}^2 + \alpha\,\overline{GA}^2 + \beta\,\overline{GB}^2 + \gamma\,\overline{GC}^2.$$

Il suffit de retenir que :

$$\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overline{MG}^2 + h.$$

La constante h est indépendante de M. On retrouve sa valeur en plaçant M en G.

• **93. Applications.** — 1° Pour qu'un point M satisfasse à la relation : $\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = k$, il faut et il suffit que : $\overline{MG}^2 = \dfrac{k-h}{\alpha+\beta+\gamma}$. Donc en supposant $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$:

***Le lieu des points** M **tels que** $\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = k$ **est un cercle du plan (une sphère dans l'espace) admettant pour centre le barycentre du système** A(α), B(β), C(γ).*

2° La relation $\dfrac{MA}{MB} = k$ équivaut à :
$\overline{MA}^2 - k^2\,\overline{MB}^2 = 0.$
Si k est différent de 1, le lieu des points du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ est donc (fig. 96) un cercle centré sur la droite AB au point ω tel que :
$\overline{\omega A} - k^2\,\overline{\omega B} = 0.$

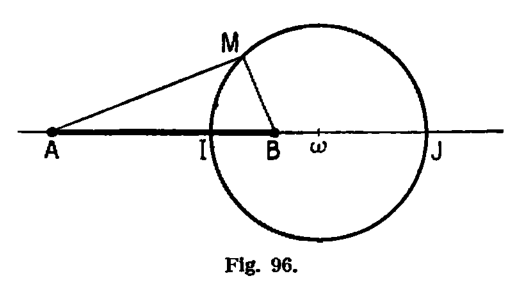


Fig. 96.

Ce cercle coupe la droite AB aux points I et J tels que $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{JA}{JB} = k$.

***Le lieu des points** M **du plan tels que** $\dfrac{MA}{MB} = k \neq 1$ **est donc le cercle admettant pour diamètre le segment joignant les deux points** I **et** J **qui divisent le vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **dans le rapport arithmétique** k.*

• **94. Théorème de Ménélaüs.** — ***Pour que les points** α, β, γ **pris respectivement sur les côtés** BC, CA **et** AB **d'un triangle** ABC, **soient alignés il faut et il suffit que l'on ait :***

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1. \qquad (1)$$

1° Supposons α, β, γ alignés sur une droite Δ (fig. 97). La parallèle à Δ menée par C coupe AB en D et d'après le théorème de Thalès dans les triangles BCD et ADC :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma D}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{\gamma D}}{\overline{\gamma A}}.$$

D'où : $$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma D}} \cdot \frac{\overline{\gamma D}}{\overline{\gamma A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

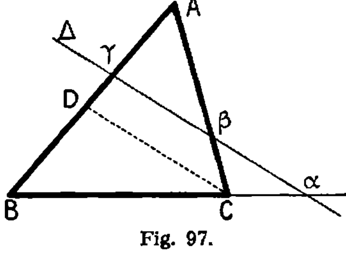


Fig. 97.

2° Supposons que les points α, β, γ vérifient la relation (1). La droite $\beta\gamma$ coupe BC en un point α' tel que :

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1. \qquad (2)$$

De ces relations il résulte que $\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ donc que α' est confondu avec α.

• **95. Applications.** — 1° La droite Δ qui coupe les côtés du triangle ABC en trois points α, β, γ distincts est dite *transversale* au triangle ABC.

Si on considère (fig. 98) les points α', β', γ' respectivement symétriques de α, β, γ, par rapport au milieu du côté correspondant, on a par exemple :

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}$$

et

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \cdot \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}} = 1.$$

Fig. 98.

Les points α', β', γ', sont alignés sur une droite Δ'. Les deux transversales Δ et Δ' *sont dites réciproques.*

2° Soient D', E' et F' les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

On a : $$\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'B}} \cdot \frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{BC} = 1.$$

Les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle sont alignés. Il en est de même des pieds des bissectrices intérieures de deux angles et de la bissectrice extérieure du troisième angle. Autrement dit :

Les pieds des bissectrices d'un triangle sont les sommets d'un quadrilatère complet.

• **96. Théorème de Céva.** — ***Pour que trois droites issues des trois sommets du triangle*** ABC ***soient concourantes, il faut et il suffit que leurs points d'intersections*** α, β, ***et*** γ, ***avec les côtés opposés vérifient la relation :***

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1. \qquad (1)$$

1° Supposons les droites Aα, Bβ, Cγ concourantes en M (fig. 99). Le théorème de Ménalaüs appliqué aux triangles AαC et ABα coupés par les transversales BβM et CMγ donne :

$$\frac{\overline{B\alpha}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{M\alpha}} = 1$$

et

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{C\alpha}} \cdot \frac{\overline{M\alpha}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

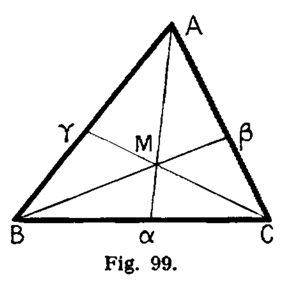


Fig. 99.

En faisant le produit membre à membre, on obtient après réduction :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1. \qquad (1)$$

2° Supposons que α, β, γ vérifient la relation (1) et soit M le point d'intersection de Bβ et Cγ. La droite AM coupe BC en α' tel que

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) il résulte que $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}$. Le point α est confondu avec α' et les trois droites Aα, Bβ, Cγ sont concourantes.

● **97. Applications.** — Le théorème de Céva permet de démontrer facilement que les médianes, les hauteurs, les bissectrices d'un triangle sont concourantes. Si α, β, γ sont les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC on a, en supposant les côtés orientés dans le sens ABC :

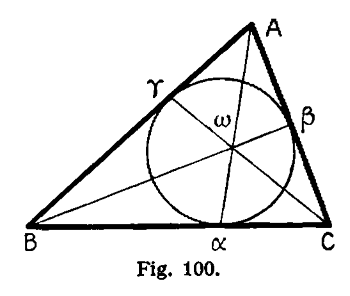


Fig. 100.

$$\overline{\beta A} = \overline{A\gamma} = p - a, \qquad \overline{\gamma B} = \overline{B\alpha} = p - b$$

et

$$\overline{\alpha C} = \overline{C\beta} = p - c.$$

La relation de Céva est vérifiée. Il en est de même si α', β' et γ' sont les points de contact du cercle ex-inscrit dans l'angle A car on a alors :

$$\overline{\beta' A} = \overline{A\gamma'} = p, \qquad \overline{B\gamma'} = \overline{B\alpha'} = p - c$$

et

$$\overline{\alpha' C} = \overline{\beta' C} = p - b.$$

Les droites joignant les sommets d'un triangle aux points de contact d'un cercle tangent aux trois côtés sont concourantes.

EXERCICES

● **44.** On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC et par A', B', C' les pieds des hauteurs :

1° Déduire de l'égalité $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ que $\overline{A'A}.\overline{A'H} = -\overline{A'B}.\overline{A'C}$;

2° Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ et démontrer que :

$$\overline{AH}.\overline{AA'} = \overline{AB}.\overline{AC'} = \overline{AC}.\overline{AB'}.$$

3° Démontrer de même que : $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$.

● **45.** 1° Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}[\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{DB}^2]$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que AC et BD soient rectangulaires.

2° Démontrer que pour que le quadrangle (ou tétraèdre) ABCD soit orthocentrique il faut et il suffit que l'on ait $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$.

● **46.** On considère trois points fixes alignés O, A, B et un point M variable sur la perpendiculaire en A à AB. Le cercle ABM recoupe OM en N :

1° Evaluer l'angle (NO, NB) et trouver le lieu du point N;

2° Comparer les produits $\overline{OA}.\overline{OB}$ et $\overline{OM}.\overline{ON}$ au produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM}$ et montrer que le produit $\overline{OM}.\overline{ON}$ est constant.

● **47.** 1° Soit G le barycentre du système A (α), B (β), C (γ). A partir de la relation $(\Sigma\ \alpha\ \overrightarrow{GA})^2 = 0$ et des relations telles que $2\,\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 - \overline{AB}^2$, démontrer que :

$$\alpha\,\overline{GA}^2 + \beta\,\overline{GB}^2 + \gamma\,\overline{GC}^2 = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}[\alpha\beta\,\overline{AB}^2 + \beta\gamma\,\overline{BC}^2 + \gamma\alpha\,\overline{CA}^2].$$

2° On désigne par I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et par J le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle A. Démontrer que :

$$a\,\overline{IA}^2 + b\,\overline{IB}^2 + c\,\overline{IC}^2 = a\,\overline{JA}^2 - b\,\overline{JB}^2 - c\,\overline{JC}^2 = abc.$$

● **48.** Soit H l'orthocentre du tétraèdre orthocentrique ABCD. La hauteur AH coupe en A' la face BCD et en K la sphère ABCD. La droite BA' coupe en E l'arête CD et en F la sphère ABCD. Enfin le cercle ABE coupe en L la hauteur AH :

1° Montrer que A' est le milieu de HL et que E est le milieu de A'F;

2° Dans le plan ABE montrer que les directions EL et FK sont toutes deux antiparallèles à AB par rapport à AK et BF, puis que $\overrightarrow{A'K} = -2\,\overrightarrow{A'H}$.

● **49.** Dans un triangle ABC, dont les angles sont aigus, on désigne par O le centre du cercle circonscrit et par H l'orthocentre :

1° Montrer que AH = 2 R cos A et que l'angle OAH est égal à $|B - C|$;

2° Calculer $\overline{OH}^2$ en fonction de R, A et B — C puis en déduire que :

$$\overline{OH}^2 = 9\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

● **50.** Une corde variable AB d'un cercle fixe O est vue du point fixe P sous un angle droit. On pose OA = R et OP = a et on désigne par M et H les projections de O et de P sur AB :

1° Calculer les deux sommes $\overline{MO}^2 + \overline{MP}^2$ et $\overline{HO}^2 + \overline{HP}^2$, puis le produit $\overline{OM}.\overline{PH}$;

2° Lieux géométriques des points M, H et S quatrième sommet du rectangle APBS.

● **51.** Deux cercles O et O' de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A et tangents en B et C à la droite BC :

1° Montrer que le cercle de diamètre BC est tangent en A à OO'. Calculer BC en fonction de R et R' ;

2° Calculer en fonction de R et R′ le rayon ρ du cercle ω inscrit dans le triangle mixtiligne ABC. Cas où $R = R'$;

3° Dans le cas $R > R'$, calculer de même le rayon ρ' du cercle ω' tangent aux cercles O et O′ et à la droite BC en un point D′ de son prolongement.

● **52.** Soient trois points B, A, C alignés dans cet ordre. D'un même côté de BC on construit les trois demi-cercles de diamètres AB, AC, BC de centres O, O′, ω et de rayons respectifs R, R′ et $R + R'$:

1° Calculer en fonction de R et R′ le rayon ρ du cercle I inscrit dans le triangle curviligne ABC limité par les trois demi-cercles. Cas où $R = R'$;

2° La perpendiculaire en A à BC coupe le demi-cercle de diamètre BC en D. On désigne par x et y les rayons des cercles J et K inscrits dans les triangles mixtilignes ABD et ACD. Calculer x et y en fonction de R et R′ et vérifier que les deux cercles J et K sont égaux.

● **53.** On considère trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

1° Une droite Δ coupe respectivement les droites OA, OB, OC en α, β et γ. Démontrer en utilisant la projection sur OA effectuée parallèlement à Δ que :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O\alpha}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{O\beta}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{O\gamma}} = 0 \qquad (1)$$

Étudier la réciproque.

2° On désigne par H la projection orthogonale de O sur Δ et par A′, B′ et C′ les projections de H sur OA, OB et OC. Comparer les produits tels que $\overline{O\alpha}.\overline{OA'}$ et en déduire que :

$$\overline{OA}\,.\,\overline{OA'} + \overline{OB}\,.\,\overline{OB'} + \overline{OC}\,.\,\overline{OC'} = 0 \qquad (2)$$

3° Démontrer directement la relation (2) à l'aide des produits scalaires tels que $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OH}$ et montrer que réciproquement, si cette relation est vérifiée les quatre points O, A′, B′, C′ sont cocycliques.

● **54.** Démontrer la relation de Céva $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ relative à un point M du plan du triangle ABC en considérant ce point comme le barycentre d'un système A(α), B(β), C(γ).

● **55.** Soit dans un triangle ABC deux transversales $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ telles que $\alpha\beta'$ soit parallèle à AB et $\alpha'\gamma$ parallèle à AC. Démontrer que $\beta\gamma'$ est parallèle à BC.

● **56.** On mène dans un triangle deux transversales quelconques $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, puis les transversales $\alpha\beta'\gamma''$, $\alpha'\beta''\gamma$ et $\alpha''\beta\gamma'$. Démontrer que α'',β'',γ'' sont alignés.

● **57.** Soient M et M′ deux points du cercle O circonscrit au triangle ABC, Δ et Δ' leurs droites de Simson.

1° Évaluer l'angle (Δ, Δ') en fonction de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

2° Si M et M′ sont diamétralement opposés, montrer que Δ et Δ' sont rectangulaires et transversales réciproques du triangle ABC.

● **58.** On considère un triangle OAA′; un point M sur la droite OA et un point M′ sur la droite OA′ varient de telle sorte que $\frac{\overline{MO}}{\overline{MA}} = k\,\frac{\overline{M'O}}{\overline{M'A'}}$ (k constante $\neq 1$).

1° Montrer que MM′ passe par un point fixe P, et que l'intersection N de AM et A′M décrit une droite fixe Δ coupant AA′ en Q et MM′ en R.

2° Comparer les rapports $\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}}$ et $\frac{\overline{QA}}{\overline{QA'}}$ ainsi que $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}}$ et $\frac{\overline{RM}}{\overline{RM'}}$.

● **59.** Etant donné un quadrilatère complet ABC A'B'C', on désigne par M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC et par I, J, K les milieux des diagonales AA', BB' et CC' du quadrilatère complet.

1° Montrer que I, N et P sont alignés et comparer les rapports $\frac{\overline{IP}}{\overline{IN}}$ et $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.

2° En déduire que les trois points I, J, K sont alignés. Comparer la direction de la droite IJK par rapport à la droite $A_1B_1C_1$ transversale réciproque de la droite A'B'C' par rapport au triangle ABC.

● **60.** Soient M, N, P, Q quatre points pris respectivement sur les côtés AB, BC, CD et DA du quadrilatère ABCD.

1° Démontrer que la relation $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$ est nécessaire et suffisante pour que les trois droites AC, MN et PQ soient concourantes ou parallèles et qu'il en est alors de même de BD, QM et PN.

2° Si le quadrilatère ABCD est gauche la condition précédente est nécessaire et suffisante pour que les quatre points MNPQ soient dans un même plan.

● **61.** On considère dans le plan deux triangles ABC et A'B'C' et soient α, β, γ les points de rencontre respectifs de BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B'.

1° Démontrer que si les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en O les points α, β, γ sont alignés sur une droite Δ et réciproquement *(triangles homologiques)*.

2° Établir que la condition $\frac{\overline{B\gamma}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{C\beta}}\cdot\frac{\overline{C'\beta}}{\overline{C'A'}}\cdot\frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'\gamma}} = 1$ est nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

62. Dans le triangle ABC les droites MA, MB, MC coupent respectivement les côtés BC, CA et AB en α', β', γ'. On mène les transversales $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma'$ et $\alpha'\beta'\gamma$ dans le triangle ABC.

1° Montrer que les trois droites $A\alpha'$, $B\beta$ et $C\gamma$ sont concourantes en N et que les points α, β, γ sont alignés sur une droite Δ *(polaire trilinéaire* de M par rapport au triangle ABC).

2° Réciproquement établir qu'à toute transversale Δ correspond ainsi un point M (pôle trilinéaire de Δ) et en donner une construction à la règle seulement.

● **63.** Les tangentes en A, B et C au cercle ABC coupent les côtés du triangle ABC en α, β et γ et forment un triangle A'B'C'.

1° Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en un point K puis que les points α, β, γ sont alignés sur une droite Δ.

2° Les droites AA', BB', CC' coupent les côtés du triangle ABC en α', β', γ'. Démontrer que α, β', γ' sont alignés et que Δ est la polaire trilinéaire de K par rapport à ABC (cf. exercice 62).

● **64.** 1° Soit α un point du côté BC du triangle ABC. Comparer les aires αAB et αAC et démontrer que : $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AC})}$. En déduire la forme trigonométrique suivante de la relation de Céva :

$$\frac{\sin(\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{B\beta}, \overrightarrow{BC})}{\sin(\overrightarrow{B\beta}, \overrightarrow{BA})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{C\gamma}, \overrightarrow{CA})}{\sin(\overrightarrow{C\gamma}, \overrightarrow{CB})} = -1.$$

2° Étant donné un point M du plan ABC, on construit la droite Ax antiparallèle à AM par rapport à AB et AC et les droites analogues By et Cz. Montrer que Ax, By et Cz sont concourantes en un point M'.

3° Les points M et M' sont dits *inverses* par rapport au triangle ABC. Montrer que l'orthocentre H et le centre O du cercle ABC sont inverses. Construire l'inverse K du centre de gravité G du triangle ABC (les droites AK, BK et CK sont appelées *symédianes* du triangle ABC et le point K centre des symédianes ou point de Lemoine).

● **65.** On désigne par A, B, C et D les projections d'un point variable M du plan sur les côtés EF, FG, GH et HE d'un rectangle donné EFGH. Les droites AB et CD se coupent en P et les droites AD et BC en Q.

1° Montrer que, quel que soit M, les points P et Q sont toujours situés sur deux droites fixes.

2° Comment faut-il placer M pour que les quatre cercles ABC, BCD, CDA et DAB soient égaux et distincts? (on montrera d'abord que MP et MQ sont perpendiculaires à EG et FH).

3° Trouver dans ces conditions les lieux des centres des cercles inscrits et exinscrits au triangle MPQ.

● **66.** On donne un triangle OAB dont les hauteurs OO′, AA′ et BB′ se coupent en H et un point variable M sur la droite Δ perpendiculaire en O au plan OAB.

1° Trouver les lieux des pieds P et Q des hauteurs AP et BQ et de l'orthocentre K du triangle ABM. Montrer que la droite PQ passe, en général par un point fixe R.

2° Démontrer que la droite HK coupe Δ en un point M′ et que M et M′ sont réciproques. Nature du tétraèdre ABMM′ et lieu du centre de la sphère ABMM′.

3° Soient P′ et Q′ les pieds des hauteurs du triangle ABM′. Montrer que PQ′ et P′Q passent par un même point fixe et que les quatre points P, Q, P′, Q′ sont cocycliques.

QUATRIÈME LEÇON

TRIÈDRES

• **98. Définition.** — ***On appelle trièdre la figure formée par trois demi-droites non coplanaires de même origine.***

Les trois demi-droites SA, SB et SC (fig. 101) sont les *arêtes* du trièdre S. ABC de *sommet* S. Les angles saillants tels que BSC sont les *faces* du trièdre et les dièdres saillants tels que (B, SA, C) les *dièdres* de ce trièdre. On dit que la face BSC = *a* est opposée au dièdre A d'arête SA. Un trièdre a six éléments : ses trois dièdres A, B, C et ses trois faces *a*, *b*, *c*.

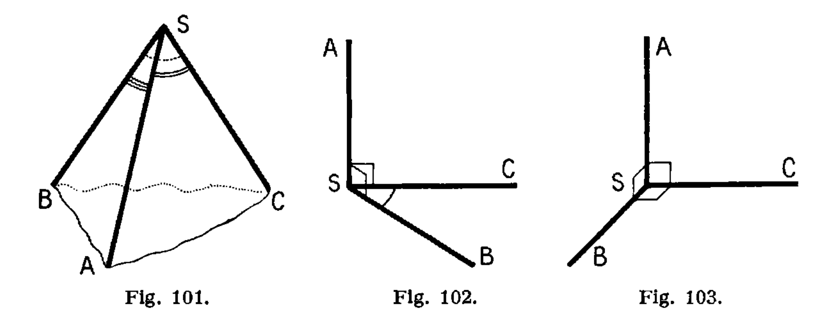


Fig. 101. Fig. 102. Fig. 103.

Un trièdre partage l'espace en deux régions l'une *intérieure*, l'autre *extérieure*, cette dernière étant celle qui contient les prolongements des arêtes.

Un trièdre est *isocèle* lorsqu'il a deux faces égales, *régulier* (ou équifacial) lorsque ses trois faces sont égales.

Lorsque l'arête SA est perpendiculaire au plan BSC (fig. 102), les deux faces ASB et ASC sont des angles droits et les dièdres d'arêtes SB et SC sont droits. Le trièdre isocèle SABC est dit *birectangle*.

Si de plus l'angle BSC est droit (fig. 103), les trois faces sont des angles droits et les trois dièdres sont droits. Le trièdre régulier SABC est dit *trirectangle*.

• **99. Angle polyèdre.** — ***On appelle angle polyèdre la figure formée par un nombre quelconque de demi-droites de même origine prises dans un ordre déterminé de telle sorte que trois consécutives d'entre elles ne soient pas coplanaires.***

L'origine S est le sommet de l'angle polyèdre S.ABCDE (fig. 104). Les demi-droites telles que SA sont les arêtes et les angles saillants tels que ASB sont les faces de cet angle polyèdre.

Un angle polyèdre est dit convexe lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces : on obtient un angle polyèdre convexe en joignant un point S, extérieur à un plan, aux différents sommets d'un polygone convexe ABCDE de ce plan (fig. 104).

Inversement tout angle polyèdre convexe peut être obtenu ainsi, car il est situé tout entier à l'intérieur de l'un des trièdres formés par les plans de trois quelconques de ses faces. Tout plan coupant les trois arêtes d'un tel trièdre, coupe toutes les arêtes de l'angle polyèdre suivant un polygone convexe.

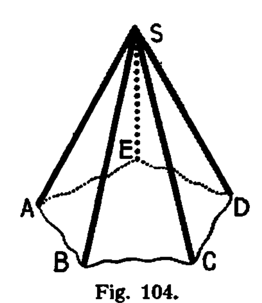


Fig. 104.

• 100. Trièdre orienté. — ***Un trièdre est orienté lorsque ses arêtes sont rangées dans un ordre déterminé.***

Dans le trièdre orienté SABC les arêtes sont, par définition, rangées dans l'ordre SA, SB, SC. On dit que le trièdre orienté SABC est de *sens direct* ou de *sens rétrograde* suivant que le dièdre saillant orienté (B, $\overrightarrow{SA}$, C) est lui-même de sens direct ou rétrograde (fig. 105).

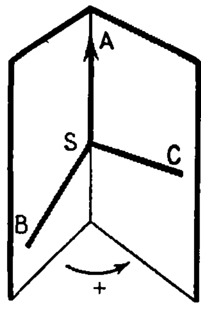


Fig. 105.

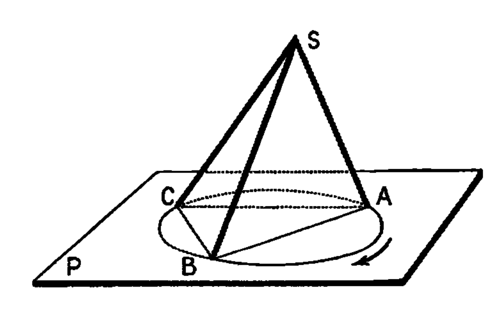


Fig. 106

Au sens du trièdre orienté S.ABC correspond un sens de rotation dans le plan ABC ou sur le cercle ABC (fig. 106). Pour un observateur placé en S et regardant le plan ABC, ce sens est celui des aiguilles d'une montre si le trièdre SABC est de sens direct, le sens inverse si le trièdre SABC est de sens rétrograde et réciproquement.

• 101. Propriétés. — 1° ***Le sens d'un trièdre orienté se conserve lorsqu'on permute circulairement ses trois arêtes.***

Les trois trièdres orientés S.ABC, S.BCA et S.CAB sont de même sens (fig. 106) car ils correspondent tous trois au même sens de rotation sur le cercle ABC.

2° ***On change le sens d'un trièdre lorsqu'on intervertit deux arêtes ou lorsqu'on remplace une arête par son prolongement.***

Les dièdres saillants orientés $(B, \overrightarrow{SA}, C)$ et $(C, \overrightarrow{SA}, B)$ étant de sens contraires (fig. 105) il en résulte que le trièdre S.ABC est de sens opposé à chacun des trois trièdres de même sens S.ACB, S.CBA et S.BAC.

Soit SA′ le prolongement de l'arête SA (fig. 112). Les dièdres saillants orientés $(B, \overrightarrow{SA}, C)$ et $(B, \overrightarrow{SA'}, C)$ étant de sens contraires il en est de même des trièdres S.ABC et S A′BC, donc de même des trièdres S.BCA et S.BCA′ ou S.CAB et S.CA′B. Il en résulte que :

Deux trièdres* S.ABC *et* S.A′B′C′ *opposés par le sommet sont de sens contraires.

On change en effet trois fois de sens en remplaçant dans le trièdre S.ABC, successivement chaque arête par son prolongement.

3° ***Le sens d'un trièdre se conserve lorsqu'une arête pivote autour du sommet sans franchir le plan de la face opposée.***

Si les arêtes SC et SC_1 sont d'un même côté du plan ASB, il est clair (fig. 107) que les dièdres saillants orientés $(B, \overrightarrow{SA}, C)$ et $(B, \overrightarrow{SA}, C_1)$ sont de même sens. Il en est donc de même des trièdres SABC et $SABC_1$.

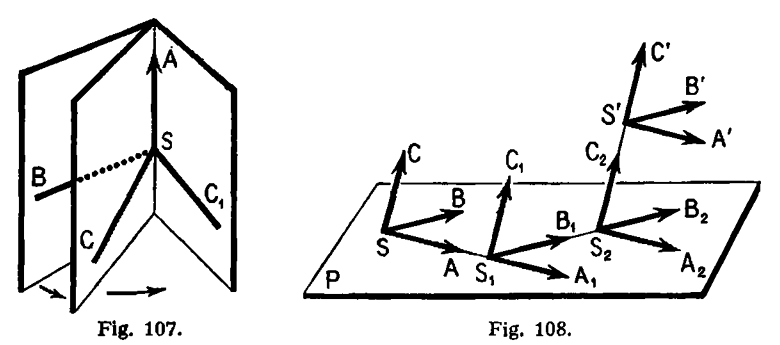


Fig. 107. Fig. 108.

● **102. Théorème.** — ***Lorsque deux trièdres ont leurs arêtes respectivement parallèles et de même sens, ces deux trièdres sont de même sens.***

Considérons deux trièdres S.ABC et S′.A′B′C′ dont les arêtes sont respectivement parallèles et de même sens (fig. 108). Soient S_1 l'intersection de la droite SA et du plan B′S′C′ et S_2 l'intersection du plan ASB et de la droite S′C′. Construisons deux trièdres intermédiaires $S_1.A_1B_1C_1$ et $S_2.A_2B_2C_2$ dont les arêtes sont respectivement parallèles à celles des deux premiers trièdres et de même sens. Les deux dièdres saillants orientés $(B, \overrightarrow{SA}, C)$ et $(B_1, \overrightarrow{S_1A_1}, C_1)$ étant confondus, les deux trièdres S.ABC et $S_1.A_1B_1C_1$ sont de même sens. On verrait de même que les trièdres $S_1.A_1B_1C_1$ et $S_2.A_2B_2C_2$ sont de même sens ainsi que les trièdres $S.A_2B_2C_2$ et S′.A′B′C′. Il en résulte que les trièdres S.ABC et S′.A′B′C′ sont de même sens.

● **103. Tétraèdre orienté.** — Un tétraèdre est orienté lorsque ses sommets sont rangés dans un ordre déterminé. Le sens du tétraèdre orienté ABCD (fig. 109) est par définition celui du trièdre orienté A.BCD, c'est-à-dire celui du

dièdre saillant orienté (C, $\overrightarrow{AB}$, D). On voit (n° 101) que le tétraèdre ABCD est de même sens que les tétraèdres ACDB et ADBC, mais de sens contraire aux tétraèdres BACD et ABDC. On en déduit qu'un tétraèdre orienté change de sens lorsqu'en échange deux de ses sommets.

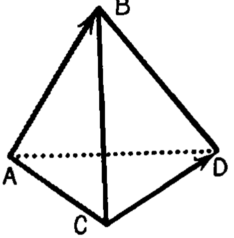


Fig. 109.

Les tétraèdres orientés ABCD et CDAB étant de même sens, il en est de même des dièdres saillants orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, D) et (A, $\overrightarrow{CD}$, B). Suivant que ce sens est le sens direct ou le sens rétrograde on dit que les deux vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de disposition directe ou rétrograde.

• **104. Triangle sphérique.** — Un trièdre Oxyz dont le sommet O est le centre d'une sphère découpe sur cette sphère trois arcs de grands cercles $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ (inférieurs à un demi-cercle) (fig. 110). Le triangle curviligne ABC est appelé **triangle sphérique.**

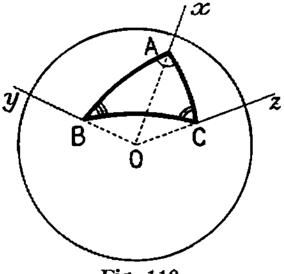


Fig. 110.

Les mesures a, b, c des côtés $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{AB}$ de ce triangle sont les mesures des faces du trièdre O.ABC tandis que les mesures A, B, C des angles de ce triangle sont les mesures des dièdres de ce trièdre.

La correspondance entre triangles sphériques et trièdres est analogue à celle des arcs de cercle et des angles au centre. En particulier le sens du triangle sphérique orienté ABC est, par définition, le sens du trièdre orienté OABC.

RELATIONS ENTRE LES FACES D'UN TRIÈDRE

• **105. Théorème I.** — ***Dans tout trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.***

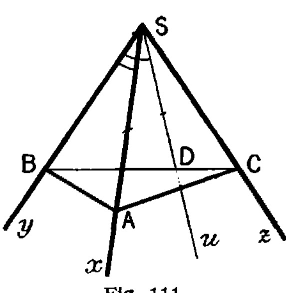


Fig. 111

Le théorème est évident pour toute face qui n'est pas supérieure à chacune des deux autres. Il suffit de le démontrer pour la plus grande face.

Soit un trièdre Sxyz (fig. 111) tel que $\widehat{ySz} > \widehat{zSx} \geqslant \widehat{xSy}$. Menons dans le plan ySz une demi-droite Su intérieure à l'angle ySz telle que l'on ait $\widehat{ySu} = \widehat{ySx}$. Puis marquons sur S$x$ et Su deux points A et D tels que SA = SD et par D menons, dans le plan ySz, une sécante coupant Sy en B et Sz en C.

Les triangles ASB et DSB ont des angles en S égaux, SA = SD et SB en commun. Ils sont égaux (2e cas) et BA = BD. Dans le triangle ABC on a :

$$AC > BC - BA = BC - BD = DC.$$

Donc : $$AC > DC.$$

Les triangles SCA et SCD ont SC en commun, SA = SD et AC > DC. Ces deux triangles ont donc des angles en S inégaux et tels que : $\widehat{ASC} > \widehat{DSC}$.

D'où : $$\widehat{ASC} > \widehat{BSC} - \widehat{BSD} = \widehat{BSC} - \widehat{BSA}.$$

C'est-à-dire :

$$\widehat{BSC} < \widehat{ASB} + \widehat{ASC} \quad \text{ou} \quad \widehat{ySz} < \widehat{xSy} + \widehat{xSz}.$$

• **106. Corollaire.** — ***Dans tout trièdre une face quelconque est plus grande que la différence des deux autres.***

Désignons par a, b, c les faces du trièdre SABC et supposons que l'on ait $a > b > c$. D'après le théorème précédent :

$$\boxed{a < b + c} \quad ; \quad \boxed{b < c + a} \quad \text{et} \quad \boxed{c < a + b}.$$

En retranchant c des deux membres de la seconde relation, puis c d'abord et b ensuite des deux membres de la première, on obtient :

$$\boxed{a > b - c} \quad ; \quad \boxed{b > a - c} \quad \text{et} \quad \boxed{c > a - b}.$$

• **107. Théorème II.** — ***La somme des trois faces d'un trièdre est inférieure à quatre droits***

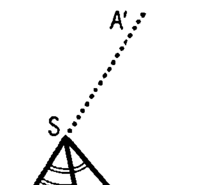


Fig. 112.

Soit SA' le prolongement de l'arête SA du trièdre SABC (fig. 112). Dans le trièdre SA'BC nous avons : $\widehat{BSC} < \widehat{A'SC} + \widehat{A'SB}$.

Or $\widehat{BSC}$ est la face a du trièdre SABC tandis que $\widehat{A'SC}$ et $\widehat{A'SB}$ sont les suppléments des faces b et c.

Donc :

$$a < 2^D - b + 2^D - c.$$

Soit :

$$\boxed{a + b + c < 4^D}.$$

• **108. Réciproque.** — ***Si trois angles ont une somme inférieure à quatre droits et si le plus grand d'entre eux est inférieur à la somme des deux autres, on peut construire un trièdre admettant ces angles pour faces.***

Soient a, b, c trois angles donnés tels que:

$$a + b + c < 4^D \qquad a \geqslant b \geqslant c \qquad \text{et} \qquad a < b + c.$$

Sur un cercle de centre S d'un plan P (fig. 113) construisons dans un sens donné les arcs consécutifs : $\widehat{DB} = c$, $\widehat{BC} = a$ et $\widehat{CG} = b$. Puisque $a + b + c < 4^{D}$ les quatre points D,B,C,G se succèdent dans cet ordre sur le cercle. Soient E le symétrique de D par rapport à SB et F le symétrique de G par rapport à SC. On a

$$\widehat{BE} = c \leqslant \widehat{BC}\ ;\ \widehat{FC} = b \leqslant \widehat{BC}$$

et

$$\widehat{BF} = \widehat{BC} - \widehat{FC} = a - b < \widehat{BE} = c.$$

Ces inégalités montrent que les points E et F appartiennent à l'arc BC et que F est situé sur l'arc BE. Les points F et G sont de part et d'autre de la corde DE qui coupe donc la corde GF en un point H intérieur au cercle S.

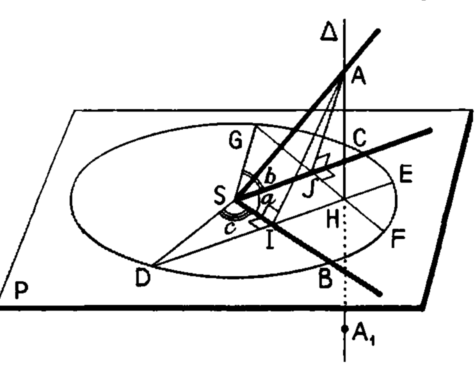


Fig. 113.

Menons la perpendiculaire Δ en H au plan P de ce cercle. Comme SH < SB, il existe sur Δ deux points A et A_1 tels que $SA = SA_1 = SB = SC$.

Or HD étant perpendiculaire en I à la droite SB il en est de même de AI et les triangles rectangles SAI et SDI ayant un côté commun SI et l'hypoténuse égale sont égaux. Donc :

$$\widehat{ASI} = \widehat{DSI}$$

soit, quelle que soit la valeur de c : $\widehat{ASB} = \widehat{BSD} = c$.

On démontrerait de même que : $\widehat{ASC} = \widehat{CSG} = b$. Comme $\widehat{BSC} = a$ le trièdre SABC a ses trois faces respectivement égales à a, b, c.

En particulier on peut toujours construire un trièdre régulier connaissant la mesure comprise entre 0 et $\frac{4^{D}}{3}$ de l'une de ses faces.

• 109. Théorème. — *La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à quatre droits.*

Soit un angle polyèdre convexe de sommet S (fig. 114) coupé par un plan P suivant le polygone convexe de n cotés ABCDEF. Appliquons à chacun des trièdres tels que A.SBF la relation du (n° 105). On obtient :

$$\widehat{FAB} < \widehat{SAB} + \widehat{SAF}$$
$$\widehat{ABC} < \widehat{SBA} + \widehat{SBC}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\widehat{EFA} < \widehat{SFE} + \widehat{SFA}.$$

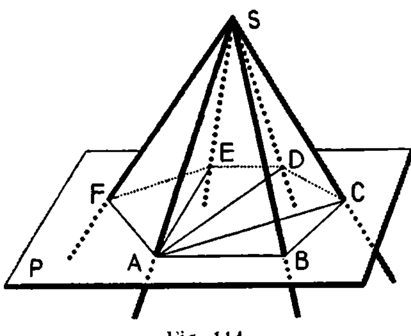


Fig. 114.

Additionnons membre à membre ces n relations. La somme des premiers membres est la

somme des angles intérieurs du polygone convexe ABCDE soit $(2n - 4)$ *droits*. La somme des seconds membres est la somme des angles à la base des triangles de sommet S tels que SAB. Cette somme est égale à la somme de tous les angles de ces n triangles soit $2n$ *droits*, diminuée de la somme Σ des angles de sommet S, c'est-à-dire de la somme des faces de l'angle polyèdre.

Donc : $(2n - 4)$ *droits* $< 2n$ *droits* $- \Sigma$.

D'où : $\Sigma < 4^{D}$.

TRIÈDRES SUPPLÉMENTAIRES

● **110. Théorème préliminaire.** — ***Pour que deux demi-droites issues d'un point d'un plan et dont l'une est perpendiculaire à ce plan et l'autre oblique, soient d'un même côté de ce plan il faut et il suffit que leur angle soit aigu.***

Soient (fig. 115) une perpendiculaire OA au plan P, une oblique OM et la projection OH de la demi-droite OM sur le plan P.

1° Si OA et OM sont d'un même côté du plan P, la demi-droite OM est intérieure à l'angle droit AOH et l'angle AOM est aigu.

2° Si l'angle AOM est aigu, la demi-droite OM est intérieure à l'angle droit AOH. Les demi-droites OA et OM sont d'un même côté du plan P.

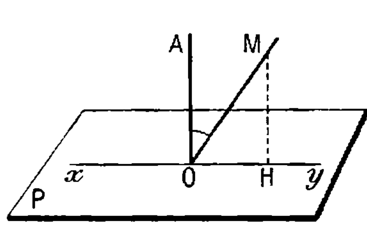


Fig 115.

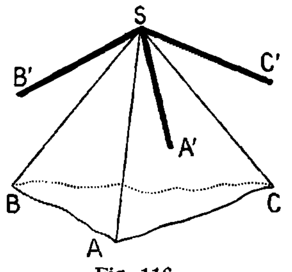


Fig. 116.

● **111. Définition.** — Etant donné un trièdre SABC (fig. 116). Construisons les trois demi-droites SA', SB' et SC' telles que l'on ait :

1° SA' perpendiculaire au plan BSC et du même côté que SA;
2° SB' perpendiculaire au plan CSA et du même côté que SB;
3° SC' perpendiculaire au plan ASB et du même côté que SC.

Les trois plans BSC, CSA et ASB étant distincts il en est de même des trois demi-droites SA', SB' et SC'. D'autre part ces trois demi-droites ne sont pas coplanaires car si elles étaient situées dans un même plan P les trois plans BSC, CSA et ASB contiendraient tous les trois la perpendiculaire en S au plan P et ne seraient pas les plans des faces d'un trièdre :

Les trois demi-droites SA', SB', SC' sont donc les arêtes d'un trièdre SA'B'C' appelé *trièdre supplémentaire* du trièdre SABC.

• **112. Réciprocité.** — ***Si le trièdre*** SA'B'C' ***est le trièdre supplémentaire du trièdre*** SABC ***le trièdre*** SABC ***est le trièdre supplémentaire du trièdre*** SA'B'C'.

Montrons, par exemple, que SA est perpendiculaire au plan B'SC' et du même côté que SA'. Les deux plans ASB et ASC, respectivement perpendiculaires à SC' et SB', sont perpendiculaires au plan B'SC'. Leur intersection SA est donc perpendiculaire au plan B'SC'. D'autre part les demi-droites SA et SA' étant d'un même côté du plan BSC perpendiculaire à SA', l'angle ASA' est aigu, ce qui est suffisant pour que les demi-droites SA et SA' soient d'un même côté du plan B'SC' perpendiculaire à SA.

Les deux trièdres SABC *et* SA'B'C' *sont dits supplémentaires.*

• **113. Théorème fondamental.** — ***Lorsque deux trièdres sont supplémentaires, chaque face de l'un est le supplément du drièdre correspondant de l'autre.***

Montrons, par exemple, que le dièdre A du trièdre SABC est le supplément de la face B'SC' = *a'* du trièdre supplémentaire SA'B'C'.

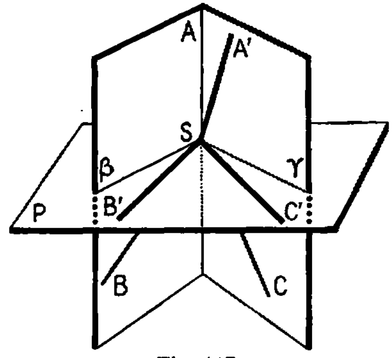


Fig. 117.

Le plan P de la face B'SC' (fig. 117), perpendiculaire en S à SA, coupe le dièdre (B, SA, C) suivant le rectiligne βSγ de ce dièdre. La demi-droite SB' perpendiculaire au plan ASC du même côté que la demi-droite SB est, dans le plan P, perpendiculaire à Sγ du même côté que Sβ. De même, dans ce plan, SC' est perpendiculaire à Sβ du même côté que Sγ.

Lorsque l'angle βSγ est obtus (fig. 118) l'angle B'SC' est aigu et situé à l'intérieur de l'angle βSγ. Au contraire (fig. 119) lorsque l'angle βSγ est aigu il est situé à l'intérieur de l'angle obtus B'SC'. Les deux angles βSγ et C'SB' qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et qui sont l'un aigu, l'autre obtus, sont supplémentaires.

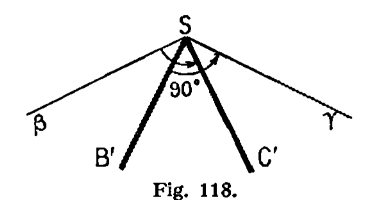


Fig. 118.

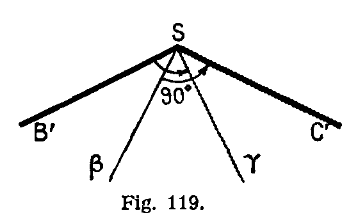


Fig. 119.

Remarquons que les deux angles saillants $(\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC'})$ et $(\overrightarrow{S\beta}, \overrightarrow{S\gamma})$ sont dans les deux cas de même sens, ce sens étant celui de l'un ou l'autre des angles droits $(\overrightarrow{S\beta}, \overrightarrow{SC'})$ ou $(\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{S\gamma})$.

En désignant par A, B, C, a, b, c les éléments du trièdre SABC et par A', B', C', a', b', c' les éléments du trièdre SA'B'C' on obtient les relations :

$$A + a' = 2^D \qquad B + b' = 2^D \qquad C + c' = 2^D.$$
$$A' + a = 2^D \qquad B' + b = 2^D \qquad C' + c = 2^D.$$

• **114. Théorème.** — ***Deux trièdres supplémentaires sont de même sens.***

Les trièdres S.ABC et S.Aβγ (fig. 117) ont le même sens, celui du dièdre orienté $(B, \overrightarrow{SA}, C)$. Nous avons vu que dans le plan SB'C' les deux angles βSγ et B'SC' étaient de même sens, il en est donc de même des trièdres S.Aβγ et S.AB'C'. Or SA et SA' étant du même côté du plan B'SC' les trièdres S.AB'C' et S.A'B'C' sont de même sens (n° 101, 3°). On voit donc que le sens du trièdre S.A'B'C' est le même que celui du trièdre S.ABC.

RELATIONS ENTRE LES DIÈDRES D'UN TRIÈDRE

• **115. Théorème I.** — ***Dans tout trièdre chaque dièdre augmenté de deux droits est supérieur à la somme des deux autres.***

Dans le trièdre SA'B'C' supplémentaire du trièdre SABC on a la relation :

$$a' < b' + c'.$$

Ce qui donne, d'après les relations du (n° 113) pour le trièdre SABC

$$2^D - A < (2^D - B) + (2^D - C).$$

Soit en réduisant : $\qquad B + C < A + 2^D.$

• **116. Théorème II.** — ***Dans tout trièdre la somme des dièdres est comprise entre deux droits et six droits.***

On a de même, dans le trièdre SA'B'C' :

$$0 < a' + b' + c' < 4^D.$$

Donc : $\qquad 0 < 2^D - A + 2^D - B + 2^D - C < 4^D.$

Soit en réduisant : $\qquad 2^D < A + B + C < 6^D.$

On pourra remarquer que la somme des dièdres du trièdre SABC, se rapproche de 6^D lorsque S vient se confondre avec un point du plan ABC intérieur au triangle ABC. Au contraire elle tend vers 2^D si S vient se confondre avec un point extérieur au triangle ABC, ou encore si S s'éloigne indéfiniment.

• **117. Corollaire.** — ***La somme des dièdres d'un angle polyèdre conxeve de n faces est comprise entre $(2n - 4)^D$ et $2n^D$.***

On peut décomposer la région intérieure de l'angle polyèdre convexe SABCDEF (fig. 114) par les plans SAC, SAD, SAE en $(n - 2)$ trièdres. La somme des dièdres de ces $(n - 2)$ trièdres, est égale à la somme Σ des dièdres de l'angle polyèdre. Cette dernière est donc supérieure à $(n - 2)$ fois 2^D. Elle est évidemment inférieure à $2n^D$ car c'est la somme de n dièdres saillants.

D'où : $\qquad (2n - 4)^D < \Sigma < 2n^D.$

● **118. Remarque.** — Les théorèmes (n° 115 et 116) qui se déduisent de théorèmes relatifs au trièdre supplémentaire sont dits *corrélatifs* de ces derniers.

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIÈDRES

● **119.** 1er **Cas.** — ***Lorsque deux trièdres de même sens ont un dièdre égal compris entre deux faces respectivement égales, ils sont égaux.***

Considérons deux trièdres de même sens SABC et S'A'B'C' tels que

$$A = A'; \quad b = b' \quad \text{et} \quad c = c'.$$

Transportons le dièdre $(B', \overrightarrow{SA'}, C')$ sur son égal $(B, \overrightarrow{SA}, C)$ de façon que la demi-droite S'A' coïncide avec la demi-droite SA. Dans le demi-plan SAB, l'angle A'S'B' se superpose à son égal ASB, tandis que dans le demi-plan SAC, l'angle A'S'C' se superpose à son égal ASC. Les deux trièdres SABC et S'A'B'C' coïncident. Ils sont égaux.

● **120.** 2e **Cas.** — ***Lorsque deux trièdres de même sens ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux, ils sont égaux.***

Soient deux trièdres de même sens S.ABC et S.A'B'C' tels que :

$$a = a', \quad B = B' \quad \text{et} \quad C = C'.$$

Leurs trièdres supplémentaires $SA_1B_1C_1$ et $S'A'_1B'_1C'_1$ sont également de même sens et ont (n° 113) : $A_1 = A'_1$, $b_1 = b'_1$ et $c_1 = c'_1$.

Ils sont donc égaux d'après le 1er cas et leur superposition entraîne celle des trièdres initiaux SABC et SA'B'C' qui sont donc égaux.

● **121.** 3e **Cas.** — ***Lorsque deux trièdres de même sens ont leurs trois faces respectivement égales ils sont égaux.***

Considérons deux trièdres de même sens SABC et SA'B'C' tels que :

$$a = a', \ b = b' \text{ et } c = c'.$$

Portons sur les six arêtes des longueurs égales : SA = SB = SC = SA' = SB' = SC'. Les triangles tels que BSC et B'S'C' sont égaux (2e cas) et on a : BC = B'C', CA = C'A' et AB = A'B'. Il en résulte que les triangles ABC et A'B'C' sont égaux (3e cas).

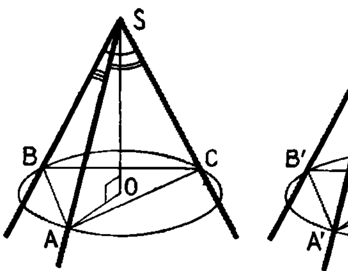


Fig. 120.

Soit O la projection de S sur le plan ABC et O' la projection de S' sur le plan A'B'C'. L'égalité des obliques issues de S et de S' montre que O est le centre du cercle ABC et O' le centre du cercle égal A'B'C'. Donc OA = O'A', et puisque SA = S'A', les triangles SOA et S'O'A' sont égaux, d'où OS = O'S'.

Transportons le tétraèdre S'A'B'C' sur le tétraèdre SABC de façon à amener le triangle A'B'C' sur son égal ABC. Le point O' se place en O et le point S' sur la droite OS, du même côté du plan ABC que le point S, car les deux trièdres SABC et S'A'B'C' sont de même sens. L'égalité O'S' = OS montre que le point S' vient en S. Les deux trièdres S'A'B'C' et SABC coïncident. Ils sont donc égaux.

● **122. 4e Cas.** — ***Lorsque deux trièdres de même sens ont leurs trois dièdres respectivement égaux, ils sont égaux.***

Si les trièdres de même sens SABC et S'A'B'C' sont tels que : A = A', B = B' et C = C'. leurs trièdres supplémentaires $SA_1B_1C_1$ et $S'A'_1B'_1C'_1$ sont de même sens et ont leurs trois faces respectivement égales. Ils sont égaux (3e cas) et leur superposition entraîne celle des trièdres SABC et SA'B'C'.

● **123. Cas de symétrie.** — Tout trièdre S'A'B'C' superposable au trièdre $SA_1B_1C_1$ opposé par le sommet au trièdre SABC est dit *symétrique* du trièdre SABC. Deux trièdres symétriques ont leurs éléments homologues respectivement égaux, mais sont de sens contraires. Ils ne sont donc pas superposables par éléments homologues.

A chacun des cas d'égalité précédents correspond un cas de symétrie lorsquc les trièdres envisagés sont de sens contraires.

APPLICATIONS

● **124. Théorème.** — ***Dans tout trièdre isocèle les dièdres opposés aux faces égales sont égaux.***

Soit un trièdre isocèle SABC tel que b = c et le trièdre SA'B'C' qui lui est opposé par le sommet. Des égalités A = A', $b = c = b' = c'$ on déduit que les trièdres de même sens SABC et SA'C'B' sont égaux (1er cas). Le dièdre C' opposé par l'arête au dièdre C est donc égal au dièdre B. Autrement dit : B = C.

● **125. Réciproque.** — ***Un trièdre qui a deux dièdres égaux est isocèle.***

Si B = C le trièdre SABC et le trièdre SA'C'B' ont cette fois :

$$a = a' ; B = C = B' = C'.$$

Ils sont égaux (2e cas) et la face c' opposée par le sommet à la face c est égale à la face b. Donc $b = c$.

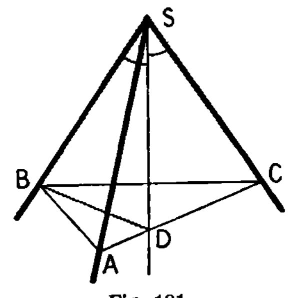


Fig. 121.

● **126. Corollaire.** — ***Dans tout trièdre les faces sont dans le même ordre de grandeur que les dièdres qui leurs sont opposés.***

Soit un trièdre SABC dans lequel B > C (fig. 121). A l'intérieur du dièdre (C,SB,A) construisons un dièdre (C,SB, x) égal au dièdre (B,SC,A). Le demi-plan SBx coupe la face SAC suivant SD et le trièdre SDBC est isocèle, donc $\widehat{DSB} = \widehat{DSC}$. Or dans le trièdre SABD on a :

$$\widehat{ASB} < \widehat{ASD} + \widehat{DSB} = \widehat{ASD} + \widehat{DSC} = \widehat{ASC}.$$

Donc

$$\widehat{ASB} < \widehat{ASC} \quad \text{soit} \quad b > c.$$

SUJETS D'EXAMEN

— Dans un trièdre une face est inférieure à la somme des deux autres. (*Aix*, ME et MT.)

— Trièdre : inégalités entre les faces. (*Rennes*, ME et MT.)

— Trièdres supplémentaires : on se bornera à donner la définition et à établir la réciprocité. (*Liban*, ME.)

— Trièdres supplémentaires : réciprocité et propriété fondamentale. (*Saïgon*, ME.)

EXERCICES

● **67.** 1° Lorsqu'un trièdre isocèle SABC a pour faces égales ASB et ASC, le bissecteur intérieur du dièdre SA est perpendiculaire à la face BSC (plan hauteur) et coupe cette face suivant sa bissectrice intérieure (plan médian).

2° Montrer que lorsque dans un trièdre un plan hauteur est en même temps bissecteur intérieur ou plan médian, ce trièdre est isocèle.

3° Pour qu'un trièdre soit isocèle il faut et il suffit qu'une de ses arêtes soit perpendiculaire à la bissectrice extérieure de la face opposée.

● **68.** Déduire de l'exercice précédent que :

1° Pour qu'un plan fasse des angles égaux avec deux plans donnés il faut et il suffit qu'il soit perpendiculaire à l'un de leurs bissecteurs.

2° Pour qu'une droite fasse des angles égaux avec deux plans donnés il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à un de leurs bissecteurs.

● **69.** 1° Pour qu'une droite de l'espace fasse des angles égaux avec les côtés d'un angle, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à l'une des bissectrices de cet angle.

2° Pour qu'un plan fasse des angles égaux avec les côtés d'un angle, il faut et il suffit qu'il soit parallèle à l'une des bissectrices de cet angle.

● **70.** 1° Démontrer que si dans un trièdre SABC les faces ASB et ASC sont supplémentaires il en est de même des dièdres SB et SC et réciproquement.

2° Montrer que dans ce cas l'arête SA est perpendiculaire à la bissectrice intérieure SM de la face BSC et que le bissecteur intérieur du dièdre SA passe par SM.

● **71.** Dans un trièdre SABC le bissecteur intérieur du dièdre SA passe par la bissectrice intérieure SM de la face BSC et on suppose que B, C, H et K soient les projections de M sur les droites SB, SC et sur les plans ASB et ASC.

1° Démontrer que le plan BSC fait des angles égaux avec les deux plans ASB et ASC. En déduire que les dièdres SB et SC du trièdre SABC sont égaux ou supplémentaires.

2° Démontrer que l'arête SA est perpendiculaire à l'une des bissectrices SM et SM′ de l'angle BSC et que le bissecteur extérieur du dièdre SA contient la bissectrice extérieure SM′.

● **72.** 1° Démontrer que si dans un trièdre SABC l'angle BSC est droit ainsi que le dièdre SA, le trièdre est birectangle.

2° Dans un trièdre SABC, la face BSC est fixe et le dièdre SA est droit. Déterminer le lieu de la trace de SA sur un plan fixe perpendiculaire à SB ou à SC.

● **73.** 1° Dans tout trièdre SABC, les *bissecteurs intérieurs* des trois dièdres se coupent suivant une même droite SI également inclinée sur les trois faces. Montrer que SI est le lieu des centres des sphères inscrites et aussi l'axe d'un cône de révolution inscrit dans le trièdre.

2° Les perpendiculaires menées en S à chaque arête dans le plan bissecteur extérieur issu de cette arête sont dans un même plan perpendiculaire à SI.

3° Étudier de même l'intersection des bissecteurs extérieurs de deux dièdres et du bissecteur intérieur du troisième (on se ramène au 1° en remplaçant une arête par son prolongement).

● **74.** 1° Dans un trièdre quelconque SABC les *plans médiateurs*, perpendiculaires à chacune des faces suivant la bissectrice intérieure de cette face concourent suivant une même droite $S\omega$ également inclinée sur les trois arêtes. Montrer que $S\omega$ est le lieu des centres des sphères tangentes au trois arêtes et aussi l'axe d'un cône de révolution circonscrit au trièdre.

2° Montrer que les bissectrices extérieures des trois faces sont dans un même plan également incliné sur les trois arêtes et perpendiculaire à $S\omega$. Démontrer la propriété analogue pour les bissectrices intérieures de deux faces et la bissectrice extérieure de la troisième.

● **75.** Dans le trièdre SABC on suppose SA = SB = SC et soit G le centre de gravité du triangle ABC.
1° Montrer que les *plans médians* menés respectivement par chaque arête et la bissectrice intérieure de la face opposée concourent suivant la droite SG et que les bissectrices extérieures des trois faces sont dans un plan parallèle au plan ABC.
3° Établir, pour le trièdre SABC, les conclusions résultant des propriétés analogues dans le trièdre SA'BC obtenu en remplaçant l'arête SA par son prolongement.

● **76.** Dans le trièdre SABC on mène les droites AB et AC respectivement orthogonales aux arêtes SC et SB et on désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.
1° Montrer que les trois *plans hauteurs* menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée se coupent suivant la droite SH.
2° Les trois droites menées par S, dans le plan de chaque face, perpendiculairement à l'arête opposée sont dans un même plan perpendiculaire à SH.
3° Soient D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC. Montrer que SH est également inclinée sur les plans des faces du trièdre SDEF et qu'il en est de même de SA, SB et SC. En déduire que les plans BSC et ASD sont les plans bissecteurs du dièdre SD du trièdre SDEF.

● **77.** Soient deux trièdres supplémentaires SABC et SA'B'C'.
1° Montrer que les trois plans ASA', BSB' et CSC' sont concourants suivant une droite SH.
2° Les trois droites communes à deux faces correspondantes telles que BSC et B'SC' sont dans un même plan P perpendiculaire à SH.
3° On suppose les points A, B, C, A', B', C' dans un même plan perpendiculaire en H à SH. Montrer que les trois droites AA', BB' et CC' concourent en H et que les deux triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés respectivement parallèles.

● **78.** 1° Démontrer que la droite SI commune aux bissecteurs intérieurs du trièdre SABC (ex. n° 73) est confondue avec la droite Sω' commune aux plans médiateurs du trièdre supplémentaire S A'B'C' (ex. n° 74).
2° En déduire que le cône de révolution inscrit dans le trièdre SABC a même axe que le cône de révolution circonscrit au trièdre SA'B'C'. Montrer que toute génératrice de l'un de ces cônes est perpendiculaire à un plan tangent de l'autre et réciproquement.

● **79.** Soit SK une droite intérieure issue du sommet du trièdre SABC. Les plans ASK, BSK et CSK coupent les faces du trièdre suivant Sα, Sβ et Sγ.
1° Montrer que les plans βSγ, γSα et αSβ coupent respectivement les faces BSC, CSA et ASB suivant trois droites Sα', Sβ' et Sγ' situées dans un même plan P.
2° Que représente le point K pour le triangle ABC lorsqu'on suppose les points A, B, C, K dans un plan parallèle à P.
3° Montrer que les trois plans ASα, BSβ' et CSγ' sont concourants. Donner une construction de la droite SK connaissant le plan P.

● **80.** 1° Toute face d'un angle polyèdre convexe est inférieure à la somme des autres.
2° Lorsqu'un angle polyèdre convexe est situé à l'intérieur d'un angle polyèdre convexe de même sommet la somme des faces du premier est inférieure à la somme des faces du second.

● **81.** 1° Dans tout angle polyèdre convexe de n faces un dièdre intérieur augmenté de $(2n - 4)$ droits est supérieur à la somme des autres dièdres intérieurs et un dièdre extérieur est inférieur à la somme des autres dièdres extérieurs.
2° La somme de deux dièdres intérieurs est supérieure à la somme des dièdres extérieurs non adjacents et la somme de tous les dièdres extérieurs est inférieure à 4 droits.
3° La somme des dièdres extérieurs d'un angle polyèdre convexe est inférieure à la somme des dièdres extérieurs de tout angle polyèdre convexe de même sommet situé à l'intérieur du premier.

● **82.** On considère dans un trièdre SABC, une droite SM du bissecteur intérieur du dièdre d'arête SA et une droite SP du bissecteur extérieur du même dièdre. Démontrer que :
1° La différence des angles BSM et CSM est inférieure à la différence des faces ASB et ASC;

2° La somme des angles BSP et CSP est supérieure à la somme des faces ASB et ASC.

● **83**. Soit SM une droite intérieure au trièdre SABC.

1° Montrer que la somme des angles BSM et CSM est inférieure à la somme des faces ASB et ASC.

2° Comparer la somme des trois angles ASM, BSM et CSM à la demi-somme et à la somme des trois faces du trièdre.

● **84**. 1° On considère un polygone gauche de n côtés ABC... KL. Démontrer que la somme des n angles saillants de ce polygone est inférieure à $(2n - 4)$ droits.

2° Si la somme des angles saillants d'un polygone de n côtés est égale à $(2n - 4)$ droits ce polygone est un polygone plan convexe.

85. 1° L'angle aigu formé par l'arête SA et la bissectrice SM de la face BSC du trièdre SABC est inférieur à la demi-somme des faces ASB et ASC ainsi qu'au supplément de cette demi-somme.

2° L'angle aigu formé par SA et la bissectrice extérieure SM' de la face BSC est inférieur au complément de la demi-différence des faces ASB et ASC.

● **86**. Dans le trièdre OABC, on suppose OA = OB = OC = R et on désigne par H la projection de O sur le plan ABC, et par B' et C' les projections de B et C sur OA.

1° Calculer OH en fonction des éléments A, B, C, a, b, c du trièdre et en déduire que :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

2° Établir l'égalité scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{C'C}$ et en déduire que:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

3° En utilisant le trièdre supplémentaire du trièdre OABC montrer que :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

● **87**. Soient AA', BB' et CC' trois diamètres d'une sphère de centre O et de rayon R. On désigne par A, B, C les mesures en radians des angles du triangle sphérique ABC et soient P et P' les pôles sur la sphère des cercles ABC et A'B'C'.

1° Montrer que les triangles sphériques PAB et P'B'A' sont égaux et en déduire l'égalité des aires des triangles symétriques ABC et A'B'C'.

2° On désigne par S, S_1, S_2, S_3, les aires des triangles sphériques ABC, A'BC, AB'C et ABC'. Démontrer que : $S + S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi R^2$, $S + S_1 = 2AR^2$, $S + S_2 = 2BR^2$ et $S + S_3 = 2CR^2$ et en déduire que :

$$S = (A + B + C - \pi) R^2.$$

● **88**. Soit un trièdre trirectangle SABC tel que SA = a, SB = b et SC = c. On désigne dans le triangle ABC, par H, G, O, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit.

1° Montrer que H est la projection de S sur le plan ABC et que :

$$\frac{1}{\overline{SH}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2° Établir que la droite SG passe par le centre ω de la sphère SABC et que $\overrightarrow{SG} = 2\overrightarrow{G\omega}$ (on pourra terminer le parallélépipède construit sur SA, SB et SC comme arêtes).

3° La droite SH recoupe la sphère SABC en K et soit R le rayon du cercle ABC. Montrer que $\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{SH}$ et $R^2 = \overline{OH}^2 + 2\overline{HS}^2$.

● **89**. 1° Dans les deux faces d'un dièdre on considère deux points B et C qui se projettent orthogonalement sur l'arête en B_1 et C_1. Calculer $\overline{BC}^2$ en fonction de l'angle A du dièdre et des longueurs $B_1B = \beta$, $C_1C = \gamma$, $B_1C_1 = h$.

2° On considère un trièdre SABC. On désigne par A, B, C les dièdres d'arêtes SA, SB, SC, et par a, b, c les faces opposées à ces arêtes.

α) Sur SB et SC on porte les longueurs SB $= x$ et SC $= y$. Calculer BC en utilisant la formule établie au 1°. En comparant avec une autre expression de $\overline{BC}^2$ au moyen d'une formule relative au triangle SBC, donner l'expression de $\cos a$ en fonction de b, c et A.

β) Calculer $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$ en fonction de a, b, c. (On pourra poser $a + b + c = 2p$).

(Clermont.)

● **90.** Soit un trièdre $Oxyz$ dont les arêtes sont deux à deux rectangulaires. On prend OA $= a$ sur Ox, OB $= b$ sur Oy, OC $= c$ sur Oz. Soient H le point de concours des hauteurs du triangle ABC, G le point de concours de ses médianes, S la surface, et A,B,C, ses angles.

1° Calculer en fonction de a, b, c, la surface S, les distances $h =$ OH et $g =$ OG les tangentes des angles A,B,C. On vérifiera que :

$$a^2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} b^2 B = \operatorname{tg} c^2 C = 2\,S.$$

2° Trouver les lieux des points G et H quand B et C varient, A restant fixe.

3° On considère un second triangle A'B'C' analogue à ABC, défini par $a \times a' = b \times b' = c \times c' = k^2$ où k est une longueur donnée (OA' $= a'$, OB' $= b'$, OC' $= c'$).

On appelle G' et H' les points G et H correspondants à ce triangle. Démontrer que les points O,G',H sont en ligne droite, ainsi que O,H,G'.

Calculer les produits : OH . OG' et OG . OH'. [On pose OG' $= g'$, OH' $= h'$].

4° On considère la sphère circonscrite au tétraèdre OABC et la calotte sphérique contenant le point O limitée par cette sphère et par le plan ABC. Calculer la surface Σ de cette calotte en fonction de g et h. Si l'on appelle Σ' la surface analogue correspondant à A', B', C', calculer $\frac{\Sigma'}{\Sigma}$ en fonction de $\frac{h'}{h}$.

(Bordeaux.)

2e PARTIE

TRANSFORMATIONS

CINQUIÈME LEÇON

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

• **127. Définitions.** — D'une façon générale, transformer une figure donnée F, c'est en déduire, suivant une loi déterminée, une nouvelle figure F'.

Nous étudierons seulement des *transformations ponctuelles*, dans lesquelles à chaque point M de l'espace (ou du plan) on fait correspondre un point unique M' appelé *transformé* ou *homologue* du point M. Lorsque dans une transformation ponctuelle (T), un point variable M décrit une figure F, son transformé M' décrit une figure F', appelée *transformée* de la figure F dans cette transformation.

Les transformations constituent un procédé remarquable de recherche ou de démonstration, car dans toute transformation (T) :

1° *La figure* F *et sa transformée* F' *ont leurs éléments liés par des relations de position et de grandeur bien déterminées;*

2° *A toute propriété de la figure* F, *correspond une propriété de la figure homologue* F', parfois difficile à mettre en évidence directement.

• **128. Eléments invariants.** — Tout point A, qui coïncide avec son homologue A', dans une transformation ponctuelle (T), se nomme *point double* ou *point invariant* de la transformation.

La transformation ponctuelle dans laquelle tout point de l'espace (ou du plan) est invariant est appelée *transformation identique.*

Toute figure F qui coïncide avec sa transformée F' est dite invariante dans la transformation considérée. La figure F est *invariante point par point* lorsque chacun de ses points est invariant, ou *globalement invariante* lorsque ses différents points s'échangent entre eux.

• **129. Produit de deux transformations.** — Soit F_1 l'homologue de la figure F dans la transformation (T_1) et F_2 l'homologue de F_1 dans la transforma-

tion (T_2). La figure F_2 se déduit de la figure F dans une transformation unique (T) appelée *produit des transformations* T_1 *et* T_2 *prises dans cet ordre.* On écrit

$$(T) = (T_1 \times T_2).$$

Une figure donnée F n'a pas, en général, même transformée dans les deux transformations ($T_1 \times T_2$) et ($T_2 \times T_1$). Lorsque ces deux transformations sont équivalentes, le produit ($T_1 \times T_2$) est dit *commutatif* et on écrit, dans ce cas :

$$(T_1 \times T_2) = (T_2 \times T_1).$$

Le produit ($T_1 \times T_2 \times \dots T_n$) des transformations T_1, T_2,... T_n, prises dans cet ordre, s'obtient en faisant le produit de (T_1) par (T_2), puis le produit de la transformation obtenue par (T_3) et ainsi de suite. Il est clair, que dans un produit de transformations, on peut toujours remplacer deux ou plusieurs transformations consécutives par leur produit, ou inversement remplacer une transformation par un produit équivalent :

Si $$T_2 \times T_3 = T$$

on a : $$T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_4 = T_1 \times T \times T_4.$$

• **130. Transformations inverses.** — Deux transformations (T) et (T') sont dites *inverses* lorsque leur produit (T × T') ou (T' × T) est la transformation identique. Si, par exemple, la transformation ponctuelle (T) transforme le point M en M', la transformation inverse (T') transforme M' en M.

Lorsque la transformation (T') est la transformation (T) elle-même, cette dernière est dite *réciproque.* Dans toute transformation ponctuelle réciproque deux points homologues M et M' se transforment l'un en l'autre. D'autre part il est clair que le produit de toute transformation réciproque par elle-même est la transformation identique.

DÉPLACEMENTS PLANS

• **131. Définition.** — Considérons deux figures superposables F et F' d'un plan P. Si on peut amener la figure F sur la figure F' en faisant glisser le plan P sur lui-même, les figures F et F' sont dites *directement égales dans le plan* P (fig. 123). Dans le cas contraire elles sont dites *inversement égales.*

Notons que dans deux figures F et F' directement égales du plan, deux segments homologues sont égaux et deux angles orientés homologues sont égaux.

• **132. Déplacement plan.** — ***On appelle déplacement plan toute transformation qui, à une figure quelconque* F *du plan, fait correspondre une figure* F' *directement égale à la première.***

Un déplacement plan peut être défini, *indépendamment de toute notion de mouvement*, de la façon suivante :

Considérons dans le plan P deux segments fixes égaux AB et A'B' et un point quelconque M (fig. 123). Construisons le point M' tel que :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \quad \text{et} \quad A'M' = AM. \qquad (1)$$

Le triangle A'B'M' est directement égal au triangle ABM. Il en résulte que lorsque M décrit une figure quelconque F du plan P le point M' décrit une figure F' directement égale à la figure F et dans laquelle les points A' et B' sont respectivement les homologues de A et B. En effet si on fait glisser le plan P sur lui-même de façon à amener A' en A et B' en B, tout point M de la figure F coïncide avec son homologue M' de la figure F'.

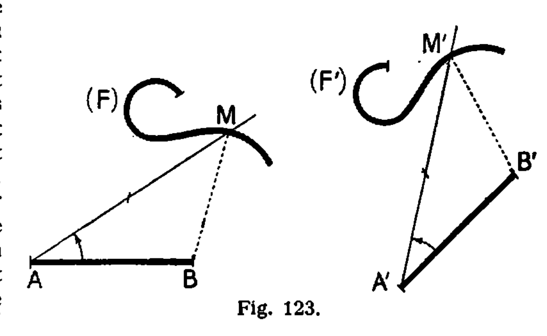


Fig. 123.

• **133. Corollaires.** — 1° ***Un déplacement plan est déterminé lorsque l'on connaît un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***et son transformé de même module*** $\overrightarrow{A'B'}$.

Remarquons qu'il suffit même de connaître la demi-droite Ax et sa transformée $A'x'$.

2° ***Un déplacement plan ne peut posséder plus d'un point double sans se réduire à la transformation identique.***

En effet si A est en A' et B en B', tout point M coïncide avec son homologue M'. Donc :

Deux figures planes directement égales F et F' coïncident lorsque deux points de l'une coïncident avec leurs homologues de la seconde.

3° Connaissant AB = A'B' on peut également construire l'homologue M_1 d'un point quelconque M non situé sur la droite AB à l'aide des relations :

$$(A'B', A'M') = (AB, AM) \quad \text{et} \quad (B'A', B'M') = (BA, BM). \qquad (2)$$

Ces relations (2) sont donc, ainsi que les relations (1) du paragraphe (n° 132) suffisantes pour que les triangles ABM et A'B'M' soient directement égaux.

• **134. Théorème.** — ***Dans tout déplacement plan un vecteur donné fait avec son homologue un angle constant appelé angle du déplacement.***

Soit $\overrightarrow{M'N'}$ l'homologue d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{MN}$ dans le déplacement défini par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son homologue de même module $\overrightarrow{A'B'}$. D'après la définition du déplacement :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) \text{ donc (n° 42) : } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}).$$

L'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ défini à $2k\pi$ près peut toujours être supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

TRANSLATION PLANE

• **135. Définition.** — ***La translation plane est une transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur joignant un point* M *à son transformé* M′ *est égal à un vecteur donné* $\vec{T}$ *du plan.***

Soit $\vec{T}$ le vecteur fixe non nul du plan (fig. 124). Le point M′ transformé du point M dans la translation de vecteur $\vec{T}$ est défini par : $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$.

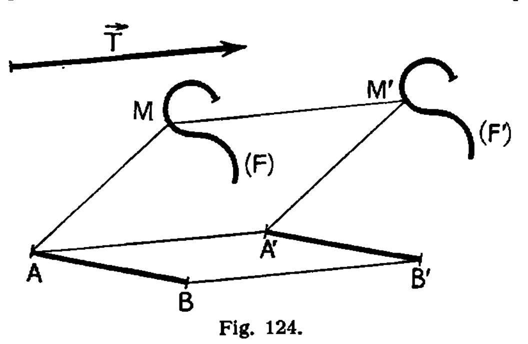


Fig. 124.

Lorsque M décrit une figure F, le point M′ décrit la figure F′ transformée de F dans la translation $\vec{T}$. Ce vecteur $\vec{T}$ qui définit la translation est appelé *vecteur-translation*. Remarquons que :

1° Il n'existe pas de point double dans la translation de vecteur $\vec{T} \neq 0$.

2° Toute droite du plan parallèle au vecteur $\vec{T}$ est globalement invariante dans la translation $\vec{T}$.

3° Si M′ est le transformé de M dans la translation $\vec{T}$, le point M est le transformé de M′ dans la translation de vecteur $-\vec{T}$. La translation plane n'est pas une transformation réciproque.

• **136. Théorème.** — ***La translation plane est un déplacement plan d'angle nul.***

1° Soient A et B deux points fixes, M un point quelconque du plan, A′, B′ et M′ leurs homologues respectifs dans la translation $\vec{T}$ (fig. 124). Par définition :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{T}.$$

Donc (n° 2) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

Les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ ont leurs côtés parallèles et de même sens, on a donc : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$.

Cette égalité jointe à AM = A′M′ montre (n° 132) que le point M′ est l'homologue du point M dans le déplacement défini par les segments égaux AB et A′B′.

2° Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ de ce déplacement est égal à zéro.

• **137. Réciproque.** — ***Toute tranformation ponctuelle plane dans laquelle le vecteur qui joint deux points quelconques est égal au vecteur qui joint leurs tranformés est une translation.***

Soit A un point fixe, M un point variable, A′ et M′ leurs homologues dans la transformation considérée. Par hypothèse :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}.$$

Donc (nº 2) : $$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}.$$

Le point M′ est donc le transformé de M dans la translation $\overrightarrow{AA'}$. Par suite :

• **138. Corollaire.** — ***Tout déplacement plan d'angle nul est une translation.***

En effet un tel déplacement réalise $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ quels que soient A et M.

• **139. Transformées des figures élémentaires.** — 1º La translation étant un déplacement d'angle nul transforme un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur égal $\overrightarrow{A'B'}$, une demi-droite Ax en une demi-droite parallèle et de même sens $A'x'$, une droite D en une droite D′ de même direction, un angle orienté en un angle orienté égal, un cercle en un cercle égal.

2º Inversement toute droite D′ parallèle à la droite D se déduit de cette dernière dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ joignant un point quelconque A de D à un point quelconque A′ de D′ (fig. 125).

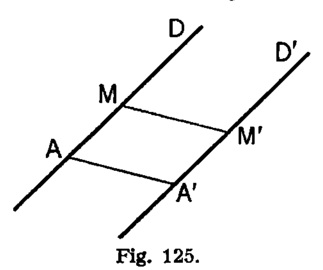


Fig. 125.

3º ***Tout cercle de centre ω′ égal à un cercle de centre ω se déduit de ce dernier dans la translation de vecteur*** $\overrightarrow{\omega\omega'}$.

En effet deux rayons parallèles et de même sens ωM et ω′M′ sont tels que $\overrightarrow{\omega'M'} = \overrightarrow{\omega M}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\omega\omega'}$.

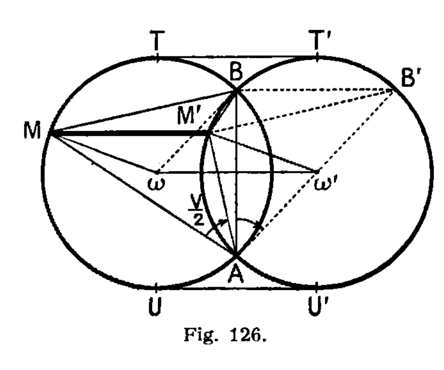


Fig. 126.

Si les deux cercles ω et ω′ se coupent en A et B (fig. 126), l'homologue B′ du point B dans la translation $\overrightarrow{\omega\omega'}$, est diamétralement opposé au point A sur le cercle ω′. La droite BM parallèle à B′M′ est donc perpendiculaire à AM′. De même AM est perpendiculaire à BM′ et le *quadrangle* ABMM′ *est orthocentrique.*

D'autre part l'égalité

$(\overrightarrow{\omega'B'}, \overrightarrow{\omega'M'}) = (\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega M})$ entraîne (AB′, AM′) = (AB, AM) et par suite:

$(AM, AM') = (AB, AB') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$.

En désignant par V la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$ on voit que :

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ *est vu du point* A *sous un angle de droites constant égal à* $\frac{V}{2}$.

Les tangentes communes TT' et UU' sont des positions particulières de MM'. Si les points A,B,T,U, sont disposés dans cet ordre sur le cercle ω, on en déduit que :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = \frac{V}{2} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AU}, \overrightarrow{AU'}) = \frac{V}{2} - \pi.$$

• **140. Théorème.** — ***Le produit des translations de vecteurs*** $T_1, T_2, \ldots T_n$ ***est la translation de vecteur*** $\vec{T} = \vec{T_1} + \vec{T_2} + \ldots + \vec{T_n}$.

Désignons par M_1 le transformé de M dans la translation $\vec{T_1}$, par M_2 le transformé de M_1 dans la translation $\vec{T_2}$, etc... Par hypothèse :

$\overrightarrow{MM_1} = \vec{T_1}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{T_2}$; .... $\overrightarrow{M_{n-1}M_n} = T_n$. Donc :

$$\overrightarrow{MM_n} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \vec{T_1} + \vec{T_2} + \cdots + \vec{T_n} = \vec{T}.$$

Le point M_n transformé de M dans le produit des translations considérées se déduit donc du point M dans la translation unique $\vec{T}$.

• **141. Corollaires.** — 1° L'addition des vecteurs $\vec{T_1}, \vec{T_2} \ldots \vec{T_n}$ étant commutative et associative, il en est de même du produit des translations définies par ces vecteurs.

2° Toute translation de vecteur $\vec{T}$ peut, réciproquement, se décomposer en un produit de translations de vecteurs $\vec{T_1}, \vec{T_2} \ldots \vec{T_n}$ dont la somme est égale au vecteur $\vec{T}$.

ROTATION PLANE

• **142. Définition.** — Soit un point fixe O du plan et un angle orienté θ défini à $2k\pi$ près. A tout point M du plan (fig. 127) faisons correspondre le point M' défini par les égalités :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad OM' = OM.$$

Le point M' ***est le transformé du point*** M ***dans la rotation plane de centre*** O ***et d'angle*** θ. En abrégé : *Rotation* (O, θ).

Lorsque le point M décrit une figure F, son homologue M' décrit la figure F' transformée de F dans cette rotation.

1° Si θ est nul (à $2k\pi$ près) la rotation se réduit à la transformation identique. Lorsque θ est différent de $2k\pi$ *le centre de rotation* O *est le seul point double de la transformation* et tout cercle de centre O est globalement invariant dans la transformation;

2° Si $\theta = \pm \pi$ le centre de rotation O est le milieu de MM' (fig. 128). Les points M et M' sont symétriques par rapport O. Nous dirons dans ce cas que la rotation est la ***symétrie-point de centre*** O.

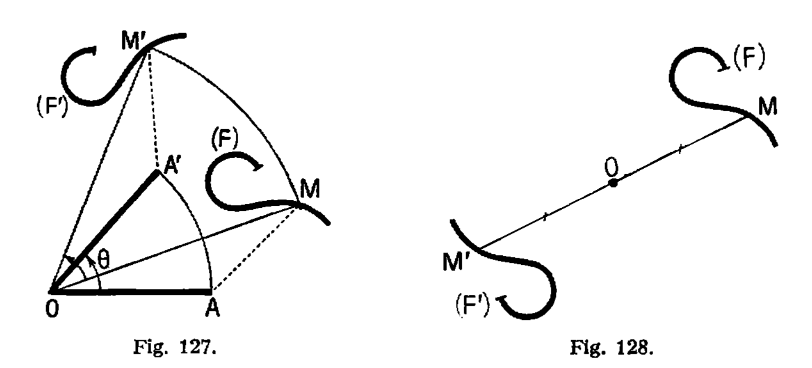


Fig. 127. Fig. 128.

3° Le point M est le transformé de M' dans la rotation (O, $-\theta$). La rotation n'est pas une transformation réciproque sauf si $\theta = \pm \pi$, c'est-à-dire si la rotation est une symétrie-point.

• **143. Théorème.** — ***La rotation plane est un déplacement plan dont l'angle est égal à l'angle de rotation.***

Soient O et A deux points fixes, M un point quelconque du plan (fig. 127). Leurs homologues respectifs dans la rotation (O, θ) sont O, A' et M'. Donc :

$$OA = OA'; \quad OM = OM'; \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi.$$

On en déduit (n° 42) que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$. Cette égalité jointe à : $OM = OM'$ montre (n° 132) que M' est le transformé de M dans le déplacement défini par les vecteurs de même module $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.

L'angle de ce déplacement est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$, c'est-à-dire l'angle de rotation.
Il en résulte que la rotation transforme une droite en une droite, un segment en un segment égal, un angle orienté en un angle orienté égal, un cercle en un cercle égal, etc...

• **144. Corollaire I.** — ***Dans toute symétrie-point deux vecteurs homologues sont opposés.***

En effet (fig. 129) on a :

$$AM = A'M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \pi \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}.$$

Réciproquement si $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$ le quadrilatère AMA'M' est un parallélogramme. Donc M et M' sont symétriques par rapport au milieu O de AA'.

Pour qu'une transformation ponctuelle soit une symétrie-point il faut et il suffit que le vecteur joignant deux points quelconques et le vecteur joignant leurs transformés soient opposés.

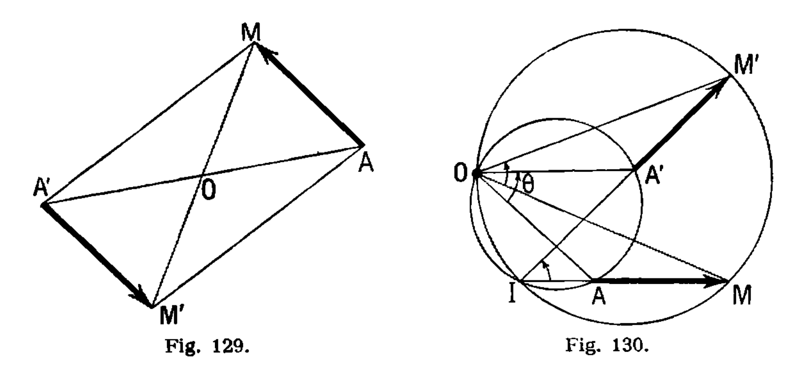


Fig. 129. Fig. 130.

● **145. Corollaire II.** — ***Dans toute rotation, distincte d'une symétrie-point, le centre de rotation, deux points homologues et l'intersection de deux droites homologues issues de ces deux points sont sur un même cercle.***

Soit I l'intersection de deux droites homologues AM et A'M' dans la rotation (O, θ) (fig. 130). L'égalité $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}) = \theta + 2k\pi$ entraîne :

$$(OA, OA') = (IA, IA') = \theta + k\pi.$$

Les quatre points O, A, A' et I sont cocycliques (n° 60) et il en est de même de O, M, M' et I.

● **146. Théorème.** — ***Tout déplacement plan est une rotation lorsque l'angle du déplacement n'est pas nul, une translation dans le cas contraire.***

Nous avons déjà démontré (n° 138) qu'un déplacement plan d'angle nul est une translation.

Considérons un déplacement d'angle $\theta \neq 2k\pi$ transformant le point fixe A et le point quelconque M en A' et M' (fig. 131). Par hypothèse :

$$AM = A'M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}) = \theta.$$

Il existe une rotation unique d'angle θ transformant A en A'. Son centre O, défini par les égalités $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = \theta$ et $OA = OA'$, appartient à l'arc de cercle d'extrémités A et A', capable de l'angle de vecteurs θ (n° 58) et à la médiatrice du segment AA'. C'est donc le milieu de l'arc AA'. La rotation (O, θ) transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA'}$. Comme $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}) = \theta$ on a :
$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'M'})$. Cette égalité jointe à $AM = A'M'$ montre que M' est l'homologue de M dans le déplacement qui transforme $\overrightarrow{AO}$ en $\overrightarrow{A'O}$ c'est-à-dire, la rotation (O, θ).

Si $\theta = \pm \pi$ l'arc capable AA' se réduit au segment AA' (n° 58, 1°) et le point O est le milieu du segment AA'. La rotation (O, θ) est alors la symétrie-point O.

Ce théorème montre que :

1° *Il n'y a pas de déplacement-plan autre que la rotation et la translation;*

2° *Deux figures directement égales du plan se correspondent en général dans une rotation, éventuellement dans une translation.*

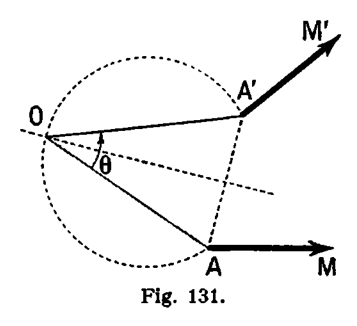


Fig. 131.

• **147. Corollaire.** — ***Tout déplacement qui admet un point double O est une rotation de centre O.***

D'apres ce qui précède, seule une rotation de centre O, admet le point O comme point double.

On voit d'ailleurs directement que si M et M' sont homologues dans le déplacement défini par les segments homologues égaux OA et OA', on a (n° 132):

$$OA = OA'; \quad OM = OM'; \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$$

donc $$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta.$$

La rotation (O, θ) qui transforme A en A', transforme donc tout point M en son homologue M' dans le déplacement considéré.

• **148. Propriétés du centre de rotation.** — Soit $\overrightarrow{A'M'}$ l'homologue de $\overrightarrow{AM}$ dans la rotation (O, θ). Désignons par I l'intersection des droites homologues AM et A'M' :

1° Les égalités telles que OA = OA', OM = OM', etc... montrent que :

Les médiatrices des segments joignant deux points homologues concourent au centre de rotation :

2° Les égalités telles que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi$ montrent que :

Les arcs capables de l'angle de vecteurs θ ayant pour extrémités deux points homologues concourent au centre de rotation et ont ce point pour milieu.

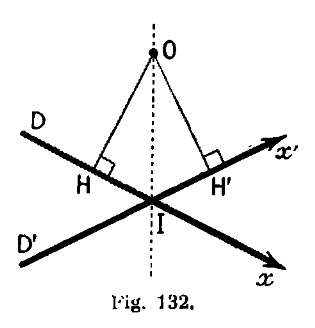


Fig. 132.

On sait que les cercles OAA' et OMM' passent par I (n° 145). Le point O est donc le second point commun aux cercles IAA' et IMM'.

3° Les projections H et H' de O sur les droites AM et A'M' sont homologues dans la rotation. L'égalité OH = OH' montre (fig. 132) que O appartient à la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IH'})$ et par suite à la bissectrice extérieure des axes homologues $\overrightarrow{Hx}$ et $\overrightarrow{H'x'}$:

La bissectrice extérieure de l'angle de deux axes homologues passe par le centre de rotation.

• **149. Applications.** — 1° La rotation transforme une droite D en une droite D′ telle que (D, D′) soit égal à l'angle de rotation à $k\pi$ près. Inversement, deux droites D et D′ d'un même plan se correspondent dans toute rotation ayant pour centre un point O équidistant de D et D′ et pour angle $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'})$ où H et H′ désignent les projections de O sur les droites D et D′ (fig. 132).

2° La rotation transforme un cercle en un cercle égal. Réciproquement, deux cercles égaux d'un même plan se correspondent dans toute rotation qui fait correspondre leurs centres.

En particulier deux cercles égaux de centres ω et ω', sécants en A et B (fig. 133) se correspondent dans la rotation de centre A, d'angle $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$. L'égalité $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M}) = (\overrightarrow{\omega' A}, \overrightarrow{\omega' M'})$ entraîne celle des angles (BA, BM) et (BA, BM′), ce qui prouve que MM′ passe par B :

Deux cercles sécants égaux se correspondent dans une rotation ayant pour centre l'un des points communs et la droite qui joint deux points homologues passe par le second point commun.

Les deux cercles étant orientés dans le même sens, notons que l'angle $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'})$ des tangentes orientées en A, est égal à l'angle de rotation $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = V$.

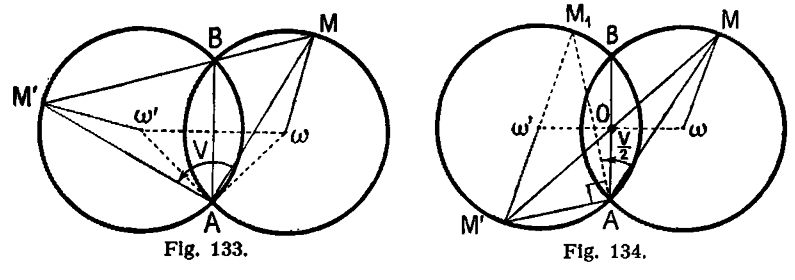


Fig. 133. Fig. 134.

Deux cercles égaux ω et ω' se correspondent également dans la symétrie par rapport au milieu O *de* $\omega\omega'$. Les rayons homologues $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega' M'}$ sont opposés (fig. 134). Si les cercles se coupent en A et si M_1 est diamétralement opposé à M′, on a

(n° 139) : $(AM, AM') = (AM, AM_1) + (AM_1, AM') = \frac{V}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + V}{2}$.

• **150. Théorème.** — ***Le produit de deux déplacements plans*** D_1 ***et*** D_2 ***d'angles respectifs*** α_1 ***et*** α_2 ***est un déplacement plan*** D ***d'angle*** $\alpha_1 + \alpha_2$.

Le déplacement D_1 transforme la figure F en F_1 et le déplacement D_2 transforme F_1 en F_2. Les figures F et F_2 directement égales à F_1 sont directement égales entre elles et se correspondent dans un déplacement D. Désignons par $\overrightarrow{A_1B_1}$ le transformé de $\overrightarrow{AB}$ dans le déplacement D_1 et par $\overrightarrow{A_2B_2}$ le transformé de $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans le déplacement D_2. On a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Le déplacement D a pour angle $\alpha_1 + \alpha_2$. C'est donc (n° 146) une translation si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ou $2k\pi$, une rotation dans le cas contraire.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 = \pm\pi$ on obtient une symétrie-point.

Ainsi le produit de deux rotations d'angles opposés (O_1, α) et $(O_2, -\alpha)$ est une translation, le produit de deux rotations d'anglés droits de même sens est une symétrie-point, etc... En particulier :

Le produit des symétries-points de centre O_1 et O_2 est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

En effet si M_1 est le symétrique d'un point quelconque M par rapport à O_1 et M_2 le symétrique de M_1 par rapport à O_2 on a (fig. 135) :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\,\overrightarrow{O_1M_1} + 2\,\overrightarrow{M_1O_2} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

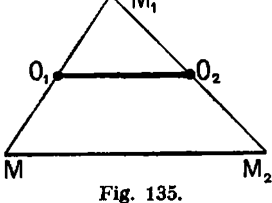


Fig. 135.

SUJETS D'EXAMEN

— Figures planes directement égales. Rotation qui fait correspondre en général deux figures directement égales. Cas d'exception.
(*Lyon*, ME et MT.)

— Montrer qu'un déplacement plan qui conserve le sens des angles équivaut en général à une rotation.
(*Dijon*, MT.)

EXERCICES

● **91.** Dans un parallélogramme ABCD les sommets A et B sont fixes. On construit le triangle équilatéral de sens direct CDM. Trouver les lieux géométriques des points D et M lorsque le point C décrit une droite ou un cercle donné.

● **92.** Un cercle ω de rayon R donné passe par un point fixe A. Un diamètre MN de ce cercle conserve une direction fixe. Déterminer les lieux géométriques des points M et N ainsi que l'enveloppe du cercle ω.

● **93.** Dans un triangle variable ABC le sommet A est fixe, l'angle (AB, AC) est constant et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est égal à un vecteur fixe. Trouver :

1° Les lieux géométriques des sommets B et C.

2° L'enveloppe des hauteurs issues de B et de C et celle du cercle ABC.

● **94.** Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Soient C et D les points diamétralement opposés à A dans ces deux cercles. Une sécante variable issue de A coupe en P le cercle O et en Q le cercle O'. La droite CP coupe en M la parallèle à CD menée par Q et la droite DQ coupe en N la parallèle à CD menée par P. Trouver les lieux géométriques des points M et N.

● **95.** On donne un triangle fixe ABC et on construit le parallélogramme BCDE. Les perpendiculaires menées de D à AB et de E à AC se coupent en M. Trouver le lieu du point M lorsque D décrit une droite ou un cercle donné.

● **96.** Construire un quadrilatère convexe ABCD connaissant :

1° Les longueurs AB et CD et les quatre angles.

2° Les longueurs AB, BC et CD et les angles A et D.

● **97.** On donne un quadrilatère convexe ABCD et on construit les vecteurs $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$.

1° Montrer que l'on retrouve dans la figure ABDEF toutes les longueurs et tous les angles formés par le quadrilatère et ses diagonales.

2° Construire un quadrilatère ABCD connaissant les longueurs AC et BD ainsi que l'angle (AC, BD) des diagonales et deux autres éléments (côtés ou angles) du quadrilatère.

● **98.** Construire un trapèze ABCD de bases AB et CD connaissant :

1° L'angle A, les longueurs AD et BC, l'une des longueurs AB ou AC.

2° Les longueurs AC, BD et l'angle (AC, BD) des diagonales et en outre une base, un côté ou un des angles du trapèze.

● **99.** Dans un trapèze isocèle de bases AB et CD, la diagonale AC est bissectrice de l'angle A.

1° On donne AB $= l$, CD $= l'$. Construire le trapèze. Discuter.

2° On donne AB + CD $= l$ et la longueur l' des diagonales. Construire le trapèze. Discuter. *(Madagascar.)*

● **100.** On considère un cercle fixe C, de centre O, de rayon R et un point fixe A extérieur au cercle tel que OA $= d$. Soit MM′ un diamètre variable du cercle C. La droite MA recoupe le cercle en Q et coupe en P la parallèle à OA issue de M′. La droite M′A recoupe le cercle en Q′ et coupe en P′ la parallèle à OA issue de M.

1° Montrer que la droite PP′ passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu géométrique des points P et P′.

3° Construire le diamètre MM′ connaissant l'angle MAM′ $= \alpha$. Discuter. Quelle est la valeur maxima de $\alpha =$ MAM′ quand le point M décrit le cercle? (On calculera $\operatorname{tg} \alpha$ en fonction de $\theta = \widehat{MOA}$ et on évitera tout calcul de dérivée). *(Guyane.)*

● **101.** On donne dans un plan P une droite D et un point A non situé sur cette droite :

1° Construire un triangle ABC ayant un sommet en A, sachant que la droite D est médiatrice du côté BC et connaissant la longueur d'un côté ainsi que l'angle opposé à ce côté.

2° Construire ce triangle ABC connaissant la hauteur issue de A et l'angle en A.

3° On suppose, $\hat{A} = 30°$ et BC $= 2a$; a longueur donnée. Le point A restant fixe, la droite D se déplace parallèlement à elle-même. On demande les lieux géométriques des sommets B et C et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4° En supposant la droite D fixe et le sommet A se déplaçant sur une droite Δ perpendiculaire à D trouver les lieux géométriques des sommets B et C, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC. *(Saint-Cloud.)*

● **102.** Étant donné un triangle AMN, on construit les transformés B et C de A et N dans la rotation (M, α) où α désigne un angle donné, puis le transformé D de N dans la rotation (A, α). Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

● **103.** 1° Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui, dans un plan P, transforment une droite donnée D en une droite donnée D′?

2° Construire les centres ω et ω' des rotations qui transforment D en D′ en faisant correspondre un point donné A de D à un point donné A′ de D′. Montrer que le rapport $\frac{A\omega}{A\omega'}$ ainsi que l'angle ($A\omega$, $A\omega'$) sont indépendants de A et A′.

● **104.** 1° Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui, dans un plan P, transforment un cercle (O, R) en un cercle égal (O′, R)?

2° Construire le centre ω de la rotation qui en outre transforme un point donné A du premier cercle en un point donné A′ du second.

● **105.** Soient deux cercles égaux O et O′ sécants en A et B tels que $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V$.

1° Construire le centre ω d'une rotation d'angle donné θ qui transforme O en O′, puis l'homologue M′ d'un point donné M du premier cercle.

2° Démontrer que l'angle (AM, AM′) est constant et égal à $\frac{V + \theta}{2}$.

● **106.** On donne un cercle fixe de centre O et un point fixe ω. On construit un triangle équilatéral ABC de centre ω dont le sommet A décrit le cercle O. Trouver les lieux géométriques des sommets B et C. Reprendre le même problème avec un carré ABCD ou un hexagone régulier de centre ω.

● **107.** Construire un segment AB connaissant son milieu O sachant que le point A appartient à un cercle (ou une droite) donné Γ et que le point B appartient à un cercle (ou une droite) donné Γ′.

● **108.** Construire un triangle équilatéral ABC de sens direct connaissant le sommet A et sachant que B et C appartiennent respectivement à deux cercles (ou droites) donnés.

● **109.** Inscrire un carré MNPQ dans un parallélogramme donné ABCD en plaçant un sommet sur chacun des côtés de ce parallélogramme. (On commencera par montrer que le centre du carré coïncide avec celui du parallélogramme.)

● **110.** On donne deux cercles concentriques de centre O et une droite D.

1° Montrer que les différentes transformées de D par rotation de centre O et d'angle variable restent tangentes à un cercle fixe γ de centre O.

2° Construire un cercle ω tangent aux deux cercles donnés et à la droite D (4 solutions si D coupe le plus grand des deux cercles).

● **111.** On considère un triangle isocèle OAB de sommet O et on mène, à un cercle variable de centre O, les tangentes AC et BD non symétriques par rapport à la hauteur OH.

1° Lieux géométriques de C, de D et du point M intersection de AC et BD.

2° Enveloppes de la droite CD et des bissectrices de l'angle AMB.

3° Démontrer que $MA.MB = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2$.

● **112.** On construit extérieurement à l'angle BAC du triangle ABC les segments AM, CN et BP respectivement perpendiculaires et égaux à BC, CA et AB.

1° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{PC}$, puis $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{NB}$ en module et en direction et montrer que les droites MA, NB et PC sont concourantes.

2° Soient O, I, J, K les milieux des segments BC, PN, NA et AP. Trouver la nature des triangles JMB et KMC.

3° On achève le parallélogramme BACD. Nature des triangles DNP, OJK et IBC ?

● **113.** Soit un triangle isocèle OAB d'angle au sommet $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \alpha$. On désigne par H l'orthocentre et par I, J, K les pieds des hauteurs issues de O, A et B. Soient d'autre part M et N les projections de A et B sur une sécante variable Δ passant par O.

1° Trouver les lieux géométriques de M et N, la valeur de l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN})$ et comparer en module et en direction les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{KN}$ puis $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{JM}$.

2° Les droites AM et KN se coupent en P, BN et JM se coupent en Q. Lieux géométriques de P et Q et enveloppe de la droite PQ?

3° Trouver la valeur de l'angle $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ})$ et comparer les segments AP et JQ, puis BQ et KP.

● **114.** Construire, extérieurement au triangle ABC, les triangles équilatéraux A′BC, AB′C et ABC′

1° Comparer les trois vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ en module et en direction et montrer que leurs supports concourent en un point I.

2° On suppose I intérieur au triangle ABC. On prolonge IB d'une longueur BD = IC. Trouver la nature du triangle A′ID et montrer que AA′ = IA + IB + IC.

3° Démontrer la relation vectorielle $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$ et en déduire que les deux triangles ABC et A′B′C′ ont même centre de gravité G (Cf. exercice n° 8).

● **115.** Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy et a une longueur donnée. On prend sur Ox le point fixe A et le point variable M et sur Oy, le point fixe B et le point variable N tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = a$ et $\overline{OM} + \overline{ON} = 2a$.

1° Comparer en module et en direction les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$. Montrer que la médiatrice de MN passe par un point fixe ω et préciser la nature du triangle ωMN.

2° Trouver le lieu du milieu I de MN, le lieu du sommet P du rectangle MONP, l'enveloppe de la perpendiculaire Pz à MN et le lieu de la projection du point O sur Pz.

3° Construire le segment MN connaissant sa longueur ou sa direction ou bien lorsque la droite MN passe par un point donné S.

● **116.** On considère un triangle ABC (prendre A obtus) et on désigne par I, J, K les milieux des côtés BC, CA et AB, puis on construit les carrés CQAQ' et ARBR' de même sens que le triangle ABC.

1° Comparer en module et en direction $\overrightarrow{RQ'}$ et $\overrightarrow{R'Q}$ et montrer que les droites QR' et Q'R se coupent au pied A' de la hauteur AA' du triangle ABC.

2° On achève les parallélogrammes QARP' et Q'AR'P. Montrer que le quadrilatère BPCP' est un carré de même sens que ABC.

3° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{IR}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{QR}$ et donner les autres couples analogues. En déduire que les droites AP, BQ et CR sont concourantes, ainsi que AP', BQ' et CR'.

4° Montrer que les trois triangles ABC, PQR et P'Q'R' ont même centre de gravité.

● **117.** Soit un segment $AB = a$, un point M variable de ce segment. On construit d'un même côté de AB les triangles équilatéraux PAM et QMB et on désigne par C l'intersection des droites AP et BQ.

1° Lieu géométrique du milieu O de PQ.

2° Montrer que la médiatrice de PQ passe pour un point fixe F. Que peut-on dire des cercles circonscrits aux triangles PMQ?

3° Lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle CPQ.

4° Construire le segment PQ connaissant sa direction ou sa longueur.

(Grenoble.)

● **118.** On donne deux cercles égaux de centres O_1 et O_2, de rayon R. Deux points M_1 et M_2 variables sur les cercles O_1 et O_2 sont tels que $(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_2M_2}) = +\frac{\pi}{2}$.

1° Lieu géométrique de l'intersection des droites O_1M_1 et O_2M_2.

2° Montrer que la médiatrice de M_1M_2 passe par un point fixe I.

3° Construire le segment M_1M_2 dans chacun des cas suivants et discuter:

a) M_1M_2 a une longueur donnée l.

b) M_1M_2 est parallèle à une direction donnée Δ.

c) M_1M_2 est tangente à l'un ou à l'autre des cercles O_1 ou O_2.

(Toulouse.)

SIXIÈME LEÇON

SYMÉTRIE-DROITE DANS LE PLAN

• **151. Figures inversement égales dans le plan.** — Deux figures superposables F et F′ d'un plan P sont dites *inversement égales* si, pour amener la figure F sur la figure F′, il faut d'abord retourner le plan P sur lui-même. Dans deux figures inversement égales F et F′ deux segments homologues sont égaux tandis que deux angles orientés homologues sont opposés.

— La correspondance entre deux figures F et F′ inversement égales du plan est appelée *antidéplacement* ou *retournement-plan* et peut être définie de la façon suivante :

Considérons dans le plan deux segments égaux AB et A′B′ et un point quelconque M (fig. 136). Construisons le point M′ tel que :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \quad \text{et} \quad A'M' = AM.$$

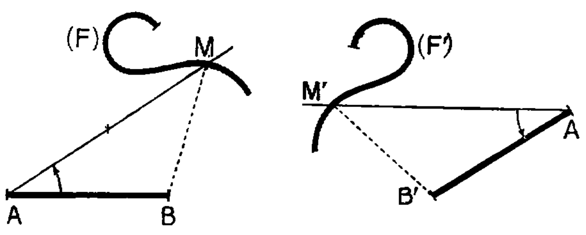


Fig. 136.

Le triangle A′B′M′ est inversement égal au triangle ABM. Lorsque le point M décrit une figure F, son homologue M′ décrit une figure F′ inversement égale à F et dans laquelle A′ et B′ sont les homologues de A et de B.

En effet si on retourne le plan P sur lui-même, on peut amener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en coïncidence avec $\overrightarrow{A'B'}$. Tout point M de F coïncide alors avec son homologue M′ de la figure F′. Notons que :

1° Un antidéplacement est déterminé quand on connaît un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son transformé $\overrightarrow{A'B'}$ de même module;

2° Deux figures F_1 et F_2, inversement égales à la figure F, sont directement égales. Le produit de deux antidéplacements plans est donc un déplacement plan.

• **152. Symétrie-droite dans le plan.** — Rappelons que deux points M et M′ sont symétriques par rapport à une droite Δ, lorsque cette droite est médiatrice du segment MM′.

Considérons dans le plan P, une droite fixe Δ appelée *axe de symétrie* (fig. 137). A tout point M du plan correspond un point M′ symétrique de M par rapport à Δ. On l'obtient en projetant M en H sur Δ et en construisant $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie par rapport à la droite Δ. *En abrégé : Symétrie-droite* Δ *ou* S (Δ).

Si M décrit une figure F, M′ décrit une figure F′ symétrique de F par rapport à Δ. Notons que cette transformation est *réciproque*. Elle possède une infinité de points doubles car tout point de l'axe Δ est invariant. Tout cercle centré sur Δ est globalement invariant ainsi que toute droite perpendiculaire à Δ.

• **153. — Théorème. —** ***Deux figures d'un même plan symétriques par rapport à une droite de ce plan sont inversement égales.***

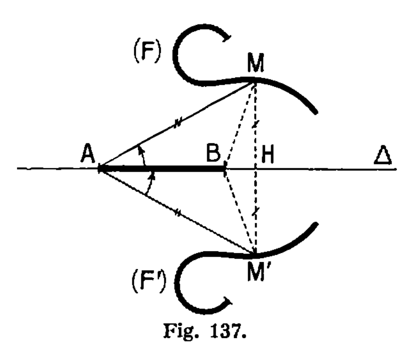


Fig. 137.

Soient A et B deux points de l'axe de symétrie Δ, M un point quelconque et M′ son symétrique par rapport à Δ (fig. 137). La droite Δ, médiatrice de MM′, est bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle AMM′. On a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$$

et

$$AM = AM'.$$

Donc (nº 151), lorsque M décrit une figure F du plan, le point M′ décrit une figure F′ inversement égale à F.

• **154. Conséquences.** — Dans toute symétrie-droite du plan deux segments homologues sont égaux et deux angles orientés homologues sont opposés.

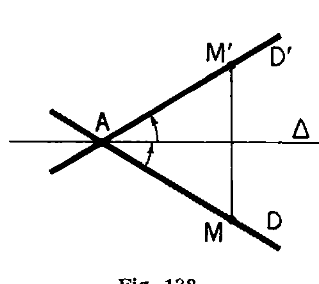


Fig. 138.

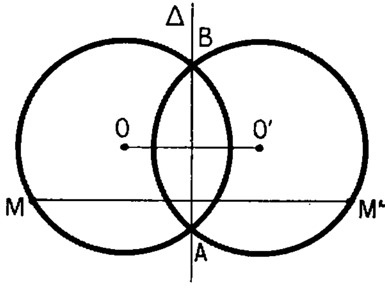


Fig. 139.

Deux droites homologues se coupent sur l'axe de symétrie (fig. 138) *ou lui sont parallèles. Cet axe de symétrie est la bissectrice intérieure de deux axes concou-*

rants homologues. Inversement deux droites données sont symétriques par rapport à l'une ou l'autre de leurs bissectrices.

Le symétrique d'un cercle O par rapport à une droite Δ est un cercle égal O' confondu avec le premier si Δ passe par O. Réciproquement :

Deux cercles égaux O et O' (fig. 139) *se correspondent dans la symétrie par rapport à la médiatrice de OO' et tout cercle se conserve dans la symétrie par rapport à l'un quelconque de ses diamètres.*

Il en résulte que l'axe de symétrie de deux cercles égaux sécants en AB est la corde commune AB et que les points d'intersection A et B de deux cercles quelconques sont symétriques par rapport à la droite des centres.

• 155. Réciproque. — ***Si deux figures inversement égales d'un plan possèdent un point double, elles sont symétriques par rapport à une droite issue de ce point.***

Soit A le point double, B un point déterminé de la figure F et B' son homologue de la figure F' inversement égale à la figure F (fig. 140). La symétrie par rapport à la médiatrice Δ de BB' transforme AB en AB' et transforme la figure F en une figure F'' inversement égale à F donc (n° 158) directement égale à F'. Les deux figures F' et F'' possèdant deux points homologues communs A et B' sont confondues (n° 133). Autrement dit F' est symétrique de F par rapport à Δ.

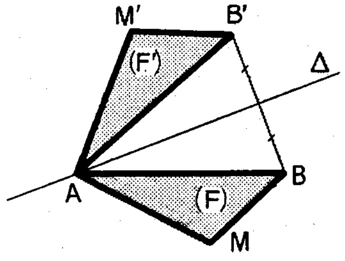


Fig. 140.

• 156. Produit de deux symétries droites dans le plan. — La symétrie-droite Δ_1 transforme toute figure F en F_1 et la symétrie-droite Δ_2 transforme F_1 en F_2. Les figures F et F_2, inversement égales à F, sont directement égales. Le produit des deux symétries $S(\Delta_1) \times S(\Delta_2)$ qui transforme F en F_2 est donc un déplacement.

• 157. 1er Cas. — Les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles. — La symétrie Δ_1 transforme le point M en M_1 et la symétrie Δ_2 transforme M_1 en M_2. On a (fig. 141) :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\,\overrightarrow{H_1M_1} + 2\,\overrightarrow{M_1H_2} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 est indépendant du point M. Donc :

Le produit de deux symétries d'axes parallèles est la translation perpendiculaire aux deux axes double de celle qui transforme le premier axe en le second.

Le produit n'est pas commutatif car le produit $S(\Delta_2) \times S(\Delta_1)$ est équivalent à la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{H_2H_1}$. Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ est équivalente au produit de deux symétries

d'axes perpendiculaires au vecteur $\vec{T}$, le second se déduisant du premier dans la translation $\frac{\vec{T}}{2}$.

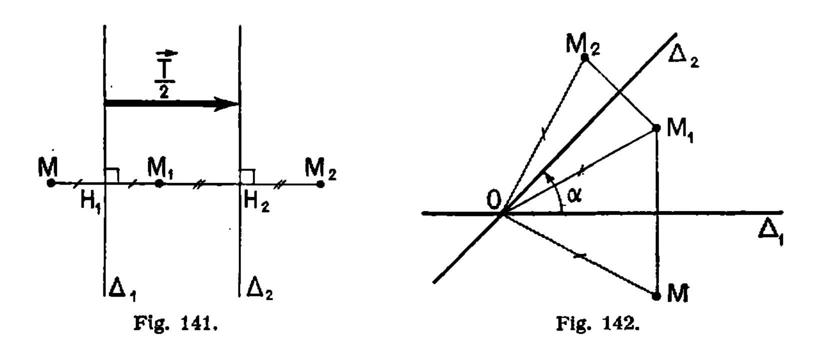


Fig. 141. Fig. 142.

Construisons un vecteur $\overrightarrow{H_1H_2} = \frac{\vec{T}}{2}$ puis les droites Δ_1 et Δ_2, respectivement perpendiculaires en H_1 et H_2 à la droite H_1H_2. Le produit des symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 est la translation $\vec{T}$.

• **158. 2e Cas. — Les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont concourants.** — Soit O leur point commun (fig. 142) et α l'angle (Δ_1, Δ_2). La symétrie Δ_1 transforme OM en OM_1 et la symétrie Δ_2 transforme OM_1 en OM_2.

On a donc $OM = OM_1 = OM_2$ soit $OM = OM_2$. D'autre part Δ_1 et Δ_2 sont les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$. On a (no 50) : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = 2(\Delta_1, \Delta_2) = 2\alpha$ (à $2k\pi$ près). Le point M_2 se déduit donc de M dans la rotation $(O, 2\alpha)$.

Le produit des symétries par rapport à deux droites concourantes en O est la rotation de centre O dont l'angle est le double de l'angle orienté de ces deux droites.

Ce produit n'est pas, en général, commutif car le produit $S(\Delta_2) \times S(\Delta_1)$ équivaut à la rotation $(O, -2\alpha)$. Réciproquement :

Toute rotation plane (O, θ) est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites issues de O et faisant l'angle $\frac{\theta}{2}$.

Construisons une droite quelconque Δ_1 issue de O, puis la droite Δ_2 issue de O telle que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\theta}{2}$. Le produit $S(\Delta_1) \times S(\Delta_2)$ est la rotation (O, θ).

• **159. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont rectangulaires.** — En particulier (fig. 143) si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la rotation $(O, 2\alpha)$ est la symétrie-point de centre O.

Le produit des symétries par rapport à deux droites rectangulaires est la symétrie-point dont le centre est le point commun à ces deux droites.

C'est le seul cas où le produit $S(\Delta_1) \times S(\Delta_2)$ est commutatif. Réciproquement :

Toute symétrie par rapport à un point est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires issues de ce point.

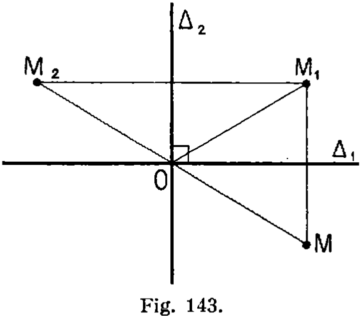


Fig. 143.

• **160. Application au produit de deux déplacements plans.** — La décomposition de chacun de ces déplacements en un produit de deux symétries-droites permet d'obtenir aisément le produit de ces deux déplacements.

• **161. Produit de deux rotations** (O_1, α_1) **et** (O_2, α_2). — Désignons (fig. 144) par Δ_2 la droite O_1O_2, par Δ_1 la droite issue de O_1 telle que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\alpha_1}{2}$ et par Δ_3 la droite issue de O_2 telle que $(\Delta_2, \Delta_3) = \frac{\alpha_2}{2}$.

Le produit des deux rotations $R(O_1, \alpha_1) \times R(O_2, \alpha_2)$ équivaut au produit des quatre symétries :

$$S(\Delta_1) \times S(\Delta_2) \times S(\Delta_2) \times S(\Delta_3).$$

La seconde et la troisième s'associant pour donner la transformation identique, on obtient :

$$R(O_1, \alpha_1) \times R(O_2, \alpha_2) = S(\Delta_1) \times S(\Delta_3).$$

Or : $(\Delta_1, \Delta_3) = (\Delta_1, \Delta_2) + (\Delta_2, \Delta_3) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + k\pi.$

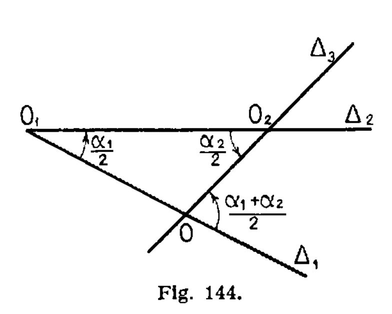


Fig. 144.

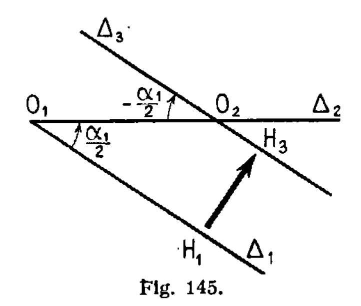


Fig. 145.

1° Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ ou $2k\pi$, les droites Δ_1 et Δ_3 se coupent en O.

Le produit des deux rotations est la rotation $(O, \alpha_1 + \alpha_2)$.

2° Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ on **a** : $\alpha_2 = -\alpha_1$ (fig. 145), les deux droites Δ_1 et Δ_3 son parallèles. Le produit des deux rotations est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{H_1H_3}$.

Le produit de deux rotations d'angles opposés est une translation.

Notons que le produit de deux rotations de centres différents n'est pas commutatif car O_1 n'a pas même transformé dans les deux cas.

• 162. Produit d'une rotation (O, α) et d'une translation $\vec{T}$. — Désignons (fig. 146) par Δ_2 la perpendiculaire menée par O au vecteur $\vec{T}$; soit Δ_1 la droite issue de O telle que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\alpha}{2}$ et Δ_3 la transformée de Δ_2 dans la translation $\frac{\vec{T}}{2}$.

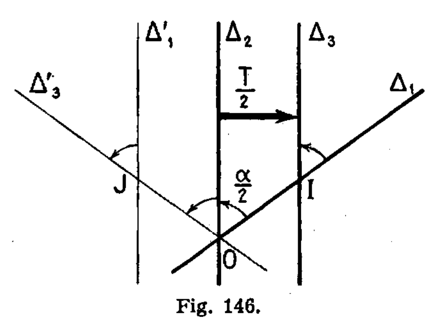


Fig. 146.

Comme précédemment le produit de la rotation (O, α) et de la translation $\vec{T}$ est équivalent au produit des quatre symétries :

$S(\Delta_1) \times S(\Delta_2) \times S(\Delta_2) \times S(\Delta_3)$

Soit à : $S(\Delta_1) \times S(\Delta_3)$.

Or $(\Delta_1, \Delta_3) = (\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\alpha}{2}$.

Les droites Δ_1 et Δ_3 se coupent en I. *Le produit de la rotation* (O, α) *par la translation* $\vec{T}$ *est la rotation* (I, α).

On étudie de même le produit de la translation $\vec{T}$ par la rotation (O, α). En désignant par Δ'_1 et Δ'_3 les symétriques de Δ_3 et Δ_1 par rapport à Δ_2, on voit que le nouveau produit est équivalent à $S(\Delta'_1) \times S(\Delta'_3)$, c'est-à-dire à la rotation (J, α) en désignant par J l'intersection de Δ'_1 et Δ'_3. Ce point J est d'ailleurs le symétrique de I par rapport à Δ_2 et $\vec{JI} = \vec{T}$, ce qui montre que le produit d'une translation par une rotation n'est pas commutatif.

• 163. Théorème. — ***Deux figures inversement égales d'un même plan se correspondent dans le produit d'une symétrie d'axe Δ par une translation parallèle à Δ.***

Soient A et B deux points d'une figure F, A′ et B′ leurs homologues dans la figure F′ inversement égale à F (fig. 147). Par le milieu I de AA′, menons l'axe Δ défini par : $(\vec{AB}, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, \vec{A'B'})$. La symétrie d'axe Δ transforme F en une figure F_1 inversement égale à F, donc directement égale à F′. Elle transforme en particulier $\vec{AB}$ en un vecteur $\vec{A_1B_1}$ tel que $(\vec{AB}, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, \vec{A_1B_1})$ et $A_1B_1 = AB = A'B'$. Donc $\vec{A_1B_1} = \vec{A'B'}$. Il en résulte que F′ est la transformée de F_1 dans la translation $\vec{A_1A'}$ (n° 138) dont le support est parallèle à Δ puisque Δ passe par les milieux H et I de AA_1 et de AA′. Le produit de la symétrie Δ par la translation $\vec{A_1A'}$ est d'ailleurs commutatif. Notons que :

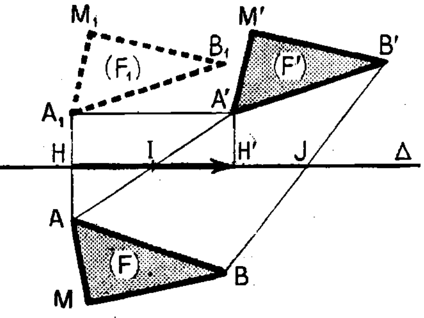


Fig. 147.

La droite Δ est la seule droite invariante dans la transformation. Elle contient le milieu de tout vecteur joignant deux points homologues et la projection de ce vecteur sur Δ est constante et égale au vecteur de la translation. La droite Δ se nomme axe du retournement.

APPLICATIONS DES DÉPLACEMENTS ET SYMÉTRIES DANS LE PLAN

• **164. Propriétés géométriques.** — EXEMPLE I. — *Démontrer que dans tout triangle la distance d'un sommet à l'orthocentre est double de celle du centre du cercle circonscrit au côté opposé à ce sommet.*

Le symétrique A′ de l'orthocentre H du triangle ABC, par rapport au côté BC appartient au cercle circonscrit à ce triangle (fig. 148). Les cercles BAC et BHC de centres O et O′, symétriques par rapport à BC, sont égaux. Ils se correspondent dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'} = 2\,\overrightarrow{OM}$. Comme dans cette translation l'homologue du sommet A est l'orthocentre H, on a : $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OM}$.

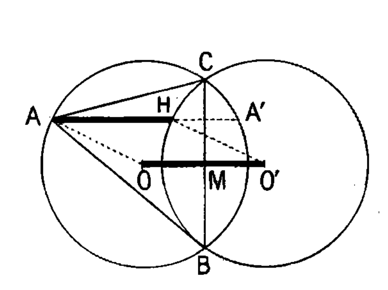


Fig. 148.

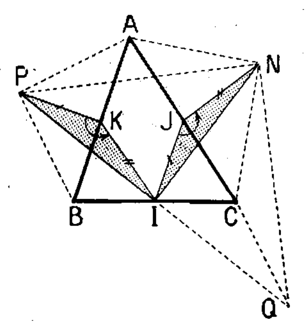


Fig. 149.

EXEMPLE II. — *Soient* I, J, K *les milieux des côtés* BC, CA *et* AB *du triangle* ABC. *On construit extérieurement au triangle le segment* JN *perpendiculaire au côté* CA *et égal à sa moitié, puis le segment* KP *perpendiculaire à* AB *et égal à sa moitié. Démontrer que les segments* IN *et* IP *sont égaux et perpendiculaires.*

1° Dans le cas de la figure (n° 149), on voit aisément que : KP = JI, KI = JN et $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{JN}) = +\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KI}) = (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN})$.

Ces égalités prouvent que les deux triangles KPI et JIN sont directement égaux et se correspondent dans une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Les deux segments homologues PI et IN sont donc égaux et perpendiculaires.

2° La rotation $\left(P, +\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $\overrightarrow{BP}$ en $\overrightarrow{AP}$ et la rotation $\left(N, +\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{CQ}$. Le produit de ces deux rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ est une symétrie-point qui transforme $\overrightarrow{BP}$ en $\overrightarrow{CQ}$. Son centre est donc I milieu de BC et par suite de PQ. Le triangle PNQ étant rectangle isocèle, il en est de même de sa moitié INP.

• **165. Théorème.** — ***Les symétriques d'un point* M *du cercle circonscrit par rapport aux côtés du triangle* ABC *sont situés sur une droite passant par l'orthocentre de ce triangle.***

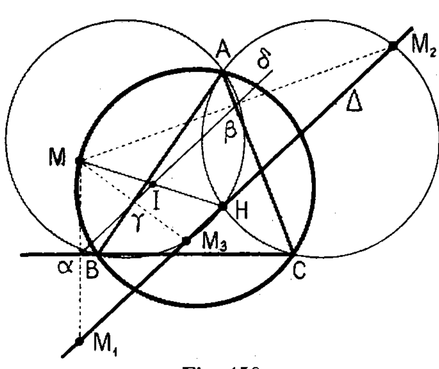


Fig. 150.

Les symétriques M_1, M_2 et M_3 du point M du cercle ABC par rapport aux côtés BC, CA et AB (fig. 150) appartiennent respectivement aux cercles HBC, HCA et HAB (n° 64). Le produit des symétries par rapport à AB et AC transforme M_3 en M_2 et le cercle HAB en HAC. Les points M_3 et M_2 sont donc homologues dans la rotation de centre A et d'angle 2 (AB, AC) qui fait correspondre ces deux cercles (n° 158). Il en résulte que M_2, M_3 et H sont alignés (n° 149). On montrerait de même que M_1, M_2 et H sont alignés. La droite Δ qui porte les points M_1, M_2, M_3 et H est la *droite de Steiner* du triangle ABC, relative au point M du cercle circonscrit.

REMARQUE. — Les projections α, β, γ du point M sur les côtés du triangle ABC sont les milieux de MM_1, MM_2 et MM_3. La droite αβγ est donc parallèle à Δ et passe par le milieu I du segment MH.

La droite de Simson relative à un point du cercle circonscrit passe par le milieu du segment qui joint ce point à l'orthocentre du triangle.

• **166. Divisions rectilignes égales.** — ***On dit que deux points variables* M *et* M′ *décrivent sur deux axes* Δ *et* Δ′ *des divisions égales si leurs abscisses rapportées à des origines homologues sont égales.***

Soient A et A′ les origines des axes Δ et Δ′ (fig. 151). On a : $\overline{AM} = \overline{A'M'}$.

Désignons par I le point d'intersection des deux axes et par α l'angle $(\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')$. On a : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha$ et $AM = A'M'$.

Le vecteur $\overrightarrow{A'M'}$ se déduit donc du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans une rotation fixe (ω, α). Le centre ω de cette rotation est situé sur la médiatrice de AA′ et sur la bissectrice extérieure de l'angle $(\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')$ (n° 148). Il en résulte (n° 142) que : ωM = ωM′ et $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \alpha$.

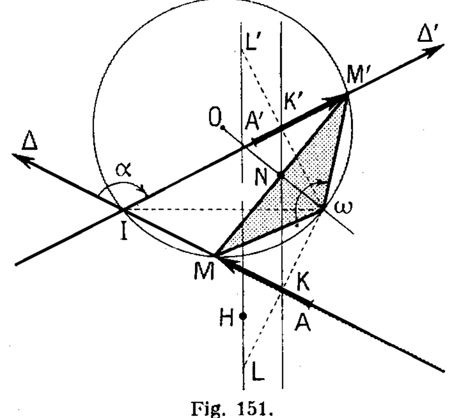


Fig. 151.

La médiatrice δ *de* MM′ *et le cercle* IMM′ *passent par le point fixe* ω.

Les droites de Simson et de Steiner du triangle IMM′ relatives au point ω sont fixes. La première est donc le lieu de la projection de ω sur MM′, c'est-à-dire du milieu N de MM′, et la seconde le lieu de l'orthocentre H du triangle IMM′. Elles sont toutes deux perpendiculaires à Iω.

• **167. Lieux géométriques.** — Lorsque, dans une figure donnée, un point variable M se déduit d'un autre point variable P dans une transformation fixe, le lieu de M se déduit du lieu de P dans cette transformation.

EXEMPLE I. — *Le centre* ω *d'un cercle de rayon donné* r *décrit un cercle fixe de centre* O *passant par* A. *Trouver le lieu de l'extrémité du rayon* ωM *du cercle* (ω), *parallèle à* OA *et de même sens.*

Soit O′ le point de la demi-droite OA tel que OO′ = r (fig. 152). On a : $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{OO'}$. Le lieu de M est donc le cercle de centre O′ égal au cercle O.

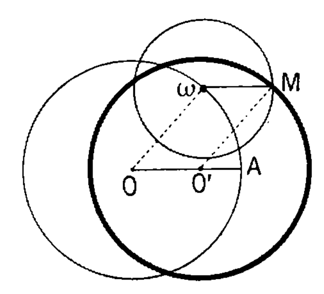


Fig. 152.

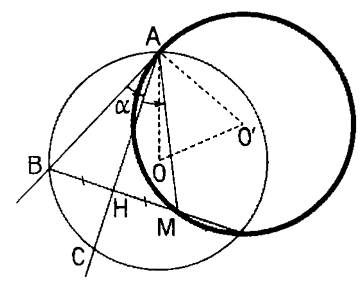


Fig. 153.

EXEMPLE II. — *Deux points* B *et* C *varient sur un cercle fixe de centre* O *passant par* A *de telle sorte que* (AB, AC) = α *(angle donné). Trouver le lieu du point* M, *symétrique de* B *par rapport à la droite* AC.

On a (fig. 153) : AM = AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 2\,(AB, AC) = 2\alpha$.
Le point M se déduit de B dans la rotation fixe (A, 2α). Le lieu de M est donc le cercle O′ qui se déduit du cercle O dans cette rotation.

• **168. Constructions géométriques.** — La translation et la rotation permettent de construire entre deux lignes données L et L′ un vecteur $\overrightarrow{MM'}$ égal à un vecteur donné ou formant avec un point donné O un triangle isocèle dont on connaît l'angle au sommet $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

EXEMPLE I. — *Construire dans un cercle donné* O *de rayon* R *une corde* AB *telle que le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *soit égal à un vecteur* $\vec{V}$ *donné.*

Le point B du cercle O (fig. 154), se déduit du point A dans la translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OO'}$. Il appartient donc également au cercle de centre O′ qui se déduit du cercle O dans la translation $\overrightarrow{OO'}$. Si les deux cercles se coupent en B on obtient le point A en construisant le vecteur $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O'O}$.

EXEMPLE II. — *Étant données deux droites D et D′ et un point A, construire un triangle rectangle isocèle ABC de sommet A et de sens direct tel que B soit sur D et C sur D′.*

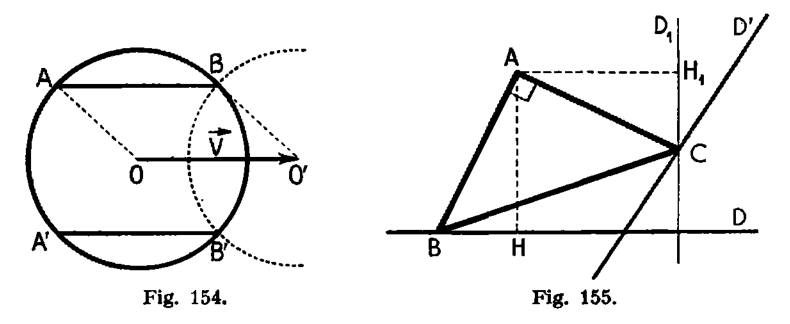


Fig. 154. Fig. 155.

Le point C (fig. 155) appartient à la droite D′ et aussi à la droite D_1 homologue de D dans la rotation $\left(A, +\frac{\pi}{2}\right)$. Le point B se déduit de C dans la rotation $\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$.

SUJETS D'EXAMEN

— Produit de deux rotations dans un plan. (*Besançon*, MT.)

— Après avoir rappelé les définitions de la symétrie plane par rapport à un point et de la symétrie plane par rapport à une droite, on énoncera et on établira les théorèmes relatifs au produit de deux symétries planes. (*Clermont*, MT.)

— Après avoir rappelé les définitions de la translation et de la rotation planes, on énoncera et on établira les théorèmes relatifs au produit de deux rotations et au produit d'une rotation et d'une translation. (*Clermont*, MT.)

EXERCICES

● **119.** On donne un triangle isocèle ABC de base BC. Une droite variable Δ passe par le sommet A. On construit le symétrique D du point C par rapport à Δ. La droite BD coupe Δ en M. Trouver les lieux géométriques des points D et M.

● **120.** Soient deux droites D_1 et D_2 issues de O et un point fixe P. Une droite variable Δ issue de P coupe D_1 en A et D_2 en B. Les symétriques de la droite Δ par rapport aux droites D_1 et D_2 se coupent en M. Trouver le lieu géométrique du point M.

● **121.** Dans un triangle ABC les sommets B et C appartiennent à une droite fixe. L'orthocentre H est fixe ainsi qu'un point P du cercle ABC.

1° Trouver le lieu géométrique du centre O du cercle ABC.

2° Construire le triangle ABC connaissant le milieu N du côté AB.

● **122.** Étant donné un triangle ABC tel que AB > AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60°$, construire un point M du segment AB et un point N du segment AC tels que BM = CN et $MN = \frac{1}{2}BC$. Discuter.

● **123.** Construire un carré ABCD sachant que A et C appartiennent à une même droite donnée D_1 et que les sommets B et D appartiennent respectivement à deux autres droites données D_2 et D_3.

● **124.** Construire un triangle ABC connaissant le centre I d'un cercle inscrit ou exinscrit, les supports Ix, Iy et Iz des droites AI, BI et CI et un point P de la droite BC.

● **125.** Dans un triangle ABC on connaît les sommets B et C, la différence α des angles B et C et le pied H de la hauteur issue de A. Construire le triangle ABC. Discuter.

● **126.** Étant donnés deux points A et B et un droite D, construire un point M de la droite D de telle sorte que cette droite soit bissectrice de l'angle (MA, MB). Que peut-on dire de la somme MA + MB lorsque A et B sont d'un même côté de D et de la différence MA — MB lorsque A et B sont de part et d'autre de D?

● **127.** Démontrer que le produit des symétries par rapport à trois points A, B, C est la symétrie par rapport au point D sommet du parallélogramme ABCD.

● **128.** Montrer que le produit des symétries par rapport à trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues d'un point O est la symétrie par rapport à la droite Δ_4 issue de O et antiparallèle à Δ_2 par rapport à Δ_1 et Δ_3.

● **129.** Démontrer que le produit des deux rotations $(O_1, +\frac{\pi}{2})$ et $(O_2, +\frac{\pi}{2})$ est la symétrie par rapport au point O, centre de la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ qui transforme O_2 en O_1.

● **130.** Toute rotation (O, α) est décomposable en un produit de deux rotations de centres B et C donnés pourvu que $(OB, OC) = \frac{\alpha}{2}$. Déterminer les angles β et γ de ces deux rotations.

● **131.** On considère les rotations [A, 2 (AC, AB)], [B, 2 (BA, BC)] et [C, 2 (CB, CA)] qui transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3.

1° Montrer que leur produit est la transformation identique et que M, M_1 et M_2 sont les symétriques d'un point P par rapport aux côtés du triangle ABC.

2° Trouver les lieux de M, M_1 et M_2 lorsqu'ils sont alignés sur une droite Δ et l'enveloppe de Δ.

● **132.** Soit ABCD un quadrilatère circonscrit à un cercle de centre O.

1° Démontrer que $(OA, OB) + (OC, OD) = 0$.

2° Établir que le produit des quatre rotations $[A, (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})]$, $[B, (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]$, $[C, (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})]$ et $[D, (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})]$ est la transformation identique.

● **133.** Montrer que le produit des trois rotations $[A, (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})]$, $[B, (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})]$ et $[C, (CB, \overrightarrow{CA})]$ est une symétrie point. Déterminer son centre.

● **134.** On donne un triangle équilatéral de sens direct A'BC et un point A quelconque. On construit les deux triangles équilatéraux de sens direct ACB' et BAC'. Montrer que le produit des rotations $(A, -\frac{\pi}{3})$ et $(B, +\frac{\pi}{3})$ transforme $\overrightarrow{AB'}$ en $\overrightarrow{C'A'}$ et que le quadrilatère AB'A'C' est un parallélogramme.

● **135.** On désigne par I, J, K les centres des rotations de même angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforment respectivement B en C, C en A, et A en B.

1° Étudier le produit des trois rotations et montrer que IJK est un triangle équilatéral de sens direct.

2° La droite AI coupe BC en A'. Établir que $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{c \sin (B + 30°)}{b \sin (C + 30°)}$ et en déduire que les trois droites AI, BJ et CK sont concourantes.

3° Établir que les deux sommes égales $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{IB}$ sont nulles et que les deux triangles ABC et IJK ont même centre de gravité.

● **136.** Dans un triangle ABC dont les angles sont aigus, on prend les points D, E, F respectivement sur les segments BC, CA et AB.

1° Montrer que, pour un point D donné, le périmètre du triangle DEF est minimum lorsque la droite EF passe par les symétriques M et N de D par rapport à AB et à AC.

2° Étudier la correspondance entre M et N lorsque D décrit le segment BC et montrer que le périmètre DEF est minimum lorsque D, E et F sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

● **137.** On considère un rectangle ABCD et un point variable M. Les symétries d'axes AB, BC et CD transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3.

1° Nature de la correspondance entre M et M_3?

2° Lieu du milieu de MM_3 et mesure de la projection de MM_3 sur la droite AD.

● **138.** On donne deux cercles égaux de centres O et O', un point fixe A et un point variable M du cercle O, un point fixe A' et un point variable M' du cercle O' tels que : $(OA, AM) = -(O'A', A'M')$.

1° Montrer que le lieu du milieu P de MM' est porté par une droite Δ qui passe par les milieux I et J de OO' et AA'. Limiter ce lieu.

2° Les droites AM et A'M' coupent Δ en N et N'. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{NN'}$ est constant et égal à la projection de $\overrightarrow{OO'}$ (ou de $\overrightarrow{AA'}$) sur Δ.

● **139.** On considère un triangle équilatéral ABC et les cercles de centres A, B, C ayant pour rayon le côté du triangle.

1° On prend sur le premier cercle (A) un point α. Construire un triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ de même sens que ABC dont les sommets β et γ soient respectivement sur les cercles (B) et (C) (2 solutions $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha\,\beta'\gamma'$).

2° Lorsque α varie sur le cercle (A), montrer que l'un de ces triangles $\alpha\beta\gamma$ a des côtés constants en grandeur et direction. Lieu du centre I de ce triangle.

3° Le second triangle $\alpha\,\beta'\gamma'$ a son centre fixe. Lieu du milieu M de $\beta'\gamma'$.

● **140.** Soient deux axes Δ et Δ' issus de O et une droite δ parallèle à l'une des bissectrices de l'angle (Δ, Δ'). Montrer que les points variables M de Δ et M' de Δ' décrivent des divisions égales si l'une des conditions suivantes est réalisée :

1° La somme $\overline{OM} + \overline{OM'}$ ou la différence $\overline{OM} - \overline{OM'}$ est constante.

2° Le centre du cercle OMM' décrit la droite δ.

3° Le milieu de MM' ou l'orthocentre du triangle OMM' décrit δ.

4° M et M' sont les projections sur Δ et Δ' d'un point P de δ.

5° La projection de $\overrightarrow{MM'}$ sur δ est un vecteur constant.

● **141.** On donne un triangle isocèle OAB tel que OA = OB. Par un point variable P de la droite AB on mène les parallèles à OB et OA qui coupent OA en M et OB en N.

1° Montrer que M et N décrivent des divisions égales sur OA et OB. En déduire l'enveloppe ω de la médiatrice de MN, les lieux du centre I du cercle OMN, du milieu K de MN et de l'orthocentre H du triangle OMN.

2° Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire menée de P à MN et le lieu du symétrique Q de P par rapport à MN. Comparer les triangles QMN et ONM ainsi que les angles $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QM})$ et $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QN})$.

3° Le cercle J tangent en M à ωM et en N à ωN recoupe OA en M'. Trouver le lieu du point J et démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant ainsi que le rapport $\frac{JM}{J\omega}$.

● **142.** Etant donné un quadrilatère ABCD, on construit les points M, N, P et Q centres des rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ qui transforment respectivement B en A, C en B, D en C et A en D. Soient d'autre part I, J, K, L les milieux respectifs de AC, BD, MP et QN.

1° Montrer que les triangles IMN, IPQ, JNP et JQM sont rectangles isocèles, puis que les segments MP et NQ sont égaux et perpendiculaires.

2° Démontrer que IKJL est un carré et que les quadrangles ABCD et MNPQ ont même centre de gravité.

● **143.** Soit un triangle ABC. On construit les points M, N, P, sommets des triangles rectangles isocèles de même sens MBC, NCA et PAB. On désigne par I, J, K les milieux de BC, CA, AB et par R et S les milieux de AM et de NP.

1° Montrer que les triangles INP, JPM et KMN sont rectangles isocèles. En déduire que les segments AM, BN et CP sont respectivement égaux et perpendiculaires à NP, PM et MN, puis qu'ils sont concourants.

2° Démontrer que JRKS est un carré ayant pour centre le milieu de AI.

3° On achève le parallélogramme NAPQ. Montrer que BMCQ est un carré, puis que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

● **144.** Soient Ox et Oy deux droites perpendiculaires et Δ une droite fixe qui les rencontre.

1° I étant un point fixe de Δ, construire la droite D passant par I, coupant Ox en M et Oy en N de façon que I soit le milieu de MN.

2° Lorsque I décrit la droite Δ, montrer que le cercle OMN passe par un second point fixe F autre que O et trouver le lieu géométrique de la projection du point F sur la droite D. Montrer que ce lieu passe par un point fixe lorsque O et Δ restant fixes, les droites rectangulaires Ox et Oy tournent autour de O. *(Lille.)*

● **145.** Un billard rectangulaire ABCD a pour dimensions $AB = DC = a$; $AD = BC = b > a$. Une bille part de A et frappe successivement les bandes BC, CD et DA en des points M, N, P. Elle s'arrête après avoir bouclé un quadrilatère MNPQ (Q sur AM). L'angle de réflexion est égal, chaque fois, à l'angle d'incidence.

1° Entre quelles limites doit être compris $BM = x$ pour que les bandes soient frappées dans l'ordre donné? Quelle est alors la forme du quadrilatère MNPQ?

2° Prouver que les droites supportant les côtés ou la diagonale MP du quadrilatère MNPQ passent chacune par un point fixe.

3° Calculer en fonction de x l'aire du quadrilatère MNPQ. Deux des circonstances suivantes peuvent-elles se produire simultanément : MNPQ rectangle, MNPQ losange, MNPQ d'aire maxima. *(Liban.)*

● **146.** 1° On donne un triangle ABC. Déterminer l'angle α d'une rotation de centre A et l'angle β d'une rotation de centre B, de telle façon que C soit invariant dans le produit de ces deux rotations effectuées dans l'ordre indiqué.

Montrer que le produit des trois rotations suivantes : (A) de centre A, d'angle 2(AC, AB); (B) de centre B, d'angle 2 (BA, BC); (C) de centre C, d'angle 2 (CB, CA) est la transformation identique.

2° *a*) Soient deux cercles égaux ω et ω' sécants en deux points R et S; si un cercle variable de centre R les coupe en quatre points P, Q et P', Q' respectivement, on peut répartir ces points en deux couples P, Q et P', Q' tels que (RP, RP') = (RQ, RQ') = une constante indépendante du cercle de centre R.

b) La droite PP' (ou QQ') passe par un point fixe.

3° Soit M un point quelconque, M' son transformé par la rotation (A) définie au 1°; M'' le transformé de M' par la rotation (B); on sait que la rotation (C) transforme M'' en M.

a) Calculer l'angle (M'M, M'M'') en fonction de (M'A, M'B).

b) Lieu de M' pour que M, M' et M'' soient alignés.

c) Caractériser ce lieu par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. Lieux correspondants de M et M''.

d) En utilisant le 2°, démontrer que la droite MM'M'' passe par un point fixe quand M' décrit son lieu.

e) Caractériser ce point fixe par rapport au triangle ABC. *(Aix-Marseille.)*

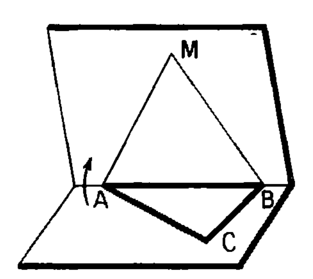
SEPTIÈME LEÇON

DÉPLACEMENTS DANS L'ESPACE

• **169. Figures égales dans l'espace.** — Deux figures égales de l'espace sont deux figures superposables. Dans deux figures égales F et F', deux segments, deux angles, deux triangles homologues sont égaux. Deux dièdres orientés, deux trièdres orientés homologues sont égaux, et par suite de même sens.

• **170. Définition.** — ***On appelle déplacement dans l'espace toute transformation ponctuelle qui, à une figure quelconque*** F, ***fait correspondre une figure*** F' ***égale à la première.***

Un déplacement dans l'espace peut être défini, *indépendamment de toute notion de mouvement* de la façon suivante :



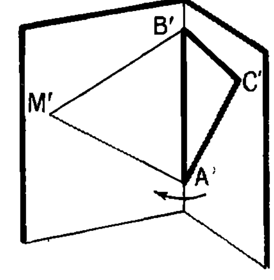


Fig. 156.

Considérons (fig. 156) trois points fixes non alignés A, B, C et un *triangle* A'B'C' *égal au triangle* ABC (où A', B', C' sont respectivement les homologues de A, B et C). A un point quelconque M faisons correspondre le point M' tel que :

1° *Les dièdres orientés* $(C, \overrightarrow{AB}, M)$ *et* $(C', \overrightarrow{A'B'}, M')$ *soient égaux.*

2° *Les triangles* ABM *et* A'B'M' *soient égaux.*

La superposition des triangles égaux ABC et A'B'C' entraîne celle des dièdres $(C, \overrightarrow{AB}, M)$ et $(C', \overrightarrow{A'B'}, M')$, puis celle des points M et M'. Si M décrit une figure F de l'espace, son homologue M' décrit une figure F' qui coïncide avec F dans la superposition précédente. La correspondance envisagée définit donc un déplacement dans lequel A, B, C ont pour homologues A', B', C'.

• **171. Corollaires.** — 1° ***Un déplacement dans l'espace est déterminé lorsqu'on connaît trois points non alignés*** A, B, C ***et leurs transformés*** A', B', C' ***formant un triangle*** A'B'C' ***égal au triangle*** ABC.

La construction précédente permet de construire l'homologue M' de tout point M de l'espace dans ce déplacement.

2° Si A', B', et C' coïncident respectivement avec A, B et C, tout point M coïncide avec son homologue M'. Donc :

Un déplacement dans l'espace ne peut posséder plus de deux points doubles non alignés sans se réduire à la transformation identique.

3° Si F_1 est la transformée de la figure F par le déplacement (D_1) et F_2 la transformée de la figure F_1 par le déplacement (D_2), les figures F et F_2 égales à F_1 sont égales entre elles. Donc :

Le produit de deux (ou plusieurs) déplacements est un déplacement.

TRANSLATION DANS L'ESPACE

• **172. Définition.** — ***La translation est une transformation dans laquelle le vecteur joignant un point à son transformé est égal à un vecteur donné*** $\vec{T}$ ***appelé vecteur-translation.***

Soit $\vec{T}$ un vecteur fixe et non nul. Construisons le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$ (fig. 157). M' est le transformé de M par la translation $\vec{T}$ et si M décrit une figure F, le point M' décrit une figure F' transformée de la figure F dans la translation $\vec{T}$. Notons que :

1° Il n'existe pas de point double dans une translation.

2° Toute droite et tout plan parallèles au vecteur-translation $\vec{T}$ sont globalement invariants dans la translation. Pour toute figure F située dans un plan P parallèle au support de $\vec{T}$ la transformation se réduit à une translation plane (n° 135), donc à un déplacement plan.

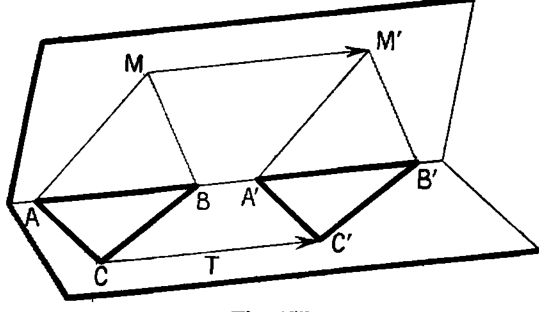


Fig. 157.

3° Si M' est le transformé de M dans la translation $\vec{T}$, le point M est le transformé de M' dans la translation $-\vec{T}$. La translation n'est pas une transformation réciproque.

● **173. Théorème.** — ***La translation dans l'espace est un déplacement qui transforme un vecteur donné en un vecteur égal.***

1° Soient A, B, C trois points fixes non alignés tels que AB soit parallèle au support du vecteur $\vec{T}$ et M un point quelconque de l'espace (fig. 157). Désignons par A', B', C' et M' leurs homologues respectifs dans la translation $\vec{T}$. La droite AB, les demi-plans CAB et MAB d'arête AB sont parallèles au vecteur $\vec{T}$, donc globalement invariants dans la translation $\vec{T}$ (n° 172, 2°).

Les dièdres orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, M) et (C', $\overrightarrow{A'B'}$, M') sont donc égaux. De plus, le triangle A'B'C' homologue du triangle ABC dans une translation plane lui est égal. De même le triangle A'B'M' est égal au triangle ABM. Il en résulte alors (n° 170) que M' est l'homologue de M dans le déplacement défini par les triangles égaux ABC et A'B'C'.

2° Le transformé du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{A'M'}$. Or par définition : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{T}$. Donc (n° 2) : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

● **174. Réciproque.** — ***Toute transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur qui joint deux points est égal au vecteur qui joint leurs transformés est une translation.***

Soient deux points l'un fixe A, l'autre variable M de l'espace. Leurs transformés A' et M' sont, par hypothèse, tels que $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

Donc, quel que soit M, on a (n° 2) : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Le point M' est l'homologue de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

● **175. Applications.** — 1° La translation transformant un vecteur en un vecteur égal, transforme une droite en une droite parallèle (ou confondue avec la première), une demi-droite en une demi-droite parallèle et de même sens, un angle en un angle à côtés parallèles et de même sens, donc en un angle égal situé dans un plan parallèle à celui du premier (ou confondu avec lui), un plan en un plan parallèle au premier (ou confondu avec lui), un dièdre orienté en un dièdre égal à faces parallèles, un trièdre orienté en un trièdre égal à arêtes parallèles et de même sens, un cercle en un cercle égal situé dans un plan parallèle à celui du premier (ou confondu avec lui).

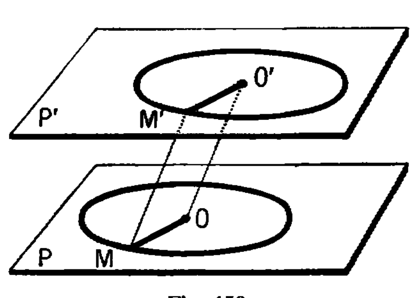


Fig. 158.

2° Inversement, un plan P' parallèle à un plan P est le transformé de ce dernier, dans toute translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ où A désigne un point quelconque de P et A' un point quelconque de P'. Si deux cercles égaux de centres O et O' sont situés dans deux plans parallèles (fig. 158) le second est le transformé du premier dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et deux rayons homologues $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M'}$ sont égaux.

• **176. Théorème.** — ***Le produit de plusieurs translations de vecteurs respectifs*** $\vec{T}_1, \vec{T}_2 ... \vec{T}_n$ ***est la translation de vecteur*** $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 ... + \vec{T}_n$.

La démonstration est identique à celle du (n° 140) et, réciproquement, on peut décomposer la translation de vecteur $\vec{T}$ en un produit de translations définies par des vecteurs $\vec{T}_1, \vec{T}_2 ... \vec{T}_n$ dont la somme est égale au vecteur $\vec{T}$.

ROTATION DANS L'ESPACE

• **177. Définition.** — Soit un axe $\vec{\Delta}$ et un angle orienté θ défini à $2k\pi$ près, que nous pourrons donc supposer compris entre $-\pi$ et π (fig. 159).

La rotation d'axe $\vec{\Delta}$ ***et d'angle*** θ ***est la transformation ponctuelle qui, à tout point*** M ***de l'espace fait correspondre le point*** M′ ***tel que*** M ***et*** M′ ***aient même projection orthogonale*** O ***sur*** Δ, ***en soient équidistants et que le dièdre orienté*** $(M, \vec{\Delta}, M')$ ***ait pour valeur*** θ.

En abrégé : *Rotation* $(\vec{\Delta}, \theta)$.

L'axe Δ *est l'axe de rotation* et l'angle θ *est l'angle de rotation.*

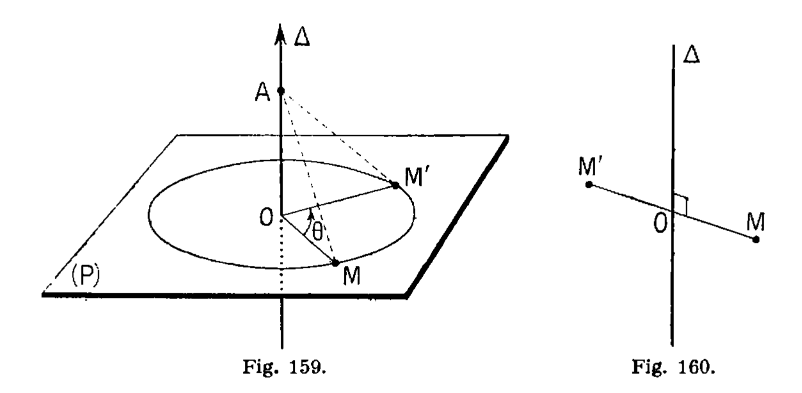


Fig. 159. Fig. 160.

• **178. Propriétés.** — 1° L'orientation de $\vec{\Delta}$ entraîne celle du plan P contenant MOM′ (n° 71). Dans ce plan M′ est le transformé de M dans la rotation (O, θ) car :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad OM = OM'.$$

Réciproquement toute rotation (O, θ) *dans un plan orienté* P *définit une rotation* $(\vec{\Delta}, \theta)$ *dans l'espace autour de la perpendiculaire* $\vec{\Delta}$ *en* O *au plan* P.

2° *Tout point de l'axe* Δ *est un point double de la rotation.* Tout plan P perpendiculaire à l'axe est globalement invariant. Il en est de même de tout cercle d'axe Δ et par suite de toute surface de révolution d'axe Δ.

3° La droite Δ est l'axe du cercle de centre O passant par M et M'. Il en résulte que :

Tout point A *de l'axe de rotation* Δ *est équidistant des deux points homologues* M *et* M' *et l'axe* Δ *est situé dans le plan médiateur du segment* MM'.

4° Le point M est l'homologue de M' dans la rotation $(\vec{\Delta}, -\theta)$. La rotation n'est donc pas réciproque sauf si $\theta = \pm \pi$.

5° ***Dans le cas :*** $\theta = \pm \pi$, l'axe Δ est médiatrice de MM'. Les points M et M' sont symétriques par rapport à Δ (fig. 160) :

La transformation est la symétrie-droite d'axe Δ : *Symétrie* (Δ).

Cette transformation réciproque et indépendante de l'orientation de Δ, est également désignée sous le nom de *transposition* ou *demi-tour* d'axe Δ.

• **179. Théorème.** — ***La rotation dans l'espace est un déplacement possédant une infinité de points doubles alignés.***

Considérons trois points fixes distincts (fig. 161), les deux premiers A et B situés sur l'axe de rotation Δ, le troisième C non situé sur Δ et un point quelconque M de l'espace. Soient A, B, C', M' les transformés respectifs de A, B, C, M dans la rotation (Δ, θ).

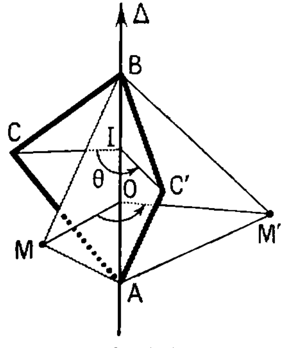


Fig. 161.

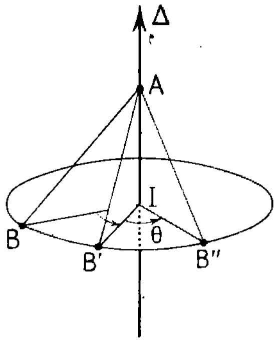


Fig. 162.

Les triangles ABC et ABC' ont AB en commun, AC = AC' et BC = BC' (n° 178, 2°). Ils sont donc égaux. Il en est de même des triangles ABM et ABM'. Enfin des égalités :

$(C, \vec{\Delta}, C') = (M, \vec{\Delta}, M') = \theta$, on déduit : $(C, \vec{\Delta}, M) = (C', \vec{\Delta}, M')$:

D'où : $(C, \overrightarrow{AB}, M) = (C', \overrightarrow{AB}, M')$.

Il en résulte (n° 170) que M' est le transformé de M dans le déplacement défini par les triangles égaux ABC et ABC'. Dans ce déplacement tous les points de la droite AB sont invariants.

• **180. Réciproque I.** — ***Tout déplacement dans l'espace qui possède deux points doubles distincts*** A ***et*** B ***est une rotation d'axe*** AB.

Envisageons le déplacement défini par les triangles égaux ABC et ABC′ (fig. 161) et soit $(C, \overrightarrow{AB}, C') = \theta$. La rotation d'axe $\overrightarrow{AB}$ et d'angle θ transforme C en C′ et laisse invariants les points A et B. Elle équivaut donc au déplacement considéré.

• **181. Réciproque** II. — ***Tout déplacement dans l'espace qui possède un point double* A *est une rotation autour d'un axe issu de* A.**

Envisageons (fig. 162) un déplacement (D) qui laisse A invariant, transforme B en B′ et transforme B′ en B″. On a : AB = AB′ = AB″. Le point A appartient à l'axe Δ du cercle circonscrit au triangle BB′B″. De plus BB′ = B′B″ et ces cordes égales sont vues du centre I du cercle BB′B″ sous le même angle. La rotation d'axe $\vec{\Delta}$, d'angle $(B, \vec{\Delta}, B') = \theta$ transforme A, B, B′ en A, B′, B″. Elle équivaut donc au déplacement envisagé défini par les triangles égaux ABB′ et AB′B″.

• **182. Applications.** — 1° La rotation dans l'espace transforme toute figure F en une figure égale F′. En particulier : toute droite D coupant l'axe de rotation Δ en A est transformée en une droite D′ issue de A et faisant avec Δ le même angle que D. Toute droite quelconque D (fig. 163) a pour transformée une droite D′ faisant avec Δ le même angle α que D et telle que les perpendiculaires communes à Δ et D d'une part, à Δ et D′ d'autre part soient égales et aient même pied O sur Δ. Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour transformé un vecteur de même module $\overrightarrow{A'B'}$ et les plans médiateurs de AA′ et BB′ contiennent Δ. Tout plan P coupant Δ en A a pour transformé un plan P′ passant par A et faisant avec Δ le même angle que P, etc...

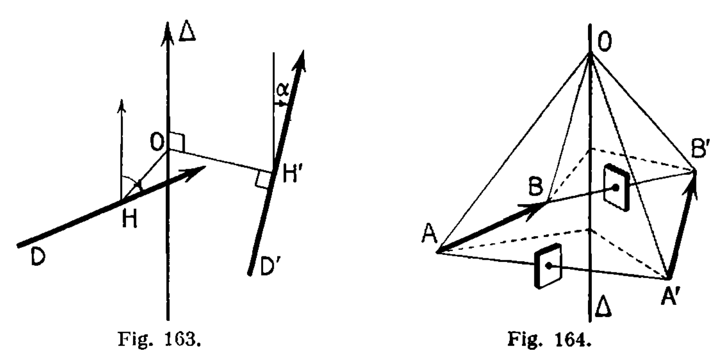


Fig. 163. Fig. 164.

2° Inversement, deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ de même origine et de même module, se correspondent par rotation autour de tout axe Δ issu de O et situé dans le bissecteur de l'angle des deux vecteurs.

Deux vecteurs donnés $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{A'B'}$ *de même module se correspondent dans une rotation dont l'axe* Δ *est l'intersection des plans médiateurs de* AA′ *et* BB′.

En effet (fig. 164), O désignant un point quelconque de Δ, le déplacement défini par les triangles égaux OAB et OA′B′ possède un double O. C'est une

rotation dont l'axe appartient à chacun des deux plans médiateurs envisagés. Toute rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ est donc définie par la donnée d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ (non situé dans un plan issu de Δ) et de son transformé $\overrightarrow{A'B'}$.

Les plans des deux faces d'un dièdre se correspondent par rotation autour de tout axe Δ coupant l'arête de ce dièdre et situé dans l'un de ses bissecteurs.

● **183. Symétrie-droite dans l'espace.** — La symétrie-droite Δ étant une rotation d'angle π autour de Δ conserve globalement toute droite perpendiculaire à Δ et tout plan issu de Δ. (Chaque demi-droite ou demi-plan, limité à Δ, s'échangeant avec son opposé).

Dans tout plan P perpendiculaire en O à Δ, la transformation se réduit à la symétrie-point de centre O et dans tout plan Q issu de Δ à la symétrie plane par rapport à Δ.

Deux axes donnés $\vec{D}$ et $\vec{D}'$ (fig. 165) sont symétriques par rapport à la médiatrice $\vec{\Delta}$ de leur perpendiculaire commune HH', faisant des angles égaux avec $\vec{D}$ et $\vec{D}'$.

Deux plans sécants donnés P et P' se correspondent dans la symétrie par rapport à toute droite Δ bissectrice de l'un des rectilignes de l'angle dièdre (P, P').

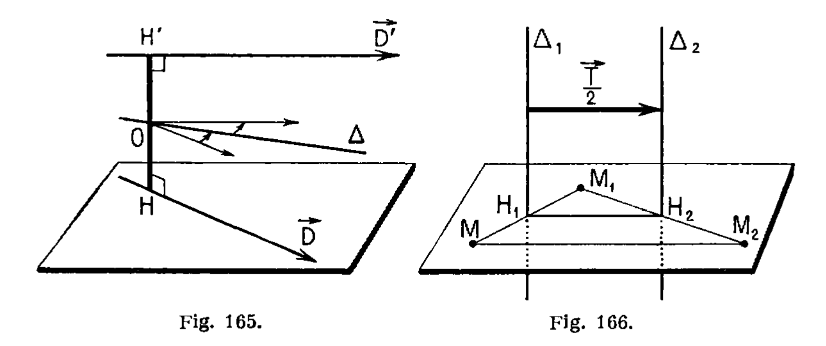


Fig. 165. Fig. 166.

● **184. Produit de deux symétries-droites dans l'espace.** — La symétrie-droite étant un déplacement, il en résulte (n° 171) que le produit des deux symétries-droites d'axes Δ_1 et Δ_2 est un déplacement.

● **185. Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.** — La symétrie Δ_1 transforme le point M en M_1 et la symétrie Δ_2 transforme M_1 en M_2 (fig. 166). Les points H_1 et H_2 étant les milieux respectifs de $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$, on a donc (n° 14) :

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 est indépendant de M :

Le produit des symétries par rapport à deux axes parallèles Δ_1 et Δ_2 est la translation perpendiculaire à ces deux axes double de celle qui transforme le premier axe en le second.

Le produit n'est pas commutatif car le produit $S(\Delta_2) \times S(\Delta_1)$ équivaut à la translation $2\,\overrightarrow{H_2H_1}$. Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ est équivalente au produit de deux symétries d'axes perpendiculaires au vecteur $\vec{T}$, le second se déduisant du premier dans la translation de vecteur $\frac{\vec{T}}{2}$.

Soit un vecteur $\overrightarrow{H_1H_2} = \frac{\vec{T}}{2}$. Menons une perpendiculaire Δ_1 quelconque en H_1 à la droite H_1H_2 et par H_2 menons la parallèle Δ_2 à Δ_1. Le produit des symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 est la translation $\vec{T}$.

• **186. Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont concourants.** — Soit Δ la perpendiculaire commune, en leur point commun O, aux deux axes Δ_1 et Δ_2 (fig. 167). Le produit des deux symétries Δ_1 et Δ_2 est un déplacement dans lequel tout point A de Δ est invariant. C'est donc une rotation d'axe Δ (nº 181).

Dans le plan P perpendiculaire en O à Δ et orienté par $\vec{\Delta}$, les symétries Δ_1 et Δ_2 transforment respectivement $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ en $\overrightarrow{OM_2}$. La rotation Δ a donc pour angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2})$ soit $2\,(\Delta_1, \Delta_2)$ (nº 158).

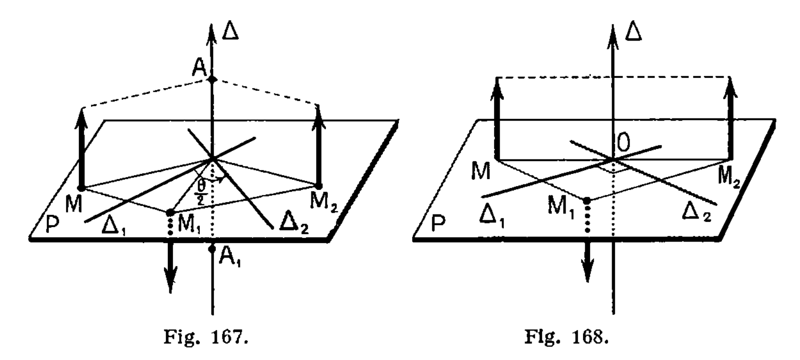


Fig. 167. Fig. 168.

Le produit de deux symétries-droites d'axes concourants Δ_1 et Δ_2 est la rotation autour de la perpendiculaire commune Δ à Δ_1 et Δ_2, double de la rotation d'axe Δ qui transforme Δ_1 en Δ_2.

Le produit $S(\Delta_1) \times S(\Delta_2)$ n'est pas, en général commutatif car le produit $S(\Delta_2) \times S(\Delta_1)$ est la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ d'angle $-\,2\,(\Delta_1, \Delta_2)$. Réciproquement :

Toute rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ est équivalente au produit de deux symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en un point O à Δ et tels que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\theta}{2}$.

Construisons une droite Δ_1 perpendiculaire en O à Δ, puis la droite Δ_2 qui s'en déduit dans la rotation $\left(\vec{\Delta}, \frac{\theta}{2}\right)$. Le produit $S(\Delta_1) \times S(\Delta_2)$ est la rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$.

● **187. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires.** — Si Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires en O (fig. 168), la rotation produit est la symétrie-droite d'axe Δ :

Le produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires est la symétrie par rapport à leur perpendiculaire commune.

Le produit $S(\Delta_1) \times S(\Delta_2)$ est commutatif. Réciproquement :

Toute symétrie-droite Δ est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites rectangulaires, perpendiculaires à Δ en un même point.

● **188. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires.** — Désignons par Δ la perpendiculaire commune O_1O_2 à Δ_1 et Δ_2 (fig. 169) et par Δ'_2 la parallèle à Δ_2 issue de O_1. Les produits des symétries Δ_1 et Δ_2 est équivalent au produit des quatre symétries Δ_1, Δ'_2, Δ'_2, Δ_2.

Or le produit $S(\Delta_1) \times S(\Delta'_2)$ est la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ et d'angle $\theta = 2\,(\Delta_1, \Delta'_2)$ et le produit $S(\Delta'_2) \times S(\Delta_2)$ est la translation de vecteur $\vec{T} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Le produit de deux symétries-droites d'axes non coplanaires est donc équivalent au produit d'une rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ autour de la perpendiculaire commune aux deux axes par une translation de vecteur $\vec{T}$ parallèle Δ.

Le produit de la rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ par la translation $\vec{T} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$ est d'ailleurs commutatif comme on le voit en introduisant, au lieu de Δ'_2, la droite Δ' parallèle à Δ_1 et issue de O_2.

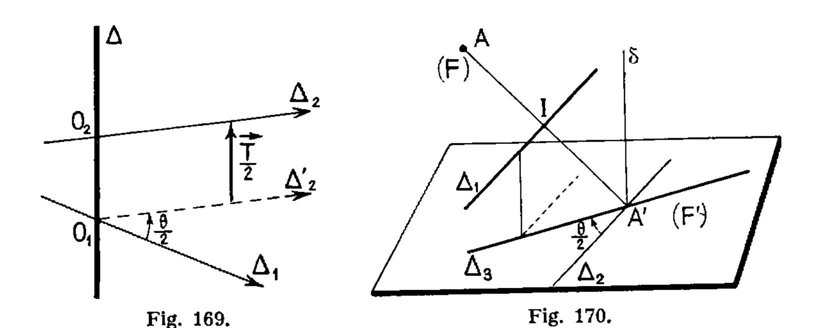


Fig. 169. Fig. 170.

● **189. Déplacement hélicoïdal.** — ***On appelle déplacement hélicoïdal d'axe Δ, le produit commutatif d'une rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ par une translation de vecteur $\vec{T}$ parallèle à Δ.*** *Déplacement $(\vec{\Delta}, \theta, \vec{T})$.*

On voit, d'après la démonstration précédente (fig. 169) que :

Le produit de deux symétries-droites d'axes Δ_1 et Δ_2 non coplanaires est le déplacement hélicoïdal ayant pour axe la perpendiculaire commune Δ à Δ_1 et Δ_2 double du déplacement de même axe qui transforme Δ_1 en Δ_2.

● **190. Théorème.** — ***Deux figures égales F et F' de l'espace se correspondent dans un déplacement hélicoïdal qui se réduit éventuellement à une rotation ou à une translation.***

Désignons par D le déplacement qui transforme la figure F en F' et le point A en A (fig. 170). La translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme A en A' et la figure F en une figure F_1 égale à F' et admettant avec elle le point double A'. La figure F' se déduit donc de F_1 dans une rotation $(\vec{\delta}, \theta)$ dont l'axe passe par A' (n° 181). Le produit de la translation $\overrightarrow{AA'}$ par cette rotation transforme F en F'. Il est donc équivalent au déplacement D.

Soient Δ_2 la perpendiculaire commune en A' à AA' et δ. Désignons par Δ_1 la droite qui se déduit de Δ_2 dans la translation $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ et Δ_3 la droite qui se déduit de Δ_2 dans la rotation $\left(\vec{\delta}, \frac{\theta}{2}\right)$. On voit que le déplacement D est équivalent au produit des quatre symétries d'axes Δ_1, Δ_2, Δ_2 et Δ_3 (nos 185 et 186), c'est-à-dire au produit des deux symétries d'axes Δ_1 et Δ_3. Il en résulte que le déplacement D est en général un déplacement hélicoïdal (n° 189). Il se réduit à une rotation si δ est perpendiculaire à AA' ou a .a translation $\overrightarrow{AA'}$ si $\theta = 0$.

SUJETS D'EXAMEN

— Produits de deux symétries par rapport à deux droites de l'espace. (*Nancy*, MT.)

— Symétrie autour d'une droite. Produit de deux symétries (plan et espace). (*Maroc*, MT.)

EXERCICES

● **147.** Soient deux plans sécants P et Q, un point variable M du plan P, un point variable M' du plan Q. Trouver le lieu géométrique des points M et M' sachant que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur donné $\vec{V}$.

● **148.** On donne trois plans P, Q, R ayant un point commun O. Construire un triangle dont les sommets A, B, C appartiennent respectivement aux plans P, Q et R sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs donnés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

● **149.** 1° Soient deux sphères S et S', un point variable M de la première, un point variable M' de la seconde. Trouver le lieu géométrique des points M et M' sachant que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur donné $\vec{V}$.

2° On donne trois sphères S, S', S''. Construire un triangle dont les sommets A, B, C appartiennent respectivement aux sphères S, S' et S'' sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs donnés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

● **150.** 1° Étant donnés deux cercles concentriques de rayons R et R' construire une droite parallèle à une direction donnée sur laquelle les cercles donnés déterminent deux cordes dont la somme ait une longueur donnée $2l$.

2° Étant donné deux sphères O et O' de rayons respectifs R et R' déterminer un plan parallèle à la droite des centres tel que les rayons des cercles de section dans les deux sphères données aient une somme de longueur donnée $2l$.

● **151.** 1° Construire dans un plan une droite de direction donnée δ sur laquelle deux cercles donnés découpent des cordes égales.

2° Construire un plan de direction donnée sur laquelle deux sphères données découpent des cercles de même rayon.

● **152.** 1° Lieu géométrique des axes des rotations qui transforment un point donné A en un point donné A'.

2° Construire l'axe et l'angle de la rotation qui transforme un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur donné, de même module $\overrightarrow{A'B'}$ non coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$.

● **153.** On considère la rotation (Δ, α) qui transforme la droite D en D'. Soit OA la perpendiculaire commune à Δ et D, OA' la perpendiculaire commune à Δ et D' et enfin Δ' l'intersection des plans perpendiculaires en A et A' à OA et OA'.

1° Montrer que D et D' coupent Δ' en des points I et J symétriques par rapport au pied K de Δ' sur le plan AOA'.

2° Pour que D et D' soient concourantes il faut et il suffit que D coupe Δ ou lui soit orthogonale.

3° Pour que D et D' soient parallèles il faut et il suffit que D soit parallèle à Δ.

● **154.** Soient D et D' deux droites homologues dans la rotation (Δ, θ). On désigne par OA et OA' les perpendiculaires communes à Δ et D d'une part, Δ et D' d'autre part.

1° Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle AOA' est l'axe d'une symétrie transformant D en D'.

2° Déterminer un second axe de symétrie transformant D en D'.

● **155.** Soient Δ et Δ' les axes des symétries-droites transformant l'axe $\vec{D}$ en l'axe $\vec{D}'$ et en l'axe $-\vec{D}'$ opposé à $\vec{D}'$, δ l'axe d'une rotation $(\vec{\delta}, \theta)$ transformant $\vec{D}$ en $\vec{D}'$, IA et IA' les perpendiculaires communes au couple δ,D et au couple δ,D'.

1° Décomposer la rotation (δ, θ) en un produit de deux symétries et montrer que δ est perpendiculaire en I à Δ'. Construire δ connaissant I.

2° Soit M un point de δ. On effectue le produit de la rotation $(\vec{\delta}, \theta)$ par la symétrie d'axe MA'. Montrer que par M passe l'axe δ' d'une rotation transformant $\vec{D}$ en $-\vec{D}'$.

● **156.** Dans une rotation d'axe donné Δ et d'angle variable α on désigne par P' le transformé d'un plan P donné.

1° Trouver le lieu géométrique de la projection de la droite Δ sur le plan P' et l'enveloppe du plan P'.

2° Construire les plans P' dont la trace sur un plan perpendiculaire à l'axe Δ passe par un point fixe ou est parallèle à une direction donnée.

● **157.** 1° On considère un déplacement dans lequel un plan donné P est globalement invariant. Montrer que ce déplacement est soit une translation parallèle à P, soit une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan P.

2° On considère le produit d'une translation donnée de vecteur $\vec{T}$ par une rotation donnée (Δ, α) dont l'axe Δ est orthogonal au support du vecteur $\vec{T}$. Montrer que la transformation ainsi définie est une rotation d'angle α autour d'un axe parallèle à Δ.

3° On considère le produit de deux rotations données d'axes parallèles Δ et Δ'. Montrer que la transformation ainsi définie est une rotation ou une translation.

● **158.** 1° Montrer que le produit de deux rotations d'axes concourants est une rotation.

2° Le produit de deux rotations dont les axes ne sont pas coplanaires est un déplacement hélicoïdal.

● **159.** 1° Montrer que tout déplacement qui transforme une figure F d'un plan P en une figure F' directement égale de ce plan est une rotation d'axe Δ perpendiculaire à P ou une translation de vecteur parallèle à P.

2° Étudier un déplacement qui transforme une figure F du plan P en une figure inversement égale de ce plan.

● **160.** On considère un déplacement dans lequel deux points donnés A et A′ ont pour transformées respectifs les points A′ et A.

1° Montrer que le milieu O de AA′ est invariant et que la transformation est une symétrie autour d'un axe perpendiculaire en O à AA′.

2° Si un déplacement transforme un axe $\overrightarrow{x'x}$ en l'axe opposé $\overrightarrow{xx'}$ c'est une symétrie autour d'un axe perpendiculaire au premier.

● **161.** Démontrer que le produit des symétries par rapport aux trois arêtes d'un trièdre trirectangle est la transformation identique.

● **162.** 1° Dans une symétrie droite les seules droites globalement invariantes sont l'axe de symétrie et les droites qui le coupent à angle droit.

2° Dans le produit de deux symétries droites d'axes quelconques, leur perpendiculaire commune est la seule droite globalement invariante de la transformation.

3° Montrer que si le produit de quatre symétries droites d'axes D_1, D_2, D_3, D_4 est la transformation identique, ces quatre droites ont même perpendiculaire commune Δ. Quelle est la relation qui lie les angles (D_1, D_2) et (D_3, D_4) mesurés autour d'un axe porté par Δ et quelle est la relation entre les pieds O_1, O_2, O_3 et O_4 des quatre axes sur Δ?

4° Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de trois symétries-droites soit une symétrie-droite?

● **163.** On considère le déplacement D produit de la rotation d'axe Δ d'angle 2α par la translation définie par un vecteur $\vec{V}$ de support parallèle à Δ et de mesure $2a$ par rapport à cet axe. Soit M′ le transformé de M dans ce déplacement et P le milieu de MM′. Construire les points M et M′ connaissant le point P.

● **164.** 1° Montrer qu'un déplacement hélicoïdal produit d'une rotation $(\vec{D}, \theta)$ par une translation de vecteur $\vec{T}$ parallèle à D est décomposable d'une infinité de manières en un produit de deux symétries-droites d'axes Δ_1 et Δ_2.

2° Effectuer le produit de deux déplacements hélicoïdaux d'axes D_1 et D_2 en utilisant la symétrie-intermédiaire par rapport à la perpendiculaire commune Δ à D_1 et D_2. Cas de deux rotations d'axes D_1 et D_2 parallèles ou concourants.

● **165.** 1° Montrer que tout déplacement d'axe D qui transforme un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur donné $\overrightarrow{A'B'}$ de même module est le produit de la rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ par une rotation quelconque d'axe $\overrightarrow{A'B'}$.

2° Soit δ l'axe de la symétrie-droite qui transforme l'axe $\overrightarrow{AB}$ en l'axe $\overrightarrow{B'A'}$. Montrer que l'axe du déplacement D est la perpendiculaire commune HK à δ et à une droite d perpendiculaire à A′B′ en un point bien déterminé.

3° Montrer que le point d'intersection K de D et d est situé sur un cylindre de révolution dont une génératrice est δ. Construire D connaissant sa direction perpendiculaire à δ.

HUITIÈME LEÇON

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT

• **191. Définition.** — Deux points M et M′ sont symétriques par rapport à un point si ce point est le milieu du segment MM′.

Considérons un point fixe O, *centre de symétrie* (fig. 171). A tout point M de l'espace correspond un point M′ symétrique de M par rapport à O. On l'obtient en construisant $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie par rapport au point O. En abrégé : *Symétrie-point du centre* O *ou* S(O).

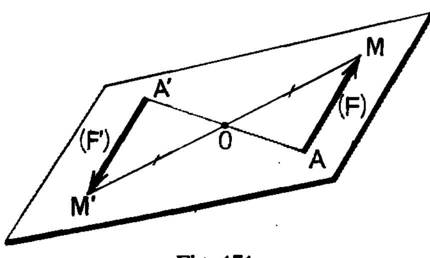


Fig. 171.

Si M décrit une figure F, M′ décrit une figure F′ symétrique de la figure F par rapport au point O.

La symétrie-point est une transformation réciproque admettant pour seul point double le centre O. Toute droite et tout plan issus de O, tout cercle et toute sphère de centre O sont globalement invariants.

• **192. Théorème.** — ***La symétrie-point transforme un vecteur en un vecteur opposé.***

En effet, dans le plan OAM (fig. 171), la symétrie par rapport à O (n° 144) transforme le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en $\overrightarrow{A'M'} = -\overrightarrow{AM}$. Réciproquement :

Toute transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur joignant deux points et le vecteur joignant les deux points homologues sont opposés est une symétrie-point.

• **193. Théorème.** — ***Le produit des symétries-points de centres*** O_1 ***et*** O_2 ***est la translation de vecteur*** $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Soient M_1 le symétrique de M par rapport à O_1 et M_2 le symétrique de M_1 par rapport à O_2 (fig. 172). Les points O_1 et O_2 étant les milieux respectifs de $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$, on a (n° 14) : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

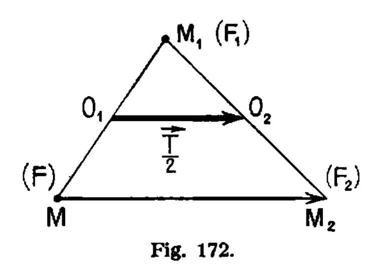


Fig. 172.

Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ *est équivalente au produit des symétries par rapport à deux points* O_1 *et* O_2 *tels que* $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\vec{T}}{2}$.

On peut donc choisir arbitrairement l'un de ces points.

● **194. Corollaire.** — ***Les figures symétriques d'une figure donnée par rapport à deux centres distincts*** O_1 ***et*** O_2 ***sont égales et se correspondent dans la translation de vecteur*** $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Le point M_1 a pour transformés respectifs M et M_2 dans les symétries par rapport à O_1 et O_2 (fig. 172) et on a : $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$. Lorsque le point M_1 décrit une figure donnée F_1, la figure F_2 décrite par M_2 est la transformée de la figure F décrite par M dans la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$. Autrement dit :

Toutes les figures, symétriques d'une figure donnée F, *par rapport aux différents points de l'espace sont égales entre elles.*

● **195. Applications.** — 1° La symétrie-point de centre O transformant un vecteur en un vecteur opposé (n° 192), transforme une droite ou un plan en une droite ou un plan parallèle, un angle en un angle égal à côtés respectivement parallèles et de sens contraires, un cercle ou une sphère en un cercle ou une sphère de même rayon, et toute figure plane en une figure plane égale.

2° Réciproquement deux droites ou deux plans parallèles sont symétriques par rapport au milieu O du segment joignant un point de l'un à un point de l'autre. Deux cercles égaux, situés dans des plans parallèles, ou deux sphères de même rayon sont symétriques par rapport au milieu du segment joignant leurs centres.

3° Deux trièdres opposés par le sommet SABC et $SA_1B_1C_1$ sont symétriques par rapport à S (fig. 173). La symétrie-point de centre O transforme SABC en un trièdre S'A'B'C' égal au trièdre $SA_1B_1C_1$ (n° 194). Les trièdres orientés SABC et $SA_1B_1C_1$ étant de sens contraires (n° 101) il en est de même des trièdres orientés SABC et S'A'B'C'. Les dièdres orientés homologues $(B, \overrightarrow{SA}, C)$ et $(B', \overrightarrow{S'A'}, C')$ sont donc opposés.

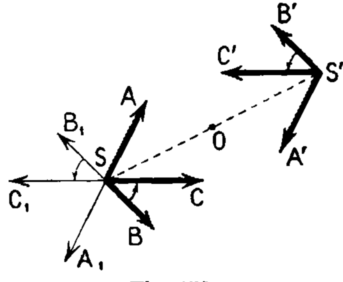


Fig. 173.

Dans l'espace, la symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN PLAN

● **196. Définition.** — Deux points M et M' sont symétriques par rapport à un plan, lorsque ce plan est le plan médiateur du segment MM'.

Considérons un plan fixe P, appelé *plan de symétrie* (fig. 174). A tout point M de l'espace correspond un point M' symétrique de M par rapport au plan P.

On l'obtient en projetant orthogonalement M en H sur le plan P et en construisant $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie par rapport au plan P. En abrégé : *Symétrie-plan* P ou S(P).

Si le point M décrit une figure F, le point M′ décrit une figure F′, symétrique de la figure F par rapport au plan P.

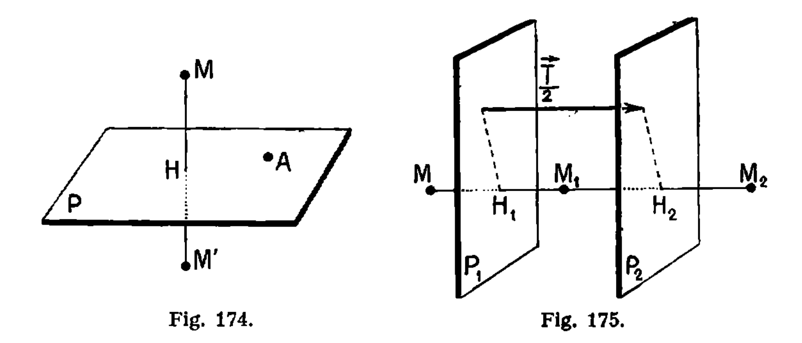


Fig. 174. Fig. 175.

La symétrie par rapport au plan P *est une transformation réciproque dans laquelle tout point du plan* P *est invariant.*

Toute droite, tout plan perpendiculaire au plan P sont globalement invariants ainsi que toute sphère dont le centre est dans le plan P.

• **197. Théorème.** — ***Le produit des symétries par rapport à deux plans parallèles*** P_1 ***et*** P_2 ***est la translation perpendiculaire à ces deux plans double de celle, qui transforme le premier plan en le second.***

Soit M_1 le transformé du point M dans la symétrie par rapport au plan P_1 et M_2 le transformé de M_1 dans la symétrie par rapport au plan P_2 parallèle au plan P_1 (fig. 175). Les trois points M, M_1 et M_2 sont alignés et les points H_1 et H_2 étant les milieux de $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ on a (n° 14) : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$. Ce produit n'est pas commutatif car $S(P_2) \times S(P_1)$ équivaut à la translation $2\overrightarrow{H_2H_1}$. Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ *est équivalente au produit des symétries par rapport à deux plans perpendiculaires au vecteur* $\vec{T}$ *tels que le second soit le transformé du premier dans la translation de vecteur* $\frac{\vec{T}}{2}$.

Soit $\overrightarrow{H_1H_2}$ un vecteur quelconque égal à $\frac{\vec{T}}{2}$ et soient P_1 et P_2 les plans perpendiculaires en H_1 et H_2 à la droite H_1H_2. Le produit $S(P_1) \times S(P_1)$ est la translation de vecteur $\vec{T}$.

• **198. Théorème.** — ***Le produit des symétries par rapport à deux plans sécants P_1 et P_2 est la rotation autour de leur intersection, double de la rotation qui, autour de cet axe, transforme le premier plan en le second.***

Soit Δ l'intersection des plans P_1 et P_2 (fig. 176) et α la mesure du dièdre orienté $(P_1, \vec{\Delta}, P_2)$. La symétrie-plan P_1 transforme M en M_1 et la symétrie plan P_2 transforme M_1 en M_2. Les points M, M_1, M_2 sont dans un plan R perpendiculaire en O à Δ. Ce plan R coupe P_1 et P_2 suivant les médiatrices Ox et Oy de MM_1 et M_1M_2. Dans le plan R, orienté par $\vec{\Delta}$, le point M_2 est le transformé

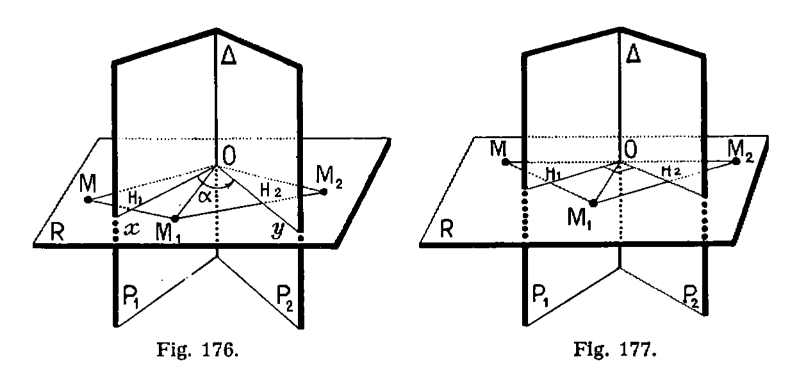


Fig. 176. Fig. 177.

de M dans la rotation de centre O et d'angle $2(Ox, Oy) = 2\alpha$ (n° 158). Le point M_2 est donc le transformé de M dans la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ et d'angle $2(P_1, \vec{\Delta}, P_2) = 2\alpha$.

Ce produit n'est pas, en général, commutatif car $S(P_2) \times S(P_1)$ équivaut à la rotation $(\vec{\Delta}, -2\alpha)$. Réciproquement :

Toute rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ est équivalente au produit des symétries par rapport à deux plans P_1 et P_2 issus de Δ tels que le dièdre orienté $(P_1, \vec{\Delta}, P_2)$ soit égal $\frac{\theta}{2}$.

Soit P_1 un plan quelconque issu de Δ et P_2 le transformé de P_1 dans la rotation $\left(\vec{\Delta}, \frac{\theta}{2}\right)$. Le produit $S(P_1) \times S(P_2)$ est la rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$.

• **199. Corollaire.** — ***Le produit des symétries par rapport à deux plans rectangulaires est la symétrie par rapport à leur intersection.***

En effet si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la rotation $(\vec{\Delta}, 2\alpha)$ est la symétrie par rapport à la droite Δ (fig. 177). C'est le seul cas où le produit $S(P_1) \times S(P_2)$ est commutatif. Réciproquement :

Toute symétrie-droite d'axe Δ est équivalente au produit des symétries par rapport à deux plans rectangulaires issus de Δ.

L'un de ces plans peut être choisi arbitrairement.

• **200. Théorème.** — ***Les figures symétriques d'une figure donnée par rapport à deux plans distincts*** P_1 ***et*** P_2 ***sont égales.***

Soient F_1 et F_2 les figures symétriques d'une figure donnée F par rapport à chacun des deux plans P_1 et P_2. La figure F_2 est la transformée de F_1 dans le produit des symétries par rapport à P_1 et à P_2, soit dans une translation (n° 197) ou dans une rotation (n° 198) :

Toutes les figures symétriques d'une figure donnée F *par rapport aux différents plans de l'espace sont égales entre elles.*

• **201. Applications.** — 1° Les transformées R′ et F′ d'un plan R et d'une figure F de ce plan (fig. 178) dans la symétrie-plan P sont aussi, les transformés de R et F dans le produit S(R) × S(P) donc dans un déplacement car la symétrie plan S(R) conserve chaque point de R Il en résulte que R′ est un plan tel que l'angle dièdre (R, R′) admette le plan P pour bissecteur, et que F′ est une figure plane égale à F. La symétrie plan transforme donc une droite en une droite, un segment ou un angle en un segment ou un angle égal, un cercle ou une sphère en un cercle ou une sphère de même rayon, etc...

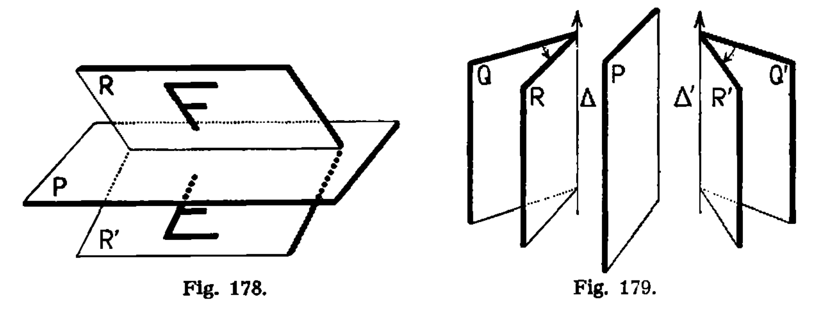


Fig. 178. Fig. 179.

2° Réciproquement deux droites concourantes ou deux plans sécants sont symétriques par rapport à l'un de leurs bissecteurs, deux sphères de centres O et O′ et de même rayon sont symétriques par rapport au plan médiateur du segment OO′, etc.

3° Soit (Q′, $\vec{\Delta}'$, R′) le transformé du dièdre orienté (Q, $\vec{\Delta}$, R) dans la symétrie-plan P (fig. 179). Le symétrique du dièdre (Q, $\vec{\Delta}$, R) par rapport à son bissecteur intérieur est le dièdre (R, $\vec{\Delta}$, Q). Les deux dièdres orientés (Q′, $\vec{\Delta}'$, R′) et (R, $\vec{\Delta}$, Q) sont égaux (n° 200). Le dièdre (R, $\vec{\Delta}$, Q) étant opposé au dièdre (Q, $\vec{\Delta}$, R) on en déduit que, la symétrie-plan transforme un dièdre orienté en un dièdre orienté opposé :

La symétrie par rapport à un plan n'est pas un déplacement.

COMPARAISON DES DIVERSES SYMÉTRIES

• **202. Théorème fondamental.** — ***Le produit de la symétrie par rapport à un plan*** P ***et de la symétrie par rapport à un point*** O ***de ce plan est la symétrie par rapport à la droite*** Δ ***perpendiculaire en*** O ***au plan*** P.

Soient M_1 le transformé d'un point M dans la symétrie par rapport au plan P et M_2 le transformé de M_1 dans la symétrie par rapport au point O de ce plan (fig. 180). Les droites Δ et MM_1, perpendiculaires au plan P sont parallèles. La droite Δ qui passe par le milieu O de M_1M_2 coupe MM_2 en son milieu I. Les points H et O étant les milieux de M_1M et M_1M_2, la droite MM_2 est parallèle à OH et perpendiculaire à Δ. La droite Δ est donc médiatrice du segment MM_2, ce qui montre que M_2 est le transformé de M dans la symétrie-droite d'axe Δ.

• **203. Corollaires.** — On voit aisément (fig. 180) que l'une des trois symétries S(O), S(P) et S(Δ) est équivalente au produit commutatif des deux autres. Ainsi la symétrie S(O) qui transforme M_1 en M_2 est le produit de la symétrie S(P) qui transforme M_1 en M et de la symétrie S(Δ) qui transforme M en M_2 :

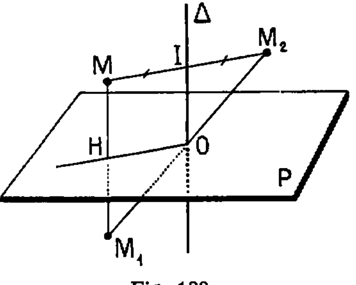


Fig. 180.

Toute symétrie-point de centre O *est équivalente au produit commutatif de la symétrie par rapport à un plan* P *passant par* O *et de la symétrie par rapport à la droite* Δ *perpendiculaire en* O *au plan* P.

La symétrie-droite d'axe Δ étant elle-même équivalente au produit des symétries par rapport à deux plans rectangulaires P_1 et P_2 issus de Δ (n° 199) il en résulte que :

Toute symétrie-point de centre O *est équivalente au produit des symétries par rapport à trois plans* P, P_1 *et* P_2 *issus de* O *et deux à deux perpendiculaires.*

Ce produit est indépendant de l'ordre des trois plans (n° 199).

• **204. Théorème.** — ***Les figures symétriques d'une figure donnée par rapport à un point et par rapport à un plan quelconques de l'espace sont égales.***

Toutes les figures symétriques de la figure F par rapport aux différents points de l'espace étant égales entre elles (n° 194) on peut choisir le centre de symétrie O dans le plan de symétrie P. Soient F_1 et F_2 les transformées de la figure F dans la symétrie-plan P et dans la symétrie-point O. La figure F_2 est la transformée de F_1 dans le produit de ces deux symétries, c'est-à-dire (n° 202) dans la symétrie par rapport à la droite Δ perpendiculaire en O au plan P. Les figures F_1 et F_2 sont donc égales.

• **205. Figures symétriques.** — ***Deux figures* F *et* F' *de l'espace sont dites symétriques lorsque l'une d'elles est égale à la transformée de l'autre dans une symétrie-plan ou une symétrie-point.***

Le centre ou le plan de la symétrie est indifférent (n° 204).

Toutes les figures symétriques d'une figure donnée sont égales. Dans deux figures symétriques F et F' deux segments, deux triangles, deux angles homologues sont égaux. Par contre deux dièdres orientés homologues sont opposés et deux trièdres homologues sont de sens contraires.

Deux figures symétriques de l'espace ne peuvent donc pas se correspondre par éléments homologues dans un déplacement.

● **206. Théorèmes.** — 1° ***Deux polygones plans symétriques sont équivalents.***

Un polygone plan est invariant dans la symétrie par rapport à son plan. Deux polygones symétriques sont égaux et ont par conséquent même aire.

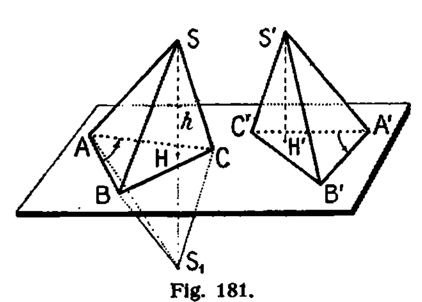


Fig. 181.

2° ***Deux polyèdres symétriques ont même volume.***

La symétrique d'une pyramide par rapport au plan de sa base (fig. 181) est une pyramide de même base B et de même hauteur h. Elle est donc équivalente à la première et deux pyramides symétriques quelconques sont donc équivalentes.

Deux polyèdres symétriques P et P' peuvent être décomposés en pyramides homologues symétriques et équivalentes. Il en résulte que deux polyèdres symétriques sont équivalents

ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

● **207. Définition.** — ***On dit qu'une figure* F *admet un centre de symétrie* O, *un axe de symétrie* Δ, *un plan de symétrie* P, *lorsqu'elle est globalement invariante dans la symétrie de centre* O, *d'axe* Δ *ou de plan* P.**

Exemples. — 1° *Une droite* D admet un point quelconque de cette droite comme centre de symétrie, la droite D et toute perpendiculaire à D comme axe de symétrie, tout plan contenant D et tout plan perpendiculaire à D comme plan de symétrie.

2° *Un plan* P admet l'un quelconque de ses points comme centre de symétrie, toute droite du plan P ou perpendiculaire à ce plan comme axe de symétrie, le plan P lui-même et tout plan perpendiculaire à P comme plans de symétrie.

3° *Un cercle de centre* O admet le point O pour centre de symétrie, son axe et ses diamètres comme axes de symétrie, son plan et les plans issus de son axe comme plans de symétrie.

4° *Une sphère de centre* O admet le point O pour centre de symétrie, tout diamètre comme axe de symétrie et tout plan diamétral pour plan de symétrie.

● **208. Axe de répétition d'une figure.** — Étant donné un nombre entier n :

***On dit que la figure* F *admet un axe de répétition* Δ *d'ordre* n *lorsque cette figure est globalement invariante dans une rotation d'axe* Δ *et d'angle* $\frac{2\pi}{n}$.**

Un axe binaire ou d'ordre 2 est un axe de symétrie, un axe ternaire est un axe d'ordre 3 et un axe quaternaire d'ordre 4.

Un trièdre régulier admet un axe ternaire, un tétraèdre régulier en admet quatre, ses différentes hauteurs (fig. 182).

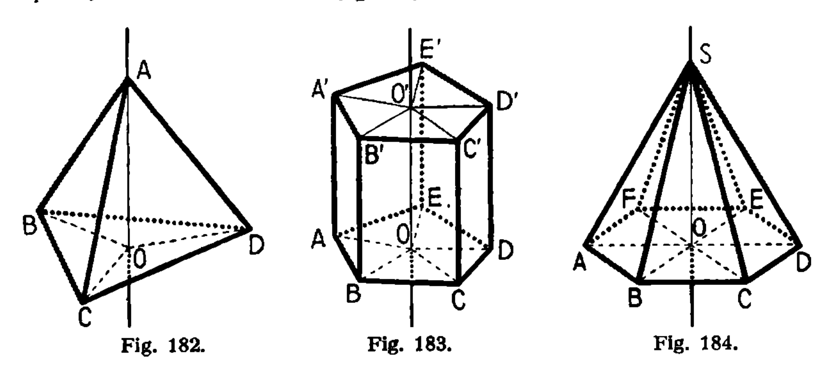


Fig. 182. Fig. 183. Fig. 184.

Un prisme régulier (ou une pyramide régulière) de n faces admet un axe d'ordre n (fig. 183 et 184).

Une diagonale d'un cube est un axe ternaire et la droite qui joint les centres de deux faces opposées est un axe quaternaire de ce cube.

• **209. Propriétés des éléments de symétrie.** — 1° Lorsqu'une figure F admet deux centres de symétrie O_1 et O_2, elle admet un troisième O_3 symétrique de O_1 par rapport à O_2 et se conserve dans la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_1O_3}$.

Elle est donc illimitée et admet une infinité de centres de symétrie régulièrement disposés sur la droite O_1O_2 :

Une figure limitée de l'espace ne peut admettre qu'un seul centre de symétrie.

On verrait de même qu'une figure limitée ne peut admettre que des axes et des plans de symétrie concourants, issus du centre de symétrie lorsqu'il existe.

2° Si la figure F admet deux plans de symétrie P_1 et P_2 issus de la droite Δ tels que $(P_1, P_2) = \frac{\pi}{n}$, elle admet aussi le plan de symétrie P_3, symétrique de P_1 par rapport à P_2 et se conserve dans toute rotation d'axe Δ et d'angle $2(P_1, P_2)$. *Elle admet donc Δ pour axe de répétition d'ordre* n *et* n *plans de symétrie issus de* Δ.

On obtient des conclusions analogues si F admet deux axes de symétries Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en O à Δ et d'angle $\frac{\pi}{n}$, ou si F admet un axe Δ_1 et un plan de symétrie P_1 faisant entre eux l'angle $\frac{\pi}{2n}$.

• **210. Théorèmes.** — 1° ***Toute figure qui admet deux axes de symétries Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en O en admet un troisième, leur perpendiculaire commune Δ.***

Cela résulte du n° 187.

Dans le plan P qui contient Δ_1 et Δ_2, la symétrie Δ se réduit à la symétrie-point O (nº 159) et l'existence des éléments de symétrie Δ_1 et O entraîne celle de Δ_2.

2º ***Toute figure qui admet deux plans de symétrie rectangulaires** P_1 **et** P_2 **admet leur intersection** Δ **pour axe de symétrie*** (nº 199).

Réciproquement : l'existence du plan de symétrie P_1 contenant l'axe de symétrie Δ entraîne celle du second plan de symétrie P_2.

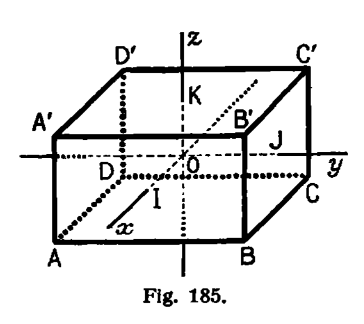


Fig. 185.

3º ***Toute figure qui admet un plan de symétrie** P **issu d'un centre de symétrie** O **admet un axe de symétrie** Δ **perpendiculaire en** O **à** P* (nº 202).

Réciproquement, l'existence de deux des trois éléments de symétrie, P, O et Δ entraîne celui du troisième (nº 203). On en déduit que :

Toute figure qui admet trois plans de symétrie deux à deux perpendiculaires admet trois axes de symétrie issus d'un centre de symétrie.

C'est le cas du parallélépipède rectangle (fig. 185).

SUJETS D'EXAMEN

— Deux figures symétriques d'une même troisième par rapport à deux plans distincts sécants ou parallèles sont égales. (*Liban*, ME.)

EXERCICES

● **166.** Étant donnés deux triangles égaux de l'espace ABC et A'B'C' tels que les plans médiateurs de AA', BB' et CC' se coupent en un point unique O, démontrer que les deux tétraèdres OABC et OA'B'C' sont symétriques.

● **167.** Démontrer que l'on peut, par un produit de deux symétries-plans, transformer un triangle donné OAB en un triangle donné égal OA'B'. Retrouver ainsi la nature d'un déplacement de l'espace qui admet un point double.

● **168.** Soit un plan P et un point extérieur O. On désigne par Δ la perpendiculaire au plan P issue de O et par H la projection de O sur le plan P.

1º Montrer que le produit de la symétrie-point O par la symétrie-plan P est équivalent au produit commutatif de la symétrie d'axe Δ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OH}$.

2º Effectuer de même le produit S(P) $\times$ S(O). Est-il commutatif?

● **169.** Montrer que le produit de deux rotations d'axes parallèles $(\vec{\Delta}_1, \alpha_1)$ et $(\vec{\Delta}_2, \alpha_2)$ est en général une rotation $(\vec{\Delta}, \alpha_1 + \alpha_2)$ d'axe parallèle à $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$ et éven-

tuellement une translation dont le vecteur $\vec{T}$ est orthogonal à Δ_1 et Δ_2. (Décomposer chaque rotation en un produit de deux symétrie-plans, l'un des plans de symétrie étant le plan Δ_1, Δ_2).

● **170.** Effectuer comme à l'exercice précédent le produit de deux rotations d'axes Δ_1 et Δ_2 concourants en O et montrer qu'il équivaut à une rotation d'axe Δ issu de O. Retrouver ainsi le produit de deux symétries d'axes concourants.

● **171.** Montrer que le produit de la symétrie-point O par une rotation dont l'axe Δ ne passe pas par O est équivalent au produit commutatif de la symétrie par rapport au plan P issu de O et perpendiculaire à Δ par une rotation dont l'axe D est parallèle à Δ ou par une translation dont le vecteur $\vec{T}$ est orthogonal à Δ. (On décomposera S(O) en S(P) $\times$ S(Δ_1) où Δ_1 est parallèle à Δ).

● **172.** Montrer que le produit de la symétrie par rapport à un plan P et d'une rotation dont l'axe Δ coupe P en O est équivalent :

1° Au produit de la symétrie-point O par une rotation dont l'axe D est issu de O (décomposer S(P) en S(O) $\times$ S(Δ_1) où Δ_1 est perpendiculaire à P).

2° Au produit de la symétrie par rapport au plan R perpendiculaire en O à D par une autre rotation d'axe D.

3° En déduire le produit des symétries par rapport à trois plans P, P_1 et P_2 issus de O.

● **173.** Soit Δ un axe parallèle au plan P. On désigne par Q le plan projetant de Δ. Montrer que le produit des symétries par rapport à Δ et à P est équivalent au produit de la symétrie par rapport au plan Q par une translation dont le vecteur est perpendiculaire au plan P.

● **174.** Démontrer que le produit de la symétrie par rapport à un plan P par une rotation dont l'axe Δ est parallèle à P est équivalent :

1° Au produit de la symétrie par rapport à la projection Δ_1 de Δ sur le plan P et de la symétrie par rapport à un plan Q issu de Δ.

2° Au produit de la symétrie par rapport à un plan R issu de Δ_1 et perpendiculaire à Q et d'une translation dont le vecteur est perpendiculaire au plan Q.

3° En déduire le produit des symétries par rapport à trois plans parallèles à une même droite.

● **175.** Soient F_2 et F_3 les transformées d'une figure donnée F_1 dans des rotations d'axes Oz et Oy.

1° Montrer que F_3 se déduit de F_2 dans une rotation d'axe Ox formant avec Oy et Oz un véritable trièdre $Oxyz$.

2° Démontrer que les figures F_1, F_2 et F_3 sont les symétriques d'une même figure F′ par rapport aux plans des trois faces du trièdre $Oxyz$.

3° Démontrer que les figures F_1, F_2 et F_3 sont les symétriques d'une même figure F par rapport aux trois arêtes du trièdre OXYZ supplémentaire de $Oxyz$.

● **176.** On appelle *antidéplacement* la transformation (Ω) qui, à une figure F donnée, fait correspondre une figure symétrique F′. On désigne par A et A′ deux points homologues de F et F′ et par I le milieu de AA′.

1° Montrer que la transformation Ω est le produit de la symétrie-point de centre I par une rotation d'axe δ issu de A′.

2° Soit P le plan issu de I, perpendiculaire à δ, et δ' la parallèle à δ issue de I. Montrer en décomposant S(I) en S(P) $\times$ S(δ') que Ω est le produit de la symétrie-plan P par une rotation d'axe Δ perpendiculaire au plan P ou par une translation parallèle au plan P.

3° En déduire que les deux figures F et F′ admettent en général, un point double O, et que les milieux des segments joignant deux points homologues de ces figures sont tous situés dans un même plan P.

● **177.** Démontrer qu'une figure F qui admet deux axes de symétrie parallèles Δ_1 et Δ_2 en admet une infinité d'autres. Étudier leur disposition et montrer que la figure F se conserve par translation et est illimitée.

● **178.** Reprendre l'étude précédente lorsque la figure F admet deux éléments de symétrie tels que :

1° Deux plans parallèles ou un axe et un plan parallèles.

2° Un centre et un plan ou un axe ne passant pas par ce centre.

● **179.** Étudier les symétries et translations d'une figure plane F admettant :

1° Trois centres de symétries formant un triangle isocèle dont l'angle au sommet est égal à 60° ou à 90°.

2° Deux centres de répétition d'ordre 3.

● **180.** Une figure illimitée F admet deux axes de symétrie Δ_1 et Δ_2 non situés dans un même plan et tels que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\pi}{n}$ (n entier). Montrer que la figure F admet une infinité d'axes de symétrie dont on étudiera la disposition et qu'elle se conserve par translation.

● **181.** Déterminer les éléments de symétrie ou de répétition d'un polygone régulier de n côtés, d'un prisme régulier de n faces latérales, d'une pyramide régulière. Étudier le cas du tétraèdre.

● **182.** Démontrer qu'un cube ABCDA'B'C'D' admet un centre de symétrie, 9 plans de symétrie, 6 axes binaires, 4 axes ternaires et 3 axes quaternaires de répétition. Préciser ces éléments.

● **183.** Les six arêtes d'un cube qui ne sont pas issues de deux sommets opposés (extrémités d'une même diagonale) forment un hexagone gauche.

1° Étudier les symétries de cet hexagone gauche de côté a.

2° Montrer que les milieux de ses côtés sont les sommets d'un hexagone régulier. Calculer son côté en fonction de a.

● **184.** Démontrer que si une figure F admet trois plans de symétrie tels que l'un des trièdres formés par ces trois plans ait une face de 90° adjacente à deux dièdres de 45°, la figure F admet tous les éléments de symétrie d'un cube.

● **185.** Démontrer qu'un polyèdre régulier convexe admet :

1° Le plan médiateur d'une arête et le bissecteur intérieur du dièdre correspondant pour plans de symétrie, leur intersection comme axe de symétrie.

2° L'axe d'une face et l'axe d'un angle polyèdre pour axes de répétition.

3° Vérifier pour un tétraèdre régulier et pour un cube.

● **186.** Montrer que l'octaèdre régulier qui a pour sommets les centres des faces d'un cube admet les mêmes éléments de symétrie et de répétition que ce cube.

● **187.** On considère dans un plan π un pentagone régulier ABCDE de côté a et d'un même côté du plan π on construit les segments AA', BB', CC', DD', EE' de longueur a formant des trièdres réguliers tels que ABEA'. On achève les 5 pentagones réguliers tels que A'ABB'M dont les nouveaux côtés forment un décagone gauche A'MB'NC'PD'QE'R.

1° Montrer que les deux pentagones A'B'C'D'E' et PQRMN sont symétriques par rapport à un point O de l'axe du pentagone ABCDE.

2° En déduire que la symétrie de centre O transforme les six pentagones initiaux en six autres qui se raccordent aux précédents suivant le décagone gauche pour former un dodécaèdre régulier convexe. Étudier ses symétries.

3° Les centres de trois faces du dodécaèdre issues d'un même sommet forment un triangle équilatéral. Montrer que les 20 triangles analogues sont les faces d'un icosaèdre régulier convexe.

NEUVIÈME LEÇON

HOMOTHÉTIE

● **211. Définition.** — Soient un point fixe O et un rapport algébrique non nul k :

L'homothétie de centre* O *et de rapport* k *est la transformation ponctuelle qui, à tout point* M, *fait correspondre le point* M' *tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$. En abrégé : *Homothétie* (O, k) ou H (O, k).

Lorsque le point M décrit une figure F, le point M' décrit une figure F' homothétique de la figure F dans le rapport k.

L'homothétie est *positive* (ou directe) pour $k > 0$ (fig. 186), *négative* (ou inverse) pour $k < 0$ (fig. 187). Elle se réduit à la transformation identique pour $k = 1$ et à la symétrie-point de centre O pour $k = -1$.

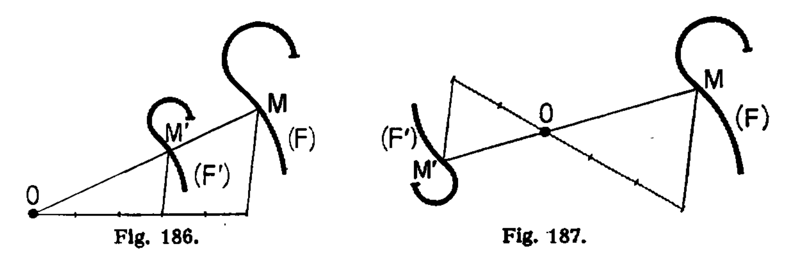


Fig. 186. Fig. 187.

Pour $k \neq -1$ la transformation n'est pas réciproque car M est l'homologue de M' dans l'homothétie $\left(O, \frac{1}{k}\right)$. Dans toute homothétie, *le centre* O *est le seul point invariant*. Les trois points O, M et M' étant alignés, il en résulte que toute droite et tout plan issus de O sont invariants et que :

Toute droite ou tout plan invariant passe par le centre de l'homothétie.

La relation $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k$ montre que O est le point qui divise le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ dans le rapport k (n° 15). Par suite :

Une homothétie est définie lorsque l'on connaît son rapport et deux points homologues.

• **212. Théorème.** — ***L'homothétique d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***est un vecteur*** $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Soit M′ le transformé dans l'homothétie (O, k), d'un point variable M du segment AB (fig. 188 et 189). On a (n° 12) :

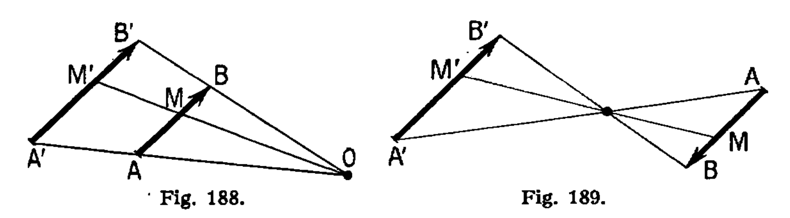


Fig. 188. Fig. 189.

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OM} - k\,\overrightarrow{OA} = k\,(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).$$

Donc :
$$\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}.$$

Lorsque M décrit le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point M′ décrit, sur la parallèle à AB issue de A′, un vecteur $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

• **213. Réciproque.** — ***Toute transformation dans laquelle le vecteur qui joint deux points quelconques*** A ***et*** M ***et celui qui joint leurs transformés*** A′ ***et*** M′, ***vérifient la relation*** $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$ ***est une homothétie pour*** $k \neq 1$, ***une translation pour*** $k = 1$.

1° Si $k \neq 1$, l'homothétie (O, k) qui transforme A en A′, transforme M en M_1 tel que : $\overrightarrow{A'M_1} = k\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. Les points M′ et M_1 sont confondus.

2° Si $k = 1$, on a $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. La transformation est donc (n° 137) la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ qui apparaît ainsi comme un cas limite de l'homothétie (O, k) qui transforme A en A′ lorsque k tend vers 1.

• **214. Corollaire.** — ***Une homothétie est définie par la donnée de deux vecteurs homologues*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***parallèles et inégaux.***

On connaît en effet le rapport $k = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} \neq 1$ et deux points homologues A et A′ de cette homothétie (n° 211). Son centre O est l'intersection des droites AA′ et BB′.

La relation $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$ permet la construction de l'homologue M′ de tout point M, sans utiliser le centre O. Lorsque M n'appartient pas à la droite AB le point M′ est l'intersection des droites A′M′ et B′M′ respectivement parallèles à AM et BM.

• **215. Théorème.** — ***Le produit de deux homothéties de rapports*** k_1 ***et*** k_2 ***est une homothétie de rapport*** k_1k_2 ***si*** $k_1k_2 \neq 1$, ***une translation si*** $k_1k_2 = 1$.

Soient $\overrightarrow{A_1M_1}$ le transformé du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans l'homothétie H_1 (O_1, k_1) et $\overrightarrow{A_2M_2}$ le transformé de $\overrightarrow{A_1M_1}$ dans l'homothétie H_2 (O_2, k_2) (fig. 190). On a :

$$\overrightarrow{A_2M_2} = k_2\,\overrightarrow{A_1M_1} \text{ et } \overrightarrow{A_1M_1} = k_1\,\overrightarrow{AM} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{A_2M_2} = k_1k_2\,\overrightarrow{AM}. \quad (1)$$

Cette relation étant vérifiée quel que soit M, on en conclut (n° 213) que le point M_2 est l'homologue de M dans une homothétie (O, k_1k_2) si $k_1k_2 \neq 1$, dans une translation dans le cas contraire.

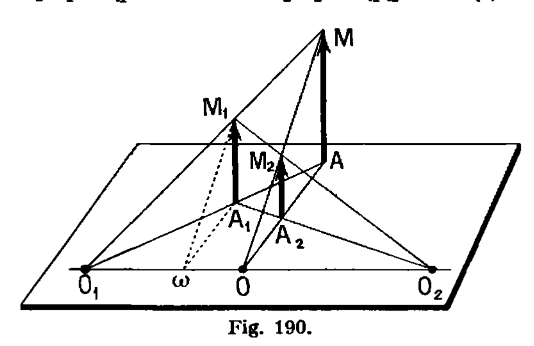


Fig. 190.

Posons $k = k_1k_2$. Le produit $k\,k_1k_2$ est positif et contient 0 ou 2 facteurs négatifs :

Dans trois homothéties dont l'une est le produit des deux autres il existe une ou trois homothéties positives.

• **216. Centre de l'homothétie produit.** — 1° Si O_2 est confondu avec O_1, ce point, invariant dans chacune des homothéties H_1 et H_2, est invariant dans leur produit H. C'est aussi le centre O de l'homothétie H.

Les trois homothéties sont dites concentriques.

2° Si O_1 et O_2 sont distincts, la droite O_1O_2, invariante dans chacune des homothéties H_1 et H_2 est invariante dans leur produit H. Le centre O de celle-ci appartient donc à la droite O_1O_2.

Les centres de deux homothéties et de celui de leur produit sont alignés.

Précisons la position du centre O. L'homothétie H_1 transforme O en ω et l'homothétie H_2 transforme donc ω en O. Les relations :

$$\overrightarrow{O_1\omega} = k_1\overrightarrow{O_1O} \qquad \text{et } \overrightarrow{O_2O} = k_2\overrightarrow{O_2\omega} = k_2(\overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1\omega})$$

donnent : $$\overrightarrow{O_2O} = k_2\,\overrightarrow{O_2O} + k_2\,\overrightarrow{OO_1} + k_2 . k_1\,\overrightarrow{O_1O}.$$

D'où : $$(1 - k_2)\,\overrightarrow{O_2O} = k_2\,(k_1 - 1)\,\overrightarrow{O_1O}.$$

Soit finalement : $$\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}} = \frac{1 - k_2}{k_2\,(k_1 - 1)}.$$

Cette formule permet de voir que le produit de deux homothéties n'est pas commutatif.

• **217. Corollaires.** — 1° *Le produit d'une translation par une homothétie ou d'une homothétie par une translation est une homothétie de même rapport.*

La relation (1) du n° 215 subsiste en effet avec k_1 ou k_2 égal à 1 si on remplace l'homothétie H_1 ou l'homothétie H_2 par une translation.

2° *Toute homothétie négative* (O, $-k$) *est le produit de l'homothétie positive* (O, k) *par la symétrie-point de centre* O.

Le produit H (O, k) $\times$ H (O, -1) est en effet équivalent à l'homothétie H (O, $-k$).

3° ***Deux figures*** F_1 ***et*** F_2 ***homothétiques de la figure*** F ***dans les rapports respectifs*** k_1 ***et*** k_2 ***se correspondent dans une homothétie de rapport*** $\frac{k_2}{k_1}$ ***si*** $k_1 \neq k_2$, ***dans une translation si*** $k_1 = k_2$.

Si F_1 et F_2 sont les transformées de F dans les homothéties (O_1, k_1) et (O_2, k_2) la figure F_2 est la transformée de F_1 dans le produit H $\left(O_1, \frac{1}{k_1}\right) \times$ H (O_2, k_2) donc (n° 215) dans une homothétie $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ si $\frac{k_2}{k_1} \neq 1$, dans une translation si $k_1 = k_2$.

● **218. Théorème.** — ***Toute homothétie*** (O, k) ***est équivalente au produit de l'homothétie*** (O_1, k) ***par une translation parallèle à*** $\overrightarrow{OO_1}$.

Soit M' le transformé d'un point quelconque M dans l'homothétie H (O, k) et $\overrightarrow{\omega M_1}$ le transformé du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans l'homothétie H_1 (O_1, k) (fig. 191).

Fig. 191.

On a :

$$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$$

et (n° 212) :

$$\overrightarrow{\omega M_1} = k\,\overrightarrow{OM}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\omega M_1}$$

et

$$\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{\omega O}.$$

Le point M' est donc le transformé de M_1 dans la translation de vecteur $\vec{T} = \overrightarrow{\omega O}$, parallèle à OO_1. Le produit de l'homothétie (O_1, k) par la translation $\vec{T}$ est équivalent à l'homothétie H (O, k).

● **219. Homothétiques des figures fondamentales.** — Pour étudier la transformée d'une figure F dans une homothétie de rapport k on peut donc choisir le centre O_1 le plus avantageux et transformer la figure par translation :

1° L'homothétique d'une droite ou d'un plan par rapport à l'un de ses points est la droite elle-même ou le plan lui-même. Par rapport à un point extérieur (fig. 193) :

L'homothétique d'une droite ou d'un plan est une droite ou un plan parallèle.

De même l'homothétique d'une demi-droite est une demi-droite de même direction, de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$.
Réciproquement, deux droites ou deux plans parallèles se correspondent dans une infinité d'homothéties.

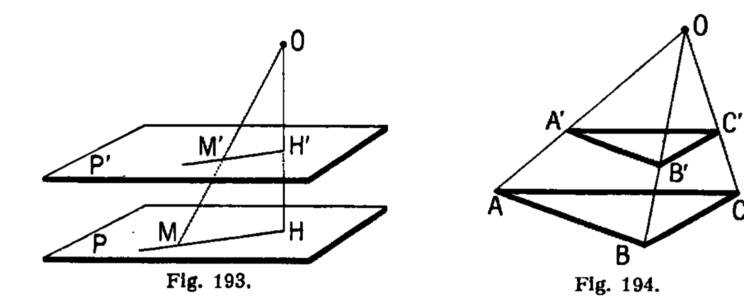


Fig. 193. Fig. 194.

L'homothétique d'un angle est donc un angle égal dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux du premier.

2° *L'homothétique d'un triangle est un triangle semblable à côtés respectivement parallèles, le rapport de similitude étant* $|k|$. Réciproquement, deux triangles ABC et A'B'C' à côtés parallèles se correspondent dans l'homothétie ou la translation qui transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 194).

3° L'homothétique du trièdre SABC par rapport à son sommet S est le trièdre lui-même si $k > 0$, le trièdre opposé par le sommet si $k < 0$.

Deux trièdres homothétiques sont égaux si $k > 0$, *symétriques* si $k < 0$. Par suite deux dièdres orientés homothétiques sont égaux si k est positif, opposés si k est négatif.

4° L'homothétique d'un cercle ou d'une sphère par rapport à son centre est un cercle ou une sphère concentrique. Donc :

L'homothétique d'un cercle est un cercle situé dans le même plan ou dans un plan parallèle et l'homothétique d'une sphère est une sphère.

Les centres de ces deux cercles ou de ces deux sphères sont homologues et leurs rayons R et R' vérifient la relation $R' = |k|\, R$. De plus, deux rayons homologues sont parallèles.

● **220. Théorème.** — ***Deux cercles inégaux situés dans le même plan ou dans deux plans parallèles sont homologues dans deux homothéties dont les centres sont les points qui divisent le segment joignant les centres de ces deux cercles dans le rapport de leurs rayons.***

Considérons dans un même plan (fig. 195) ou dans deux plans parallèles (fig. 196) deux cercles inégaux de centres ω et ω' et rayons R et R'.
Soient ωM et ω'M' deux rayons variables parallèles et de même sens.

On a : $\overrightarrow{\omega' M'} = \dfrac{R'}{R}\, \overrightarrow{\omega M}$. Le point M' est donc l'homologue de M dans

l'homothétie positive de rapport $\frac{R'}{R}$ et dont le centre I est défini par l'égalité $\frac{\overrightarrow{I\omega'}}{\overrightarrow{I\omega}} = \frac{R'}{R}$ (n° 213).

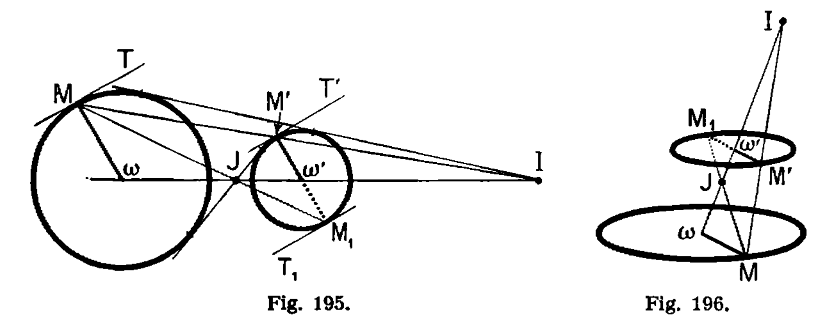


Fig. 195. Fig. 196.

Soit $\omega'M_1$ le rayon opposé à $\omega'M'$. On a : $\overrightarrow{\omega'M_1} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{\omega M}$. Le point M_1 est l'homologue de M dans l'homothétie négative de rapport $-\frac{R'}{R}$ et dont le centre J est défini par l'égalité : $\frac{\overrightarrow{J\omega'}}{\overrightarrow{J\omega}} = -\frac{R'}{R}$.

Les points I et J se nomment *centre d'homothétie positive* et *centre d'homothétie négative* des deux cercles.

Remarque. — Si $R = R'$, les deux cercles sont égaux et $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{\omega' M} = -\overrightarrow{\omega' M_1}$. *Les deux cercles sont homologues dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega\omega'}$ et dans la symétrie-point dont le centre J est le milieu de $\omega\omega'$.*

• **221. Corollaires.** — 1° Les extrémités de deux rayons parallèles sont homologues dans l'une des deux homothéties I ou J. Il en est donc de même des points de contact de deux tangentes parallèles.

2° Lorsqu'elles existent, les tangentes communes extérieures à deux cercles d'un même plan, passent par le point I et les tangentes communes intérieures passent par J.

3° Lorsque deux cercles d'un même plan sont tangents, leur point de contact est un centre d'homothétie : I s'ils sont tangents intérieurement, J s'ils sont tangents extérieurement.

4° Si les deux cercles ω et ω' sont sécants en A et B (fig. 197) les points I et J sont les pieds des bissectrices issues de A du triangle $A\omega\omega'$.

Désignons par M' l'homologue de M dans l'homothétie I et par M_1 l'homologue de M dans l'homothétie J et menons le vecteur $\overrightarrow{Ax}$ parallèle à $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega' M'}$ et de même sens.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ fait des angles opposés avec $\overrightarrow{A\omega}$ et $\overrightarrow{\omega M}$ donc avec $\overrightarrow{A\omega}$ et $\overrightarrow{Ax}$. La droite AM est bissectrice de l'angle $(Ax, A\omega)$ et la droite AM' bissectrice de l'angle $(Ax, A\omega')$. Il en résulte (n° 50) que :

$$(AM, AM') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'}) = \frac{V}{2}.$$

Et par suite

$$(AM, AM_1) = \frac{V}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM_1}$ sont vus du point A sous des angles de droites constants respectivement égaux à $\frac{V}{2}$ et $\frac{V+\pi}{2}$.

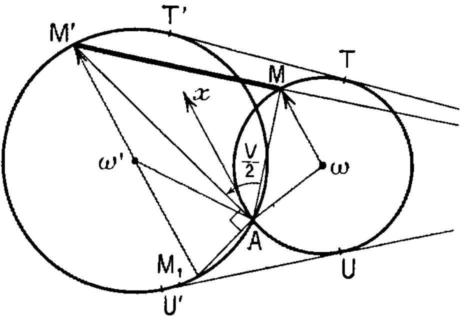


Fig. 197.

Les tangentes communes TT' et UU' sont des positions particulières de MM'. Les points A, B, T, U, étant dans cet ordre sur le cercle ω et V désignant la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$, on obtient

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = \frac{V}{2} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AU}, \overrightarrow{AU'}) = \frac{V}{2} - \pi.$$

• **222. Axes d'homothétie de trois cercles.** — Soient trois cercles ω_1 (R_1), ω_2 (R_2) et ω_3 (R_3) deux à deux homothétiques et dont les centres ne sont pas alignés.

Les centres d'homothétie positives et négatives sont I_1 et J_1 pour (ω_2) et (ω_3) I_2 et J_2 pour (ω_3) et (ω_1), I_3 et J_3 pour (ω_1) et (ω_2) (fig. 198).

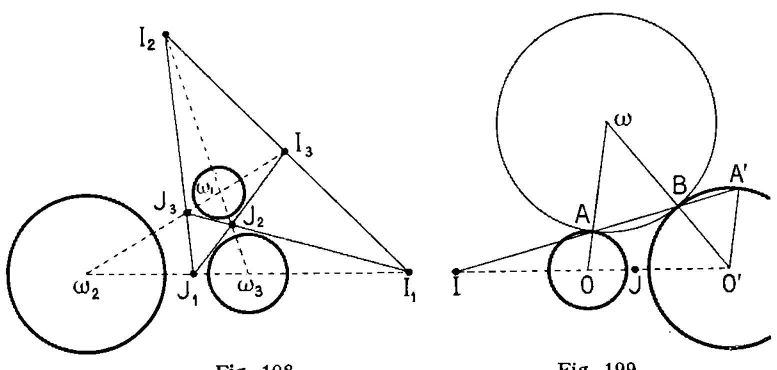


Fig. 198. Fig. 199.

L'homothétie positive $\left(I_1, \frac{R_3}{R_2}\right)$ transforme (ω_2) en (ω_3) et l'homothétie positive $\left(I_2, \frac{R_1}{R_3}\right)$ transforme (ω_3) en (ω_1). Le produit de ces deux homothéties est

l'homothétie positive qui transforme (ω_2) en (ω_1), c'est-à-dire l'homothétie $\left(I_3, \frac{R_1}{R_2}\right)$. Il en résulte (n° 216) que I_1, I_2 et I_3 sont alignés. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il en est de même de I_1, J_2 et J_3, puis de J_1, I_2 et J_3 et enfin de J_1, J_2 et I_3.

Les six centres d'homothétie de trois cercles deux à deux homothétiques sont répartis sur quatre droites appelées axes d'homothétie.

Les six centres d'homothétie sont donc les sommets d'un quadrilatère complet dont chacun des côtés contient zéro ou deux centres d'homothétie négative.

• **223. Application.** — Considérons deux cercles O et O′ et un cercle ω tangent en A au cercle O et en B au cercle O′. Le point A est un centre d'homothétie de ω et O et B un centre d'homothétie de ω et O′. La droite AB est donc un axe d'homothétie des trois cercles et passe par l'un des centres d'homothétie I ou J des cercles O et O′ (fig. 199).

Réciproquement si la sécante AB, passant par l'un des points I ou J, recoupe le cercle O′ en A′ tel que OA et O′A′ soient parallèles, l'homothétie $\left(B, \frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}}\right)$ transforme le cercle O′ en un cercle ω tangent en A au cercle O et tangent en B au cercle O′.

Les points de contact d'un cercle tangent à deux cercles donnés sont alignés avec un centre d'homothétie de ces deux cercles sans être homologues dans l'homothétie correspondante.

• **224. Homothéties de deux ou trois sphères.** — Le théorème (n° 220) s'étend sans changement à deux sphères inégales ω (R) et ω′ (R′), qui admettent toujours *deux centres d'homothétie* I *et* J.

Tout plan tangent commun extérieur passe par I et tout plan tangent commun intérieur passe par J. D'autre part si I (ou J) est extérieur aux deux sphères il est le centre d'un cône de révolution circonscrit commun aux deux sphères.

De même les centres d'homothétie de trois sphères prises deux à deux sont disposés sur *quatre axes d'homothétie* qui ne sont autres que ceux des grands cercles de ces sphères, situés dans le plan des centres.

• **225. Courbes et surfaces homothétiques.**

1° ***Si une courbe*** (C) ***admet en*** A, ***une tangente*** AT, ***toute courbe homothétique*** (C′) ***admet, au point*** A′ ***homologue de*** A, ***une tangente homothétique*** A′T′ ***parallèle à*** AT.

Par définition la tangente AT à la courbe (C) est la position limite de la sécante AM lorsque M tend vers A (fig. 200). Dans ces conditions le point M′, homologue de M, tend sur la courbe (C′) vers le point A′, et la sécante A′M′, parallèle à AM, tend vers la position limite A′T′ parallèle à AT et homothétique de cette dernière.

2° ***Si une surface*** (S) ***admet en*** A ***un plan tangent*** P, ***toute surface homothétique*** (S′) ***admet au point*** A′ ***homologue de*** A, ***un plan tangent homothétique*** P′ ***parallèle à*** P.

Lorsqu'il existe (fig. 201), le plan P tangent en A à la surface (S) est le lieu de la tangente AT à toute courbe (C) passant par A sur la surface (S). Sur toute

surface (S′) homothétique de (S), la tangente A′T′ homologue de AT engendre donc le plan P′ homologue de P et parallèle à ce dernier.

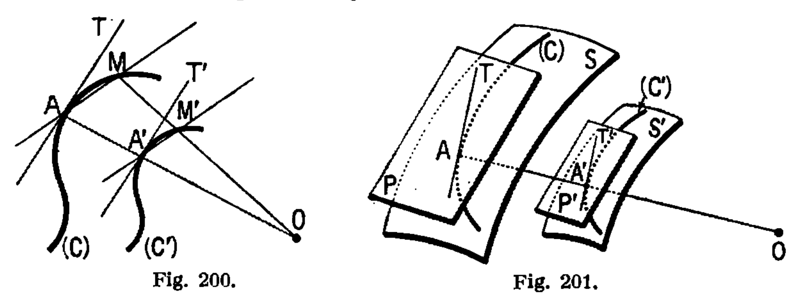


Fig. 200. Fig. 201.

• **226. Théorème.** — ***Dans toute homothétie l'angle, en un point commun*** A, ***de deux courbes ou de deux surfaces est égal à l'angle de leurs transformées au point*** A′ ***homologue de*** A.

L'angle (AT, AT_1) en A des courbes (C) et (C_1) et l'angle (A′T′, A′T'_1) en A′ des courbes transformées (C′) et (C'_1) sont homologues dans l'homothétie envisagée (fig. 202). Ils sont donc égaux.

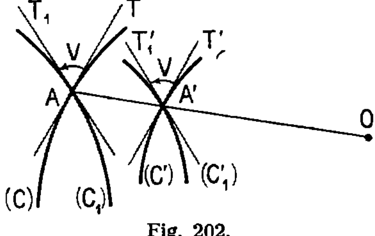


Fig. 202.

Il en est de même de l'angle (P, P_1) en A de deux surfaces (S) et (S_1) et de l'angle (P′, P'_1) en A′ de leurs transformées (S′) et (S'_1) ou même de l'angle en A d'une surface (S) et d'une courbe (C) et de l'angle en A′ de leurs transformées (S′) et (C′) :

L'homothétie conserve les angles.

APPLICATIONS DE L'HOMOTHÉTIE

• **227. Théorème de Menelaüs.** — ***Pour que les points*** α, β, γ ***pris respectivement sur les côtés*** BC, CA ***et*** AB ***du triangle*** ABC ***soient alignés il faut et il suffit que l'on ait :***

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma C}} = 1.$$

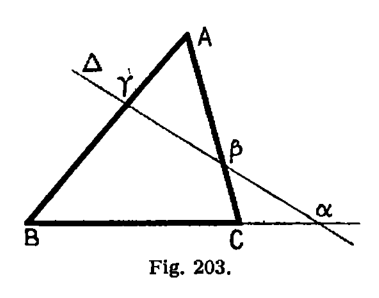


Fig. 203.

On peut, de ce théorème déjà établi (n° 94), donner la démonstration suivante : L'homothétie $\left(\beta, \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}\right)$ transforme C en A (fig. 203) et l'homothétie $\left(\gamma, \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}}\right)$ transforme A en B. Leur pro-

duit est donc l'homothétie de rapport $\frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\beta A}}$ qui transforme C en B. Son centre est l'intersection de BC et de $\beta\gamma$ (nº 216). Pour que ce soit le point α il faut et il suffit que :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma C}} \quad \text{c'est-à-dire que :} \quad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

• **228. Droite et cercle d'Euler d'un triangle.** — Soient M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC (fig. 204). Le triangle MNP dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux du triangle ABC est le transformé de ce dernier dans une homothétie de rapport $\frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{BC}} = -\frac{1}{2}$. Le centre G de cette homothétie est commun aux droites AM, BN et CP et tel que $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. On retrouve la propriété des médianes du triangle.

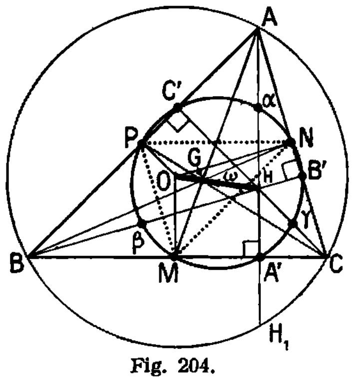


Fig. 204.

1º Dans cette homothétie (G, — 1/2) la hauteur issue de A du triangle ABC a pour homologue la hauteur issue de M du triangle MNP, c'est-à-dire la médiatrice de BC. L'orthocentre H du triangle ABC a donc pour homologue, le centre O du cercle ABC et $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Dans tout triangle le centre de gravité* G *est situé au tiers du segment* OH *qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.

La droite OH est la *droite d'Euler* du triangle ABC et comme $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ on retrouve la propriété du nº 164 (1).

2º Le centre ω du cercle MNP est l'homologue de O et le vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ l'homologue de $\overrightarrow{HO}$ donc $\overrightarrow{O\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$. Le point ω est le milieu de OH. L'égalité $\overrightarrow{H\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ montre que H est le centre d'homothétie positive des cercles ABC et MNP. Dans cette homothétie $\left(H, \frac{1}{2}\right)$ le transformé de A est le milieu α de AH, et le transformé du point H_1 où la droite AH recoupe le cercle ABC est le pied A' de la hauteur AH (nº 64). Les points α et A' appartiennent donc au cercle MNP :

Dans tout triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont situés sur un même cercle appelé cercle d'Euler ou cercle des neuf points du triangle.

Son rayon ρ est la moitié du rayon R du cercle ABC car on a $\overrightarrow{\omega M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{\omega\alpha} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. Son centre ω est le milieu du segment OH qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. On peut dire que :

Dans un quadrangle orthocentrique les milieux des six côtés et les trois points diagonaux sont sur un même cercle, cercle d'Euler de chacun des quatre triangles ayant pour sommets trois sommets du quadrangle.

• **229. Pantographe.** — C'est un instrument composé de quatre tiges articulées (fig. 205) réalisant un parallélogramme BACM′ et telles que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = k$. Les égalités

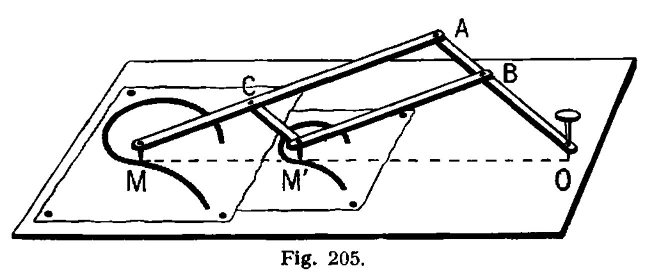


Fig. 205.

$\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{BM'}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = k$ montrent que dans toute position de l'appareil, les points M et M′ sont homologues dans l'homothétie (O, k). Le point O étant fixe, la pointe traçante M′ décrit donc une figure F′ homothétique dans le rapport k de la figure F décrite par la pointe sèche M.

• **230. Lieu géométrique.** — ***Le lieu géométrique des points d'un plan dont le rapport des distances à deux droites concourantes en* O *est constant, se compose de deux droites issues de* O.**

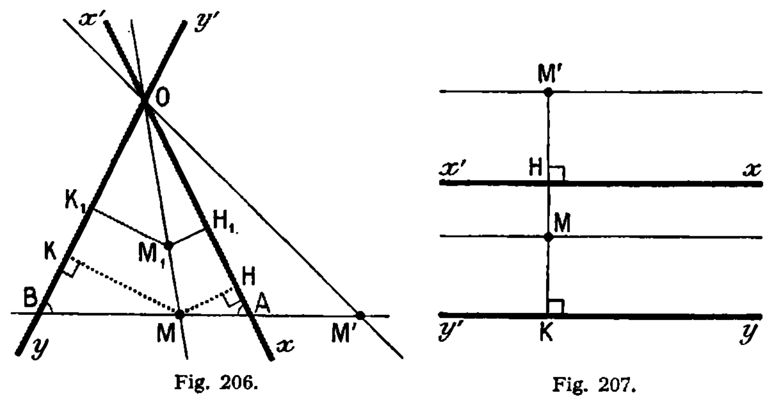


Fig. 206. Fig. 207.

Soient (fig. 206) $x'x$ et $y'y$ deux droites se coupant en O et M un point du

plan tel que $\frac{MH}{MK} = k$ (constante donnée). Le transformé M_1 du point M dans une homothétie variable de centre O est un point du lieu. Celui-ci se compose donc de droites issues de O.

Cherchons les points du lieu sur une sécante AB aux deux droites Ox et Oy, telle que OA = OB. Pour tout point M de AB les triangles rectangles MHA et MKB qui ont des angles aigus égaux en A et B sont semblables et $\frac{MH}{MK} = \frac{MA}{MB}$.

Le point M sera un point du lieu si le rapport $\frac{MA}{MB} = k$. Lorsque le rapport k est différent de 1, il y a sur la droite AB deux points M et M′ répondant à la question et le lieu cherché se compose des deux droites OM et OM′.

• **231. Remarques.** — 1° Si $k = 1$ le lieu se compose des bissectrices de l'angle xOy.

2° Lorsque les droites $x'x$ et $y'y$ sont parallèles (fig. 207), le lieu se compose de deux parallèles à ces droites issues des points M et M′ qui divisent une perpendiculaire commune HK dans le rapport k.

3° Convenons d'appeler *distance orientée* $[M, \overrightarrow{x'x}]$ *du point* M *à l'axe* $\overrightarrow{x'x}$ la longueur MH affectée du signe + ou — suivant que l'angle saillant $(\overrightarrow{Hx}, \overrightarrow{HM})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. On voit alors que le rapport des distances orientées aux axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{y'y}$ est égal à $+k$ pour tout point de la droite OM′ et à $-k$ pour tout point de la droite OM (fig. 206 et 207).

Le lieu des points dont le rapport des distances orientées à deux axes est constant est une droite, issue du point d'intersection de ces deux axes s'ils sont concourants, parallèle à ces deux axes s'ils sont parallèles.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

• **232. 1er Problème.** — *Construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée connaissant l'un des points de contact.*

Soit (fig. 208) un cercle ω tangent en A et B respectivement au cercle donné O et à la droite donnée Δ. Le cercle O est l'homologue du cercle ω dans une homothétie de centre A qui transforme B en l'une des extrémités I ou J du diamètre du cercle O perpendiculaire à Δ.

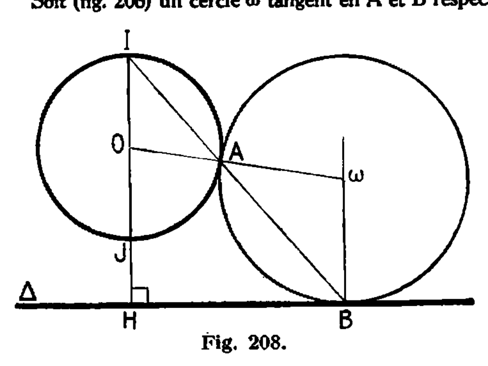


Fig. 208.

1° Si le point A est donné, la droite IA, par exemple, coupe Δ en B et l'homothétie $\left(A, \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}}\right)$ transforme le cercle O en un cercle ω tangent en A au cercle O en B à la droite Δ. (Une deuxième solution avec JA).

2° Si le point B est donné, la droite IB coupe le cercle O en A et l'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AI}}\right)$ donne un cercle ω tangent en B à Δ, et en A au cercle O. (Une deuxième solution en considérant JB).

REMARQUE. — La construction d'un cercle tangent à un cercle donné O et tangent en un point donné B à un cercle donné O′ se ramène au problème précédent car on connaît la tangente Δ en B au cercle O′ (Cf. n° 223).

• **233.** 2ᵉ **Problème.** — *Construire un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites concourantes données.*

Soit à construire (fig. 209) un cercle ω tangent aux deux côtés de l'angle xOy et passant par le point intérieur donné A.

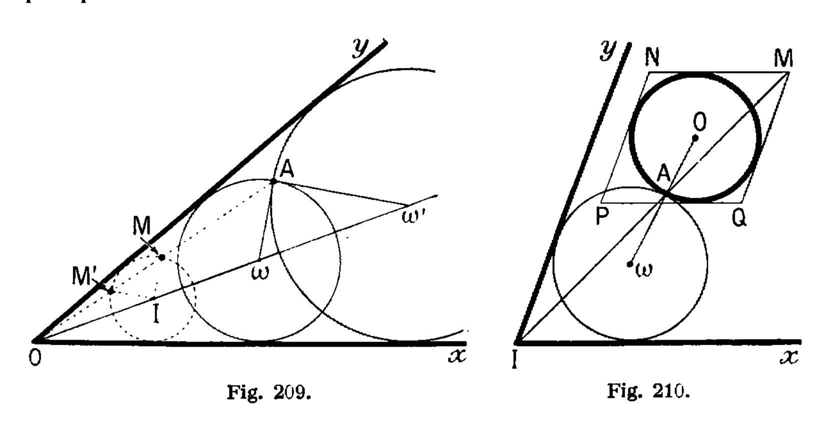


Fig. 209. Fig. 210.

Désignons par I le centre d'un cercle quelconque tangent aux deux côtés de l'angle xOy et coupant la droite OA en M et M′. Les deux homothéties $\left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OM}}\right)$ et $\left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OM'}}\right)$ transforment le cercle I en deux cercles ω et ω′ répondant à la question.

• **234.** 3ᵉ **Problème.** — *Construire un cercle tangent à un cercle donné et à deux droites concourantes données.*

Soit (fig. 210) ω le centre d'un cercle tangent en A au cercle donné O et tangent aux deux droites Ix et Iy. Les tangentes au cercle O parallèles à Ix et à Iy déterminent un losange MNPQ et l'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{A\omega}}\right)$ transforme I en l'un des points M, N, P ou Q.

Réciproquement soit A, un point commun au cercle O et à l'une des quatre droites IM, IN, IP ou IQ, soit IM par exemple. L'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AI}}{\overrightarrow{AM}}\right)$ transforme le cercle O en un cercle ω tangent en A au cercle O et tangent aux droites Ix et Iy. On obtient 8 solutions si Ix et Iy sont sécantes au cercle O, 6 solutions si une d'elles est tangente, l'autre sécante et 4 solutions dans les autres cas.

SUJETS D'EXAMEN

— **Produit de deux homothéties.** (*Alger*, ME.)

— **Homothétie dans le plan. Définition, propriétés. Figures homothétiques d'une droite, d'un triangle, d'un cercle.** (*Dijon*, ME.)

— **Homothétie : Définition et propriété caractéristique.** (*Nancy*, ME et MT.)

— **Figure homothétique d'un cercle, le centre d'homothétie étant un point de son plan. Deux cercles d'un même plan sont en général homothétiques de deux manières.** (*Pondichéry*, ME.)

— **Produit de deux homothéties. Conséquence : homothéties de trois cercles.** (*Caen*, MT.)

EXERCICES

● **188.** Les sommets B et C du triangle ABC sont fixes. Trouver les lieux géométriques des milieux des côtés AB et AC et du centre de gravité lorsque le sommet A décrit une droite Δ ou un cercle (Γ) donné.

● **189.** Dans un quadrilatère ABCD les sommets A, B et C sont fixes et on connaît la longueur AD ou l'angle (DA, DB). Trouver dans chacun des deux cas :

1° Les lieux des milieux de DA, DB et DC.

2° Le lieu du milieu du segment RS qui joint les milieux de AC et BD.

● **190.** On donne deux droites fixes D et D' se coupant en O; on projette un point variable M en A sur D et en B sur D'. Trouver le lieu géométrique du point M lorsque la droite AB a une direction donnée.

● **191.** Soit un angle aigu xOy. Un point variable M de Oy se projette en A sur Ox et on mène par M un segment MP parallèle à Ox et de même sens tel que $MP = k MA$ où k est un nombre positif donné. Trouver le lieu géométrique du point P.

● **192.** Deux cercles fixes égaux O et O' se coupent en A et B. Une sécante variable passant par A coupe le premier en P, le second en Q. Soit M le point de cette sécante tel que $\overline{AM} = k(\overline{AP} + \overline{AQ})$. Trouver le lieu géométrique du point M.

● **193.** Un cercle variable est tangent à une droite fixe D en un point fixe A. Trouver les lieux géométriques des points de contact avec le cercle des tangentes parallèles à une direction donnée Δ.

● **194.** Un cercle variable est tangent à deux droites sécantes données Ox et Oy. Trouver les lieux géométriques des points de contact avec le cercle des tangentes parallèles à une direction donnée Δ.

● **195.** On donne un angle xOy et un point variable M intérieur à cet angle. Les parallèles menées par M à Ox et Oy coupent Oy en B et Ox en A de façon que $MA = k MB$ où k est un nombre donné.

Trouver le lieu géométrique du point M.

● **196.** Deux cercles inégaux O et O' sont tangents en A. On mène dans le premier une corde variable AB et dans l'autre la corde AC perpendiculaire à AB.

1° Montrer que la droite BC passe par un point fixe.

2° Trouver les lieux géométriques de la projection P de A sur la droite BC et du milieu M de BC.

● **197**. On considère deux cercles ω et ω' sécants en A et B et un point variable P qui décrit une sécante issue de B coupant les cercles en C et C'. Soit M l'intersection du premier cercle avec la bissectrice intérieure de l'angle PAC et M' l'intersection du second avec la bissectrice intérieure de l'angle PAC'.

1° Calculer (AM, AM') en fonction de $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$ et montrer que MM' passe par un point fixe.

2° Lieu du milieu I de MM'. Comparer les cercles AMM' et BMM'.

● **198**. Soient deux cercles inégaux O et O', de diamètres AB et AC tangents en A à la droite Δ. D'un point M de Δ on mène les tangentes MP et MQ aux deux cercles O et O'. Les droites AQ et BP se coupent en R et les droites AP et CQ en S.

1° Montrer que les droites BP, CQ et Δ sont concourantes et que la droite RS est perpendiculaire à Δ.

2° Montrer que le cercle de diamètre RS est tangent aux cercles O et O'.

3° La droite OP coupe AR en I et la droite O'Q coupe AS en J. Trouver l'enveloppe des droites PQ et IJ lorsque M varie sur Δ.

● **199**. Dans un triangle ABC les sommets B et C sont fixes et les médianes issues de B et C sont perpendiculaires.

1° Lieu géométrique de A. Démontrer que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 5\overline{BC}^2$.

2° Construire le triangle ABC connaissant l'angle BAC.

● **200**. 1° Lieu des points dont le rapport des distances à deux plans donnés est constant ?

2° En déduire le lieu des points dont les distances à trois plans donnés sont proportionnelles à des nombres donnés α, β, γ.

3° Montrer qu'il y a en général 8 points dont les distances aux plans des 4 faces d'un tétraèdre sont proportionnelles à des nombres donnés α, β, γ, δ.

● **201**. Les six centres d'homothétie positive de quatre sphères prises deux à deux sont, dans un même plan, les six sommets d'un quadrilatère complet. Montrer qu'il y a, en considérant des homothéties négatives, huit plans analogues.

● **202**. Soient M, N, P; A', B', C' et α, β, γ les neuf points du cercle d'Euler ω d'un triangle ABC d'orthocentre H.

1° Démontrer que MB' = MC' et αB' = αC', puis que αM est bissectrice de B'MC' et B'αC' et médiatrice de B'C', que αA' est bissectrice de B'A'C' et que $\beta\gamma$ est médiatrice de HA'.

2° Les droites A'B' et $\beta\gamma$ se coupent en E, les droites B'C' et $\alpha\beta$ se coupent en F. Montrer que E, F, H sont alignés. Donner deux autres droites analogues à EF.

● **203**. 1° Montrer que les droites de Simson du triangle ABC relatives à deux points M et M' diamétralement opposés sur le cercle ABC sont rectangulaires. Lieu de leur point commun lorsque M varie sur le cercle.

2° La droite de Simson relative à M coupe le cercle d'Euler du triangle ABC en deux points N et P. Montrer que les arcs décrits par N et P lorsque M varie sont dans le rapport — 2.

3° En déduire qu'il y a sur le cercle ABC trois points dont la droite de Simson est tangente au cercle d'Euler. Étudier la figure formée par ces trois points M_1, M_2 et M_3 et par les points M'_1, M'_2, M'_3 correspondants.

— Construire un triangle ABC connaissant :

● **204**. L'angle A et les longueurs des médianes issues de B et C.

● **205**. Les angles B et C ainsi que la distance OH du centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.

● **206**. Le sommet A, le centre de gravité G et sachant que les sommets B et C appartiennent à deux droites (ou cercles) données.

● **207**. Le rapport des côtés AB et AC, l'angle A et le périmètre du triangle.

● **208**. Les longueurs AB et AC ainsi que celle de la bissectrice intérieure AD.

● **209**. Étant donné un triangle ABC, inscrire dans ce triangle un carré MNPQ de telle sorte que M et N soient sur le côté BC, P sur le côté CA et Q sur le côté AB.

● **210.** Étant donné un demi-cercle de diamètre AB, inscrire dans ce demi-cercle un carré MNPQ de façon que M et N soient sur AB, P et Q sur l'arc du demi-cercle.

● **211.** On donne un cercle C et une droite D. Construire un cercle dont le centre ω soit sur la droite D, passant par un point donné A de cette droite et tangent au cercle C.

● **212.** 1° Lieux des points de contact des plans parallèles à un plan P, tangents à une sphère variable ω inscrite dans un cône de révolution (Γ) donné.

2° Construire une sphère ω inscrite à (Γ) et tangente à P.

● **213.** Le sommet A et le cercle O circonscrit au triangle ABC sont fixes, tandis que l'angle (AB, AC) est constant. On achève le parallélogramme BACD.

1° Lieux du centre de gravité G et de l'orthocentre H du triangle ABC.

2° Lieux du point D et de l'orthocentre H_1, du triangle BCD.

3° Lieux du centre de gravité G_1 et du centre du cercle O_1 circonscrit au triangle BCD.

● **214.** On considère deux cercles fixes $\omega(R)$ et $\omega'(R')$ tangents intérieurement et deux rayons parallèles et de même sens $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega' M'}$.

1° Soit $O(\rho)$ un cercle quelconque et $\overrightarrow{OP}$ le rayon parallèle à $\overrightarrow{\omega M}$ et de même sens. Montrer que les enveloppes de MM', PM et PM' sont trois points fixes alignés I, A et A'. Calculer en fonction de R, R' et ρ le rapport $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}$.

2° On se donne deux points A et A' alignés avec I. Déterminer le lieu du point de rencontre de AM et A'M'.

● **215.** On donne dans un plan deux droites rectangulaires Ox et Oy et sur Ox deux points fixes P et P' de part et d'autre de O. Un point variable I est équidistant de P et P' et les droites IP et IP' coupent Oy en A et A'.

1° Soient ω et ω' les centres des cercles POA et P'OA'. Montrer que $O\omega I\omega'$ est un parallélogramme, que l'un des centres d'homothétie des deux cercles est fixe et trouver le lieu de l'autre.

2° Les deux cercles ω et ω' se coupent en O et M. Trouver le lieu de M et démontrer que les points I, A, A', M sont cocycliques.

3° Montrer que le cercle décrit sur AA' comme diamètre reste tangent à deux droites fixes.

● **216.** Soient G, H et O le centre de gravité, l'orthocentre et le centre de la sphère circonscrite relatifs au tétraèdre orthocentrique ABCD. On désigne par A_1, B_1, C_1, D_1 les centres de gravité des faces, par A', B', C' et D' les pieds des hauteurs.

1° Montrer que H, G et O appartiennent au plan $AA'A_1$ et sont alignés, puis que :

$$\overrightarrow{GA} = -3\,\overrightarrow{GA_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GO} = 0.$$

2° Soit ω la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$. Montrer qu'elle se déduit de la sphère O par les homothéties $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$ et $\left(H, +\frac{1}{3}\right)$ et qu'elle passe en outre par A', B', C', D' et par les points α, β, γ, δ qui divisent $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{DH}$ dans le rapport -2 (*Sphère d'Euler ou des* 12 *points*).

3° Montrer que les milieux des arêtes et les pieds des perpendiculaires communes à deux arêtes opposées sont également 12 *points d'une même sphère de centre* G qui contient les cercles d'Euler des quatre faces du tétraèdre ABCD.

● **217.** Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point fixe A sur la demi-droite Ox, un point fixe B sur la demi-droite Oy (OA > OB). On désigne par (α) un cercle quelconque tangent en A à Ox et par (β) un cercle quelconque tangent en B à Oy.

1° Un cercle (α) étant donné, construire les cercles (β) tangents à ce cercle (α). Nombre de solutions.

2° M désignant le point de contact de deux cercles (α) et (β) tangents entre eux, on appellera B' le point où la droite AM recoupe (β) et A' le point où la droite BM recoupe (α). Montrer que le lieu de B' quand les cercles (α) et (β) varient en restant

tangents se compose de deux droites que l'on appellera b_1 et b_2. De même le lieu de A' se compose de deux droites a_1 et a_2 respectivement parallèles à b_1 et b_2.

3° On suppose que les cercles (α) et (β) varient en restant tangents, A' étant sur a_1 et B' sur b_1. Montrer que le lieu de M est un cercle Γ et que la tangente commune aux cercles (α) et (β) coupe Γ sous un angle constant. Qu'arrive-t-il si l'on suppose A' sur a_2 et B' sur b_2?

4° Déterminer les cercles (α) et (β) de telle manière qu'ils soient tangents entre eux et égaux. Nombre de solutions. *(Paris.)*

● **218.** Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires fixes $x'Ox$, $y'Oy$. On marque sur $y'Oy$ le point fixe A d'ordonnée $\overline{OA} = h$. On considère un triangle variable T de sommet A, dont l'axe $x'Ox$ porte les deux autres sommets B et C et tel que le cercle circonscrit soit tangent en A à la droite $y'Oy$.

1° Que peut-on dire de l'orthocentre H du triangle T? Trouver et limiter le lieu de son centre de gravité. Examiner comment varie le cercle passant par les milieux des trois côtés.

2° On projette orthogonalement le point A en K et K' et en L et L' sur les bissectrices intérieures et extérieures des angles B et C du triangle T. Montrer que les quatre points K, K', L, L' sont alignés sur une droite fixe.

3° Quelle relation indépendante de h vérifient constamment les côtés du triangle ABC ? *(Espagne.)*

● **219.** On considère en géométrie plane la transformation ponctuelle T définie de la façon suivante : on donne une droite fixe (D) et deux points fixes distincts A et B; on suppose que B n'est pas sur (D) et que la droite AB n'est pas parallèle à (D). Le point M transformé de m par la transformation T est l'homothétique de A dans l'homothétie de centre variable m qui transforme B en un point variable P de la droite (D).

1° Construire M quand on se donne m en dehors de la droite (U) menée par B parallèlement à (D). Construire m quand on se donne M en dehors de la droite (V) déduite de (D) par la translation du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2° Soient M et M' les transformés respectifs de m et m', P et P' les points où les droites mB et $m'B'$ rencontrent (D). Le vecteur $\overrightarrow{P'M'}$ correspond au vecteur $\overrightarrow{PM}$ dans une homothétie (ou une translation) variable avec m et m'. En déduire que les droites mm' et MM' concourent sur (D) ou sont parallèles à (D).

3° Démontrer que le lieu de M est une droite L quand m décrit une droite l distincte de (U).

4° Montrer que L est parallèle à la droite qui joint A au point I intersection des droites l et U. *(Poitiers.)*

● **220.** Soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy et une droite D coupant Ox en M et Oy en P.

1° Lieu géométrique du centre ω du cercle Γ circonscrit au triangle OMP lorsque la droite D varie en restant parallèle à elle-même, l'abscisse de M étant positive. Montrer que les cercles Γ sont tangents en O à une droite fixe dont on précisera la direction par rapport à D. Lieu des points de contact des tangentes aux cercles Γ parallèles à Ox.

2° On considère une droite fixe Δ d'équation $y = a$ coupant les cercles Γ définis au 1° en B et C. Lieux géométriques des centres des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle O au triangle OBC lorsque le cercle Γ varie.

3° Construire le cercle Γ de façon que $OB = k\,OC$, k nombre arithmétique donné.

4° Les tangentes en B et C au cercle Γ se coupent en A et F est le milieu de BC. Lieux des centres I et J des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle A au triangle ABC. Si m désigne la pente de la droite OI, quelles sont les équations des lieux de I et J? Que peut-on dire des points A, F, I, J? Quelle relation existe entre les ordonnées de A, de I et de J? En déduire l'équation du lieu de A. Cas où $m = 1$.

(Maroc.)

DIXIÈME LEÇON

SIMILITUDE PLANE DIRECTE

• **235. Définition.** — On appelle ***similitude plane directe*** le produit d'une homothétie par un déplacement dans le plan.

Or, toute homothétie négative $H(O, -k)$ est le produit de l'homothétie positive $H(O, k)$ par la symétrie-point $S(O)$. Dans le plan, le produit de la symétrie-point $S(O)$ par le déplacement D est un déplacement D'. On obtient donc :

$$H(O, -k) \times D = H(O, k) \times S(O) \times D = H(O, k) \times D'.$$

Toute similitude plane directe est le produit d'une homothétie positive de rapport k par un déplacement d'angle θ.

k est le rapport de la similitude et θ l'angle de la similitude. Deux figures F et F' homologues dans une similitude plane directe sont dites *directement semblables*. Notons qu'un déplacement plan est une similitude de rapport 1 et qu'une homothétie dans le plan est une similitude d'angle nul ou égal à π.

• **236. Propriétés.** — Dans toute similitude plane directe S de rapport k et d'angle θ :

1° ***Le rapport de deux segments homologues est égal au rapport de similitude et l'angle de deux vecteurs homologues est égal à l'angle de la similitude.***

L'homothétie positive (O, k) transforme $\overrightarrow{AM}$ en $\overrightarrow{A_1M_1} = k\,\overrightarrow{AM}$ et le déplacement D transforme $\overrightarrow{A_1M_1}$ en $\overrightarrow{A'M'}$ tel que $A'M' = A_1M_1$ et $(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$

Donc : $A'M' = k\,AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta.$

2° ***Un angle orienté a pour homologue un angle orienté égal.***

L'égalité $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) = \theta$ entraîne (n° 42) :

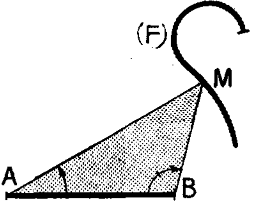
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}).$$

• **237. Théorème.** — ***Toute similitude plane directe est définie par la donnée de deux vecteurs homologues $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.***

Toute similitude transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 211) a pour rapport $k = \frac{A'B'}{AB}$. D'après ce qui précède l'homologue M' d'un point quelconque M vérifie :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \quad \text{et} \quad A'M' = k\,AM.$$

Ce qui suffit à déterminer le point M′. C'est le point qui avec A′ et B′ forme un triangle A′B′M′ directement semblable au triangle ABM.



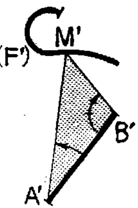


Fig. 211.

• **238. Corollaires.** — 1° *Si le point* M *n'est pas sur la droite* AB *son homologue* M′ *est défini par :* (A′B′, A′M′) = (AB, AM) et (A′B′, B′M′) = (AB, BM).

Ces relations suffisent donc pour que les deux triangles ABM et A′B′M′ soient directement semblables :

Pour que deux triangles soient directement semblables, il faut et il suffit qu'ils aient deux angles de droites respectivement égaux.

2° Une similitude plane directe ne peut avoir plus d'un point double car si A et B coïncident avec A′ et B′, il en est de même de M et M′ et on a affaire à la transformation identique.

• **239. Théorème fondamental.** — ***Toute similitude plane directe, autre qu'une translation admet un point double unique*** O ***et est équivalente au produit commutatif d'une homothétie et d'une rotation de même centre*** O.

1° Soit S une similitude de rapport k et d'angle θ définie par les vecteurs homologues $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 212). On a donc (n° 236) :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \qquad \text{et} \qquad A'B' = k\,AB. \qquad (1)$$

Le point double O, s'il existe, vérifie les relations :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \qquad \text{et} \qquad OA' = k\,OA. \qquad (2)$$

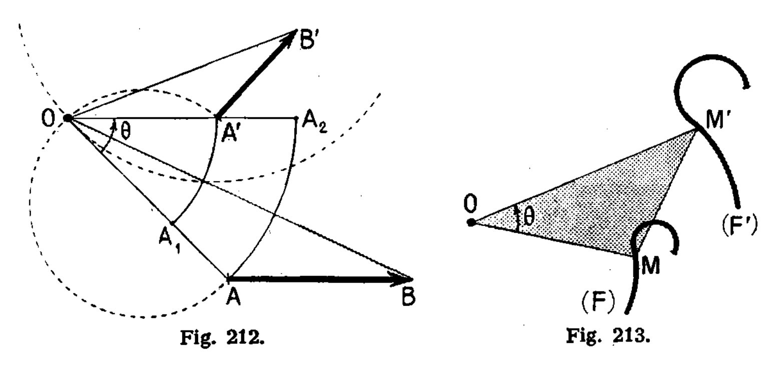


Fig. 212. Fig. 213.

Le point O est donc l'intersection unique de l'arc de cercle AA′ capable de l'angle de vecteurs θ (n° 58) et du cercle (ou droite) lieu des points M du plan

tels que $\frac{MA'}{MA} = k$ (nº 93). Il n'y a exception que si l'on a simultanément $k = 1$ et $\theta = 0$, c'est-à-dire si S est une translation.

Les relations (1) et (2) donnent alors : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ soit $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$. Cette relation jointe à $A'O = k\,AO$ montre que le point O est invariant dans la similitude S définie par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

2º La similitude S est donc, aussi bien, définie par les vecteurs homologues $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$. Or l'homothétie (O, k) transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA_1}$ et la rotation (O, θ) transforme $\overrightarrow{OA_1}$ en $\overrightarrow{OA'}$. De même la rotation (O, θ) transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA_2}$ et l'homothétie (O, k) transforme $\overrightarrow{OA_2}$ en $\overrightarrow{OA'}$. Le produit commutatif de l'homothétie (O, k) par la rotation (O, θ) est une similitude directe qui transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA'}$ donc (nº 237) équivalente à S.

Le point O *se nomme centre de la similitude* S que nous représenterons par le symbole S (O, k, θ). Notons que cette similitude est aussi le produit de l'homothétie négative H (O, $-k$) par la rotation (O, $\theta + \pi$).

• **240. Corollaires.** — 1º ***La similitude*** S (O, k, θ) ***qui transforme*** M ***en*** M′ ***est caractérisée par les relations :***

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \textit{et} \quad OM' = k\,OM. \qquad (1)$$

Le triangle OMM′ qui reste directement semblable à lui-même est le *triangle caractéristique* de la similitude S (fig. 213).

2º ***Toute similitude est définie par son centre*** O ***et un couple de points homologues*** M ***et*** M′. Les relations (1) déterminent k et θ.

3º D'autre part, le point M est le transformé de M′ dans la similitude S$\left(O, \frac{1}{k}, -\theta\right)$. La transformation n'est donc réciproque que dans le cas où $k = 1$, $\theta = \pi$, c'est-à-dire dans le cas de la symétrie par rapport à O.

• **241. Propriétés du centre de similitude.** — 1º Soit $\overrightarrow{A'M'}$ le transformé du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la similitude S (O, k, θ). Les relations

$$OM' = k\,OM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{montrent que :}$$

Le centre de similitude appartient aux cercles lieux des points dont le rapport des distances à deux points homologues M′ *et* M *est égal à* k *et aux arcs capables de l'angle de vecteurs* θ *relatifs à deux point homologues.*

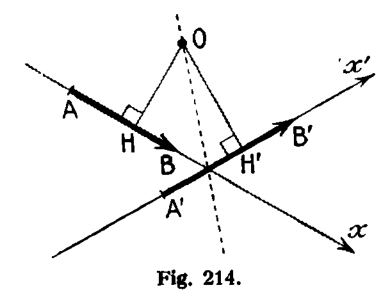


Fig. 214.

2º Soient H et H′ les projections de O sur les axes homologues $\overrightarrow{Ax}$ et $\overrightarrow{A'x'}$ qui se coupent en I (fig. 214). Les points H et H′ sont homologues dans la similitude : $(\overrightarrow{Hx}, \overrightarrow{HO}) = (\overrightarrow{H'x'}, \overrightarrow{H'O})$ et $OH' = k\,OH$. On a donc entre les

distances orientées de O aux deux axes $\overrightarrow{A'x'}$ et $\overrightarrow{Ax}$ (nº 231) la relation :

$$[O, \overrightarrow{A'x'}] = k\,[O, \overrightarrow{Ax}].$$

Le centre de similitude appartient aux droites lieux des points dont le rapport des distances orientées à deux axes homologues $\overrightarrow{A'x'}$ et $\overrightarrow{Ax}$ est égal à $+ k$.

● **242. Théorème.** — ***Le centre de similitude, deux points homologues et l'intersection de deux droites homologues issues de ces points sont sur un même cercle.***

Soit I le point d'intersection des droites homologues AM et A'M' dans la similitude (O, k, θ) (fig. 215). L'égalité $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta + 2k\pi$ entraîne $(OA, OA') = (IA, IA') = \theta + k\pi$. Les quatre points O, I, A et A' sont donc sur un même cercle et il en est de même de O, I, M et M'.

Le centre O de la similitude définie par $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ est donc le second point commun aux cercles IAA' et IMM'.

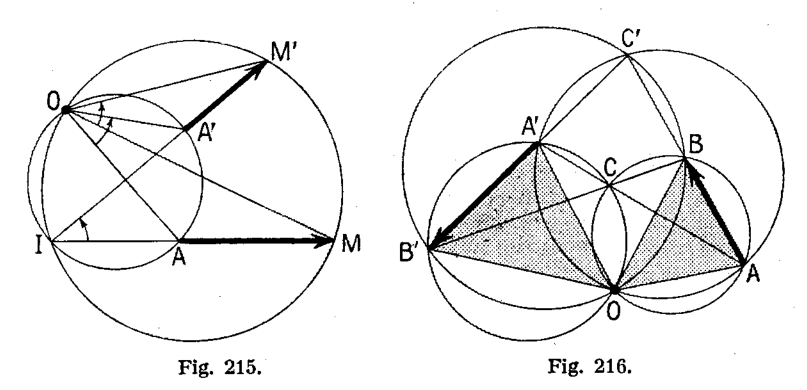


Fig. 215. Fig. 216.

● **243. Remarques.** — 1º Soit O le centre de la similitude S (O, k, θ) qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 216). Les triangles OAA' et OBB' sont directement semblables (nº 240) et il en est de même des triangles OAB et OA'B' car ils sont homologues dans la similitude S :

***Si deux triangles* OAA' *et* OBB' *sont directement semblables il en est de même des triangles* OAB *et* OA'B'.**

2º Les triangles OAA' et OBB' étant directement semblables se correspondent dans une similitude S' de centre O qui transforme $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$. Donc :

***Le centre de la similitude qui transforme* $\overrightarrow{AB}$ *en* $\overrightarrow{A'B'}$ *est aussi celui de la similitude qui transforme* $\overrightarrow{AA'}$ *en* $\overrightarrow{BB'}$**

3º En désignant par C le point de rencontre de AA' et BB' et par C' le point de rencontre de AB et A'B', on voit d'après le théorème nº 242 que les quatre cercles AA'C', BB'C', ABC et A'B'C sont concourants en O. On retrouve la propriété du quadrilatère complet établie au nº 69.

• **244. Transformées d'une droite et d'un cercle.** — 1° Toute similitude transforme une droite D en une droite D'. Réciproquement la droite donnée D' est la transformée de la droite donnée D dans toute similitude qui transforme un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ de D en un vecteur donné $\overrightarrow{A'B'}$ de D'. La droite D' est aussi la transformée de D (fig. 214) dans la similitude qui a pour centre un point O quelconque non situé sur D ou D' et dans laquelle la projection H de O sur D a pour homologue la projection H' de O sur D'.

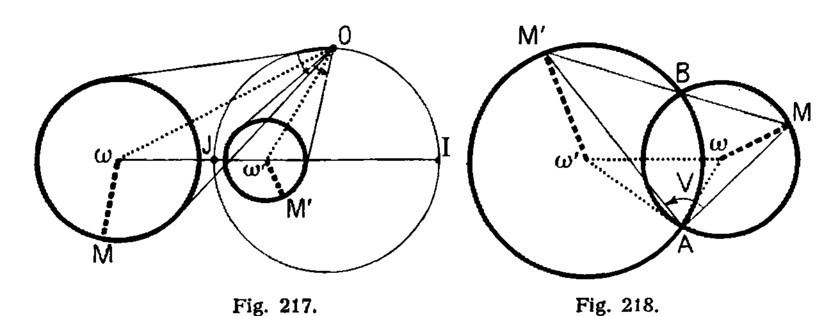


Fig. 217. Fig. 218.

2° La similitude (O, k, θ) transforme (fig. 217) le cercle donné (ω, R) en un cercle (ω', R'). Le centre ω' de ce cercle est le transformé de ω et son rayon R' est égal à kR. Lorsqu'il existe l'angle des tangentes menées de O au cercle ω est égal à l'angle des tangentes menées de O au cercle ω'. *On dit que les cercles* ω *et* ω' *sont vus du point* O *sous le même angle.*

Réciproquement un cercle donné (ω', R') est le transformé du cercle donné (ω, R) dans toute similitude de rapport $k = \frac{R'}{R}$ qui transforme le point ω en ω'. Pour qu'un point O soit le centre d'une telle similitude il faut et il suffit que : $\frac{O\omega'}{O\omega} = \frac{R'}{R}$. Le lieu du point O est donc le cercle ayant pour diamètre le segment IJ qui joint les centres d'homothétie I et J des deux cercles ω et ω'. *Ce cercle est le cercle de similitude des deux cercles donnés et le lieu des points d'où on les voit sous le même angle.*

En particulier (fig. 218) si les cercles donnés sont sécants en A et B, il se correspondent dans la similitude de centre A qui transforme ω en ω'. L'égalité des angles homologues $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M}) = (\overrightarrow{\omega' A}, \overrightarrow{\omega' M'})$ entraîne l'égalité (BA, BM) = (BA, BM') ce qui montre que MM' passe par B.

Deux cercles sécants se correspondent dans une similitude qui a pour centre l'un de leurs points communs, et la droite qui joint deux points homologues sur ces cercles passe par l'autre point commun.

Il en résulte que *le triangle* AMM' *reste directement semblable au triangle* Aωω', que l'angle de la similitude $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'}) = V$, c'est-à-dire à l'angle en A des deux cercles orientés dans le même sens (n° 67).

• **245. Produit de similitudes planes directes.** — La similitude directe $S_1 (O_1, k_1, \theta_1)$ transforme la figure F en F_1 et la similitude directe $S_2 (O_2, k_2, \theta_2)$ transforme la figure F_1 en F_2. Les figures F et F_2 directement semblables à F_1 sont directement semblables entre elles et se correspondent dans une similitude S. Désignons par $\overrightarrow{A_1B_1}$ le transformé de $\overrightarrow{AB}$ dans la similitude S_1 et par $\overrightarrow{A_2B_2}$ le transformé de $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans la similitude S_2.

On a : $$A_2B_2 = k_2\, A_1B_1 = k_1k_2\, AB$$

et $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \theta_1 + \theta_2.$$

Le produit des similitudes S_1 et S_2 est donc une similitude S dont le rapport k est égal à k_1k_2 et dont l'angle θ est égal à $\theta_1 + \theta_2$. Ce résultat se généralise :

Le produit de plusieurs similitudes directes de rapports respectifs $k_1, k_2 \dots k_n$ ***et d'angles*** $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$ ***est une similitude directe*** S ***de rapport*** $k = k_1 k_2 \dots k_n$ ***et d'angle*** $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$

En réduisant la valeur de θ de façon à avoir $-\pi < \theta \leq \pi$ les différentes éventualités pour S sont données par le tableau :

	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta \neq 0$ et π
$k = 1$	Translation	Symétrie-point O	Rotation (O, θ)
$k \neq 1$	Homothétie (O, k)	Homothétie $(O, -k)$	Similitude (O, k, θ)

• **246. Similitude plane inverse.** — C'est le produit d'une similitude plane directe par une symétrie-droite dans le plan. Dans cette transformation deux segments homologues sont dans un rapport constant k et deux angles orientés homologues sont opposés.

Une similitude plane inverse Σ est définie par la donnée de deux vecteurs homologues AB et A'B'. Si $A'B' = k\, AB$ l'homologue M' de tout point M du plan est défini par :
$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$
et $A'M' = k\, AM$.

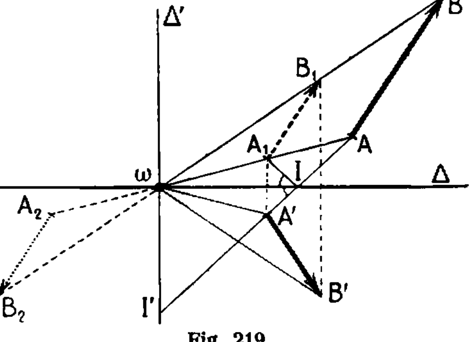


Fig. 219.

Pour $k = 1$ on a affaire à un antidéplacement (n° 163). Supposons donc $k \neq 1$ (fig. 219) et par le point I tel que $\overrightarrow{IA'} + k\,\overrightarrow{IA} = 0$ menons l'axe $\vec{\Delta}$ tel que $(AB, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, A'B')$. La symétrie-droite d'axe Δ transforme $\overrightarrow{A'B'}$ en un vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ tel que $\overrightarrow{A_1B_1} = k\,\overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ est donc le transformé

de $\overrightarrow{AB}$ dans une homothétie positive (ω, k) dont le centre ω appartient à Δ bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA_1})$ car $\frac{\overrightarrow{\omega A_1}}{\overrightarrow{\omega A}} = \frac{IA_1}{IA} = k$. Le produit de l'homothétie (ω, k) par la symétrie d'axe Δ est une similitude inverse qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$. Ce produit commutatif est donc équivalent à la similitude inverse Σ.

Toute similitude inverse de rapport $k \neq 1$ est le produit d'une homothétie positive de rapport k par une symétrie droite dont l'axe Δ passe par le centre ω de l'homothétie.

On peut remplacer l'homothétie (ω, k) par l'homothétie $(\omega, -k)$ à condition de remplacer Δ par la droite Δ' perpendiculaire en ω à Δ. On en déduit que

Le point ω est le seul point double : *centre de la similitude.*

Les droites Δ et Δ' sont les seules droites doubles, Δ *est l'axe positif et* Δ' *l'axe négatif.* Ces droites Δ et Δ' sont respectivement les lieux des points qui divisent intérieurement et extérieurement le segment M'M qui joint deux points homologues dans le rapport k.

Le point ω appartient aux cercles lieux des points dont le rapport des distances à deux points homologues M' et M est égal à k, et aux droites lieux des points dont le rapport des distances orientées à deux axes homologues $\overrightarrow{D'}$ et $\overrightarrow{D}$ est égal à $-k$.

Notons que le produit de deux similitudes planes inverses est une similitude plane directe et que le produit d'une similitude plane inverse par une similitude plane directe est une similtude plane inverse.

APPLICATIONS.

• 247. Propriétés géométriques.

— La similitude permet d'établir un grand nombre de propriétés, en particulier des relations angulaires ou métriques entre les éléments d'une figure.

EXEMPLE. — *On considère un triangle* ABC *et un point donné* D. *On construit les triangles* ADE *et* DBF *directement semblables au triangle* ABC.

Comparer les triangles ABD, ACE *et* CBF. *Trouver la nature du quadrilatère* CEDF.

1° Les triangles ABC et ADE étant directement semblables (fig. 220) il en est de même des triangles ABD et ACE. Les triangles BAC et BDF étant directement semblables il en est de même des triangles BAD et BCF. Les trois triangles ABD, ACE et CBF sont donc directement semblables. On peut donc échanger les rôles de C et D.

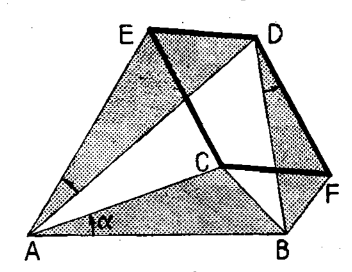


Fig. 220.

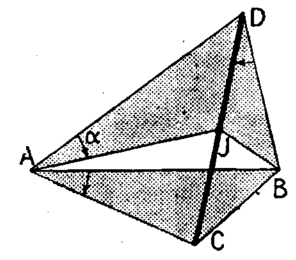


Fig. 221.

2° Désignons par α l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et posons $AC = k\,AB$. La similitude (A, k, α) transforme BD en CE tandis que la similitude (D, k, α) transforme $\overrightarrow{BD}$ en $\overrightarrow{FD}$. Les relations : $CE = k\,BD$ et $FD = k\,BD$ donnent $CE = FD$

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \alpha \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FD}) = \alpha, \quad \text{donnent} \quad (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{FD}) = 0.$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont égaux et le quadrilatère CEDF est un parallélogramme.

REMARQUE. — La configuration formée par les trois triangles directement semblables ABC, ADE et DBF se rencontre sous des aspects variés dans un grand nombre de questions. On peut la rétablir dès que l'on en connaît quatre points autres que les sommets du parallélogramme CEDF (seul le cas où A, B, E et F sont donnés est assez délicat. Il fait l'objet de l'exercice n° 243).

Ainsi (fig. 221) lorsqu'on se donne A, C et les deux points E et F confondus en J, on obtient un quadrangle inscriptible ABCD que nous retrouverons sous le nom de *quadrangle harmonique*, et dans lequel on peut échanger les deux couples AB et CD (n° 353).

• 248. Lieux géométriques. — Établissons la propriété suivante :

Lorsqu'un triangle* OMM′ *qui a un sommet* O *fixe varie dans son plan en restant directement semblable à lui-même :

1° ***Les courbes décrites par* M *et* M′ *sont directement semblables.***

2° ***Tout point* P *formant avec* M *et* M′ *un triangle directement semblable à un triangle fixe décrit une courbe semblable aux deux premières.***

1° Posons $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ et $OM' = k\,OM$ (fig. 222). Les deux nombres θ et k sont constants. Le point M′ se déduit du point M dans la similitude (O, k, θ). La courbe (C′) décrite par M′ est donc directement semblable à la courbe (C) décrite par M.

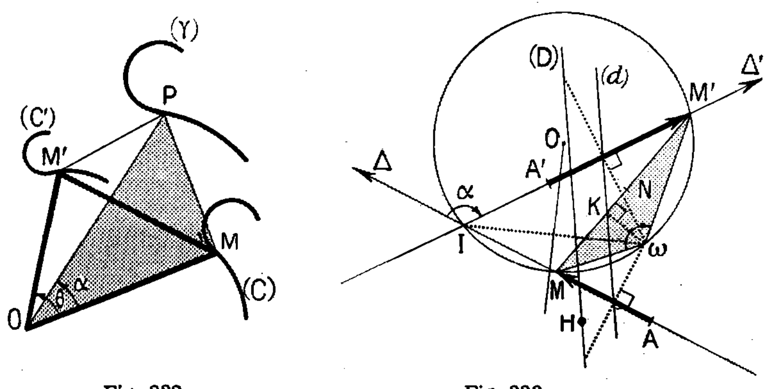


Fig. 222. Fig. 223.

2° Le quadrangle OMM′P reste semblable à lui-même. Il en est de même du triangle OMP et le lieu de P est une courbe (γ) directement semblable à (C) et à (C′).

Notons que la propriété subsiste lorsque P est un point qui divise MM′ dans un rapport algébrique donné.

• 249. Divisions rectilignes semblables. — En particulier (fig. 223) si un point M décrit un axe Δ, son transformé M′ dans la similitude donnée

(ω, k, α) décrit un axe Δ'. A toute division de l'axe Δ correspond une division semblable de l'axe Δ'. En désignant par A′ et B′ les transformés des points A et B

de Δ on a : $\overline{A'M'} = k\,\overline{AM}$ et $\dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ (1)

Le cercle ωMM′ *passe par l'intersection* I *de* Δ *et* Δ' (n° 242). D'après ce qui précède :

Tout point remarquable lié au triangle ωMM′ *décrit une droite* et la division décrite sur cette droite est semblable à celle décrite par M sur Δ.

Il en est ainsi de tout point P divisant le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ dans un rapport donné, du milieu N de MM′, de la projection K de ω sur $\overrightarrow{MM'}$, qui décrit la droite de Simson fixe de ω par rapport au triangle IMM′, du centre O du cercle ωMM′ (médiatrice de ωI). Il en est de même de l'orthocentre H du triangle IMM′ qui décrit la droite de Steiner fixe de ω par rapport au triangle IMM′, et MH restant parallèle à elle même, les divisions décrites par M et H sont semblables d'après le théorème de Thalès.

Réciproquement M et M′ décrivent sur Δ et Δ' des divisions semblables si :

1° M et M′ vérifient l'une des relations (1) car elles entraînent

$$A'M' = k\,AM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha.$$

2° Si le cercle IMM′ coupe le cercle IAA′ en un point fixe ω car (n° 244) les triangles ωAM et ωA′M′ restent directement semblables.

3° Si, le point M_0 décrivant une droite Δ_0, les droites M_0M et M_0M' sont respectivement parallèles à des directions fixes.

• **250. Divisions circulaires directement semblables.** — Lorsque (fig. 224) le point M décrit un cercle (O, R) son transformé M′ dans la similitude (ω, k, α) décrit un cercle (O′, R′). Si A et A′ sont des positions particulières de M et M′ on a la relation caractéristique :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}).$$

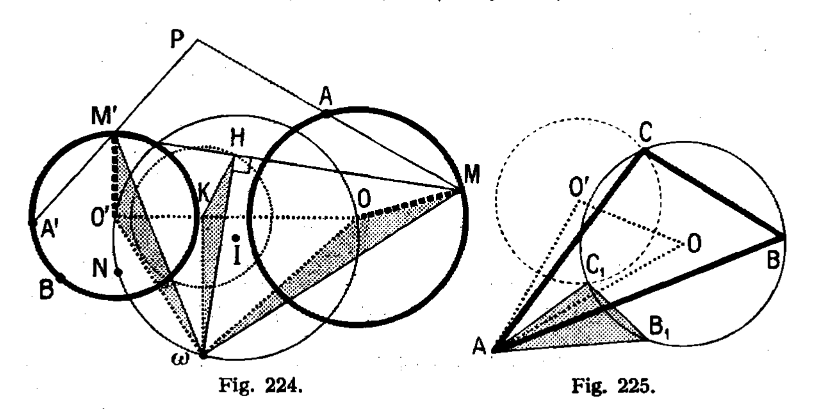


Fig. 224. Fig. 225.

Le point d'intersection N de OM et O′M′ décrit (deux fois) le cercle ωOO′ de centre I; le point d'intersection P de AM et A′M′ décrit le cercle ωAA′ de

centre J_o et *tout point remarquable du triangle* $\omega MM'$ *décrit un cercle ayant pour centre son homologue du triangle semblable* $\omega OO'$ *et vu de* ω *sous le même angle que les cercles* O *et* O'.

Il en est ainsi du milieu de MM' (cercle centré au milieu de OO'), de la projection H de ω sur MM' (cercle centré en K projection de ω sur OO'), du centre J du cercle $\omega MM'$ (cercle centré en I et passant par J_o) etc...

Réciproquement on reconnaît que M et M' décrivent respectivement sur deux cercles donnés O et O' des divisions directement semblables si l'un des angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})$, (AM, A'M') ou (AM, BM') est constant, si en particulier AM et BM' sont parallèles ou perpendiculaires et d'une façon générale si M et M' décrivent des arcs homologues de même mesure algébrique. Si les cercles O et O' sont sécants en A, il suffit que l'angle (AM, AM') soit constant.

• **251. Problème de construction.** — *Construire un triangle* ABC *directement semblable à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$ *connaissant le point* A *et sachant que* B *et* C *appartiennent à un cercle donné* O.

Soit ABC un triangle répondant à la question (fig. 225). Construisons le triangle AOO semblable à $\alpha\beta\gamma$. Le point C appartient au cercle O et aussi au cercle O' transformé du cercle O dans la similitude de centre A qui transforme $\overrightarrow{AO}$ en $\overrightarrow{AO'}$. Si les deux cercles O et O' sont sécants le point B qui correspond au point d'intersection C est le transformé de C dans la similitude qui transforme $\overrightarrow{AO'}$ en $\overrightarrow{AO}$.

SIMILITUDE DANS L'ESPACE

• **252. Définition.** — ***On appelle similitude directe dans l'espace le produit d'une homothétie positive et d'un déplacement.***

Le rapport de deux segments homologues A'B' et AB est égal au rapport k de l'homothétie et constitue *le rapport de similitude*. Deux angles homologues sont égaux, deux triangles (ou deux polygones) homologues sont semblables. L'homothétie positive transformant un dièdre orienté en un dièdre orienté égal il en est de même de la similitude envisagée.

• **253. Théorème.** — ***Une similitude directe est définie par la donnée de deux triangles homologues semblables*** ABC ***et*** A'B'C'.

Le transformé de tout point M de l'espace est en effet déterminé par la double condition suivante :

1° *Les dièdres orientés* $(C', \overrightarrow{A'B'}, M')$ *et* $(C, \overrightarrow{AB}, M)$ *sont égaux.*

2° *Les triangles* A'B'M' *et* ABM *sont semblables.*

La première condition fixe le demi-plan A'B'M' d'arête A'B' et la seconde la position unique du point M' dans ce demi-plan.

Si A'B' = AB, c'est-à-dire si $k = 1$, la similitude directe est un déplacement. Nous supposerons donc $k \neq 1$. Lorsque M décrit une figure F, son homologue M' décrit une figure F' directement semblable à F.

• 254. Théorème. — ***Toute similitude directe de l'espace est équivalente au produit d'une homothétie* (O, k) *et d'une rotation dont l'axe* Δ *passe par le centre de cette homothétie.***

Soient F et F' deux figures homologues dans la similitude S de rapport k envisagée et soit I le centre de l'homothétie (I, k) qui transforme un point donné M en son homologue M' dans cette similitude. Cette homothétie transforme la figure F en une figure F_1 égale à la figure F'. Les figures égales F et F' ont un point homologue commun M'. La figure F' est donc la transformée de F_1 dans une rotation R (δ, θ) dont l'axe δ est issu de M' (n° 181) et $S = H(I, k) \times R(\delta, \theta)$.

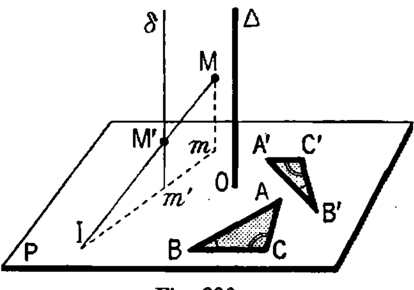


Fig. 226.

Dans cette transformation le plan P mené par I perpendiculairement à δ est invariant, et un triangle donné ABC de ce plan a pour transformé un triangle A'B'C' directement semblable à ABC dans ce plan. Soit O le centre de la similitude plane directe qui, dans le plan P, transforme ABC en A'B'C' et soit Δ l'axe perpendiculaire en O au plan P et de même sens que δ. Le produit commutatif de l'homothétie (O, k) par la rotation (Δ, θ) est une similitude directe qui transforme ABC en A'B'C', donc équivalente à S (n° 253).

Le point O, qui est le seul point invariant et la droite invariante Δ sont *le centre et l'axe de cette similitude* S que nous représenterons par le symbole S(O, k, Δ, θ).

L'axe Δ fait des angles égaux avec deux vecteurs ou deux plans homologues. Il en est de même du plan invariant P qui est, en outre, le lieu des points qui divisent les vecteurs, tels que M'M, joignant deux points homologues, dans le rapport k.

• 255. Similitude inverse dans l'espace. — ***On appelle similitude inverse dans l'espace le produit d'une similitude directe et d'une symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan.***

Dans cette transformation le rapport de deux segments homologues est égal au nombre constant k appelé *rapport de similitude.* Deux angles homologues sont égaux, deux triangles (ou deux polygones plans) homologues sont semblables, mais deux dièdres orientés homologues sont opposés. On verrait comme au n° 253 qu'une similitude inverse est définie par la donnée de deux triangles homologues semblables ABC et A'B'C'. Deux figures homologues de l'espace F et F' sont dites inversement semblables et toute homothétie de rapport $-k$ transforme F en une figure F_1 égale à F'.

Si $k \neq 1$ le théorème n° 254 reste valable pour une similitude inverse à condition de considérer une homothétie de rapport $-k$.

Si $k = 1$ les figures F et F' sont symétriques. La transformation se réduit par la même méthode au produit de la symétrie par rapport au plan invariant P par une rotation dont l'axe Δ est perpendiculaire à P ou par une translation parallèle à P (dans ce cas il n'y a pas de point double). Le plan invariant P est le lieu des milieux des segments joignant deux points homologues des figures F et F'.

• 256. Théorèmes. — 1° ***Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de similitude.***

Que la similitude de rapport k soit directe ou inverse le rapport de deux

segments homologues est égal à k. Soient AH et A'H' les hauteurs homologues des deux triangles semblables ABC et A'B'C'. On a :

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} B'C'.A'H' = \frac{1}{2} k\,BC.k\,AH = k^2 \frac{1}{2} BC.AH = k^2 S_{ABC}.$$

Si le polygone F, d'aire S, se décompose en triangles d'aires s_1, s_2 ... s_n le polygone semblable F', d'aire S', se décompose en triangles respectivement homologues, d'aires s'_1, s'_2 ... s'_n. On a :

$$S' = s'_1 + s'_2 + ... + s'_n = k^2 s_1 + k^2 s_2 + ... + k^2 s_n = k^2 (s_1 + s_2 + ... + s_n) = k^2 S.$$

Soit
$$\boxed{\frac{S'}{S} = k^2}$$

2° ***Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude.***

Soient B et B' les aires de base de deux pyramides semblables, h et h' leurs hauteurs, V et V' leurs volumes respectifs. On a :

$$V' = \frac{1}{3} B'h' = \frac{1}{3} k^2 B \times kh = k^3 \times \frac{1}{3} Bh = k^3 V.$$

Décomposons le polyèdre P en pyramides de volumes respectifs v_1, v_2 ... v_n et le polyèdre semblable P' en pyramides homologues des précédentes, de volumes respectifs v'_1, v'_2 ... v'_n. En désignant par V et V' les volumes des polyèdres P et P', on obtient :

$$V' = v_1' + v_2' ... + v'_n = k^3 v_1 + k^3 v_2 ... + k^3 v_n = k^3 (v_1 + v_2 ... + v_n) = k^3 V$$

d'où :
$$\boxed{\frac{V'}{V} = k^3.}$$

SUJETS D'EXAMEN

— Similitude plane. (*Toulouse*, ME.)

— Définition de la similitude plane. Montrer que toute similitude plane a un point double. (*Nancy*, MT.)

— Deux figures d'un même plan directement semblables peuvent en général se déduire l'une de l'autre par une rotation et une homothétie de même centre. (*Athènes*, ME.)

— Rapport des volumes de deux polyèdres semblables. (*Toulouse*, ME.)

EXERCICES

● **221**. On considère dans le plan une droite Δ, un point fixe A non situé sur Δ et un triangle rectangle isocèle variable ABC ayant le sommet de l'angle droit B sur Δ.

1° Lieu du sommet C lorsque B décrit Δ.

2° Lieu des milieux des côtés et du centre de gravité du triangle ABC.

● **222**. Soit un triangle AOB rectangle en O. Un point variable M décrit la perpendiculaire en A à la droite AB. La perpendiculaire en O à OM coupe AB en M'.

1° Montrer que le triangle MOM' reste semblable à un triangle fixe.

2° Lieu du milieu de MM' et du sommet P du rectangle MAM'P.

● **223**. Une similitude plane directe de centre O transforme A en A'. Construire un point M et son transformé M' connaissant :

1° La droite MM'
2° Un vecteur $\vec{V}$ égal à $\overrightarrow{MM'}$
3° Le milieu P de MM'
4° La médiatrice de MM'.

● **224**. Soit ω le point commun aux cercles ABC, AB'C' etc. du quadrilatère complet ABCA'B'C'. Démontrer que les trois angles $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'})$, $(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega B'})$, $(\overrightarrow{\omega C}, \overrightarrow{\omega C'})$ ont même bissectrice et que les trois produits $\omega A \cdot \omega A'$, $\omega B \cdot \omega B'$ et $\omega C \cdot \omega C'$ sont égaux.

● **225**. Un angle $xOy = 2\alpha$ tourne autour de son sommet fixe O de façon que le point fixe A reste à son intérieur.

1° Lieu des centres des cercles ω passant par A et tangents aux côtés de l'angle xOy.

2° Lieux des points de contact des cercles ω et des côtés de l'angle.

● **226**. Soient deux droites parallèles Δ et Δ' et un point fixe O. Une sécante variable issue de O coupe Δ et Δ' en M et M'. Soit ω le centre du cercle de diamètre MM'.

1° Lieux des points de contact des tangentes issues de O au cercle ω.

2° Montrer que chacun de ces lieux détermine une corde de longueur constante avec le cercle ω.

● **227**. Un triangle variable ABC a son sommet A fixe, la droite BC fixe et l'angle (AB, AC) constant.

1° Lieux des pieds des hauteurs BB' et CC' du triangle ABC. Préciser la position de ces lieux et trouver l'enveloppe de la droite B'C'.

2° Soit AA' la hauteur issue de A. Dans le cas où les trois angles du triangle ABC restent aigus, montrer que le périmètre du triangle A'B'C' est constant.

● **228**. Soient deux triangles directement semblables OAM et OA'M' de hauteurs OH et OH'. On désigne par ω, I, J les milieux de AA', MA' et M'A. Comparer les deux triangles ωIJ et OHH' et en déduire que les droites IJ et HH' sont perpendiculaires.

● **229**. On donne un cercle fixe de diamètre AB, un point M variable sur ce cercle et on construit le carré de sens direct AMNP. Trouver les lieux des points N et P.

● **230**. Étant donné un point A, un cercle de centre O, construire une corde BC de ce cercle telle que le triangle ABC soit directement semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$. En déduire les triangles ABC inversement semblables au triangle $\alpha\beta\gamma$.

● **231**. Soit un parallélogramme ABCD de centre O :

1° Montrer que tout parallélogramme inscrit MNPQ a même centre O.

2° Construire un losange d'angles donnés inscrit dans ce parallélogramme.

● **232.** 1° Lieux des sommets des triangles ABC semblables au triangle donné $\alpha\beta\gamma$ et dont les côtés BC, CA et AB passent par des points fixes M, N, P donnés.

2° Montrer que deux tels triangles se correspondent dans une similitude de centre fixe D.

3° Construire le triangle ABC connaissant un point remarquable du triangle ou la longueur BC.

● **233.** Soient I, J, K les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC, puis M, N, P les sommets de l'angle droit des triangles rectangles isocèles de sens direct BMC, CNA et APB.

1° Appliquer au vecteur $\overrightarrow{IN}$ le produit des similitudes $\left(C, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(B, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

2° Comparer les triangles BMN et MCP et montrer que les trois droites AM, BN et CP sont concourantes.

● **234.** On construit les triangles équilatéraux de sens direct BA′C, CB′A et AC′B de centres respectifs I, J, K.

1° Appliquer au vecteur $\overrightarrow{IJ}$ le produit des similitudes $\left(C, \sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(B, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ et en déduire la nature du triangle IJK.

2° Démontrer que les trois triangles ABC, A′B′C′ et IJK ont même centre de gravité.

● **235.** 1° Étudier le produit des trois similitudes qui transforment respectivement $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$.

2° Démontrer que le produit des similitudes $\left(O_1, \operatorname{tg} \alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(O_2, \operatorname{cotg} \alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ est une symétrie point dont le centre I est celui de la rotation d'angle 2α qui transforme O_2 en O_1.

● **236.** La similitude S_A transforme $\overrightarrow{AB_1}$ en $\overrightarrow{AB}$, la similitude S_B transforme $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{BA_1}$ et la similitude S_C de centre C transforme $\overrightarrow{A_1B}$ en $\overrightarrow{AB_1}$.

1° Quel est le produit de ces trois similitudes?

2° Soit C_1 le transformé de C dans S_A. Démontrer que les trois triangles A_1BC, AB_1C, ABC_1 sont directement semblables, puis que les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes en D.

● **237.** 1° Construire un quadrilatère $ACBC_1$ connaissant les sommets A et B, les angles $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BC}) = \beta$ et les rapports $\frac{AC_1}{AC} = k$ et $\frac{BC}{BC_1} = h$ (Construire d'abord un quadrilatère semblable AMPN et lui appliquer la similitude qui transforme $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AB}$).

2° Montrer que C est le centre de la similitude produit $S_A(A, k, \alpha) \times S_B(B, h, \beta)$ et C_1 celui de la similitude $S_B \times S_A$.

● **238.** Dans un quadriladère convexe inscriptible ABCD, on désigne par a, b, c, d les longueurs des côtés AB, BC, CD et DA. Soit E l'homologue de A dans la similitude de centre C qui transforme D en B.

1° Montrer que le point E appartient au prolongement de AB.

2° Calculer la longueur BE et trouver le rapport des segments CA et CE.

3° Construire le quadrilatère connaissant les longueurs de ses côtés.

● **239.** On considère un triangle ABC et trois triangles directement semblables entre eux BMC, CNA, APB. Soit Q le symétrique de M par rapport au milieu de BC.

1° Quelle est la nature des quadrilatères BMCQ et NAPQ?

2° Démontrer que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité et établir la relation $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$.

● **240.** *Pantographe généralisé.* — L'appareil se compose de quatre tiges OBA, ACM BM′ et CM′ articulées en B, A, C, M′ de façon à former un parallélogramme BACM′. Les deux premières tiges sont coudées en B et C de façon que les deux triangles OBA et ACM soient directement semblables.

1° Montrer que dans toute position de l'appareil le triangle OM'M est directement semblables aux deux précédents.

2° Le point O étant fixe les figures décrites par M et M' sont directement semblables.

3° A quelle condition l'appareil peut-il servir pour effectuer une rotation plane d'angle α?

● **241.** On considère un quadrilatère convexe inscriptible ACBD et on construit les triangles ADE et DBF directement semblables à ABC.

1° Montrer que E et F sont sur CD et que DE + DF = DC.

2° Évaluer les produits AD.BC et AC.BD et en déduire la relation de Ptolémée :

$$AB.CD = AC.BD + AD.BC.$$

● **242.** On construit trois triangles directement semblables OAB, COB et CDO.

1° Démontrer que O est le milieu de AD, qu'il est équidistant de AB, BC et CD puis que : $\overline{OA}^2 = \overline{OD}^2 = AB.CD$.

2° Étudier le cas de l'angle A ou de l'angle B du triangle OAB égal à un droit.

● **243.** On sait que si les trois triangles ABC, ADE et DBF sont directement semblables le quadrilatère CEDF est un parallélogramme de centre O.

1° On construit le triangle ABR directement semblable à AOE. Démontrer que les triangles ACR et AOD puis DOR sont directement semblables. En déduire les relations : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR})$ et $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = OA.OR$.

2° Connaissant A, B, E, F et par suite O et R, justifier la construction suivante de C et D : On prend les intersections de la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR})$ avec le cercle passant par A et R centré sur la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR})$.

● **244.** Soit un quadrilatère complet ABCA'B'C' et ω le point commun aux cercles ABC et AB'C', on achève les parallélogrammes BA'B'D et CA'C'E.

1° Démontrer que les triangles AωB' et ABD ainsi que AωC et AC'E sont semblables.

2° Les trois points A, D, E sont alignés et $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AB}.\overline{AB'}}{\overline{AC}.\overline{AC'}}$.

3° Montrer que les milieux de AA', BB' et CC' sont alignés.

● **245.** Soit J le centre de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{CB}$ et D le symétrique de C par rapport à J.

1° Montrer que J est aussi le centre de la similitude qui transforme $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{DB}$. Montrer que les cercles ACJ et CBJ sont tangents en C à BC et AC.

2° Montrer que le triangle DAB est directement semblable à JAC et JCB et que le quadrangle ABCD est inscriptible.

3° Construire un tel quadrangle connaissant A, B et J.

● **246.** On considère quatre triangles directement semblables ABM, CDN, ADP et CBQ.

1° Préciser la nature du quadrilatère MPNQ.

2° On achève les parallélogrammes AMBR et CNDS. Montrer que les deux quadrangles ABCD et PQRS ont même centre de gravité.

● **247.** Soit O le centre de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. On construit les triangles ADM et CBN semblables à ABO. Montrer que M et N sont symétriques par rapport au point O.

● **248.** Étant donné un quadrilatère ABCD et O le milieu de AD on construit les triangles ABM et DNC directement semblables à OBC. Démontrer que ces trois triangles sont semblables au triangle ONM.

● **249.** Un quadrilatère ABCD est circonscrit à un cercle de centre O. Les droites AB et CD se coupent en E et la perpendiculaire en O à EO coupe AB et CD en I et J.

1° Démontrer la similitude des triangles OIB, COB et CJO puis que l'on a :

$\overline{OI}^2 = \overline{OJ}^2 = \overline{IB}.\overline{JC} = \overline{IA}.\overline{JD}$. Comparer les divisions AIB et CJD.

2° Démontrer que le centre O du cercle inscrit dans le quadrilatère est situé sur la droite MN qui joint les milieux des diagonales AC et BD et que la division MON est semblable à chacune des deux divisions AIB et CJD.

● **250.** Soit un quadrilatère ABCD. On construit les points I et I′ qui divisent $\overrightarrow{AC}$ dans le rapport $\frac{AB}{CD}$ et les points J et J′ qui divisent $\overrightarrow{BD}$ dans le même rapport.

1° Montrer que IJ et I′J′ sont parallèles aux bissectrices de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et perpendiculaires en ω.

2° Les cercles de diamètre II′ et JJ′ se coupent en ω et en O. Comparer les triangles OAB et OCD, ωAB et ωCD et enfin ωAD et ωBC.

● **251.** Une similitude inverse est le produit de l'homothétie positive (O, k) par la symétrie par rapport à une droite Δ issue de O. Construire un point M et son transformé M′ connaissant :

1° La droite MM′, un vecteur égal à $\overrightarrow{MM'}$ ou le cercle OMM′;

2° Le milieu P de MM′ (transformer P en P′ et montrer que OM est parallèle à PP′);

3° La médiatrice de MM′ (elle coupe Δ sur le cercle OMM′).

● **252.** Soit A″ le transformé de A′ dans la similitude inverse de centre ω, d'axe Δ et de rapport k définie par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

1° Montrer que ω est l'intersection de AA″ avec la tangente en A′ au cercle AA′A″. En déduire une construction de ω et de Δ connaissant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

2° Montrer que le produit de la similitude inverse par elle-même est l'homothétie (ω, k^2) et que le point ω est le milieu du segment qui joint les pieds des bissectrices issues de A′ dans le triangle AA′A″.

● **253.** On considère deux triangles inversement semblables ωAB et ωA′B′ :

1° Démontrer que $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B'}) = (\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega A'})$, que les triangles ωAB′ et ωBA′ sont équivalents et que les produits scalaires $\overrightarrow{\omega A} \cdot \overrightarrow{\omega B'}$ et $\overrightarrow{\omega B} \cdot \overrightarrow{\omega A'}$ sont égaux.

2° Le rapport des distances orientées de ω à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ est égal à $-\frac{AB}{A'B'}$, et le rapport de ses distances orientées à $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{A'B}$ est égal à $-\frac{A'B}{AB'}$.

● **254.** On considère un cercle de diamètre AB et deux parallèles AA′ et BB′. La tangente en C coupe ces parallèles en A′ et B′ et coupe AB en I.

1° Démontrer que le cercle de diamètre A′B′ est tangent en C′ à AB. Comparer les triangles ABC et A′B′C′.

2° Démontrer que CC′ est antiparallèle à AA′ par rapport à IA et IC.

● **255.** Dans un triangle ABC, on projette A en A′ sur BC, B et C en B′ et C′ sur une droite donnée Ax et enfin B en B_1 sur AC et C en C_1 sur AB.

1° Comparer les triangles ABC et A′B′C′. Étudier le cas où Ax est bissectrice ou médiane.

2° Comparer les triangles $B'BB_1$ et $C'C_1C$.

● **256.** Dans un quadrilatère ABCD on projette A et C en A′ et C′ sur BD, B et D en B′ et D′ sur AC :

1° Montrer que les quadrilatères A′B′C′D′ et ABCD sont inversement semblables;

2° Construire le quadrilatère ABCD connaissant A′B′C′D′.

● **257.** Étant donné un triangle IAA′ et un rapport algébrique k on fait correspondre à tout point P de la droite AA′, le point M de IA et le point M′ de IA′ tels que $\overrightarrow{PM'} = k\,\overrightarrow{PM}$.

Montrer que P, M et M′ décrivent des divisions semblables relatives au même centre ω que l'on construira.

● **258.** Deux points M et M′ décrivent sur deux droites Ix et Ix' les divisions semblables définies par AB et A′B′. Par M et M′ on mène les droites Mz et $M'z'$ respectivement parallèles à deux directions données δ et δ′.

1° Montrer que le lieu du point M_0 commun à Mz et $M'z'$ est une droite A_0B_0.

2° En déduire les lieux de l'orthocentre H du triangle IMM' et du point P diamétralement opposé à I sur le cercle IMM'.

3° Les points H et P sont homologues dans une similitude inverse de centre I. Préciser ses éléments et montrer que les lieux de H et P sont antiparallèles par rapport à Ix et Ix'.

● **259.** On considère les divisions décrites sur Δ et Δ' par deux points M et M' se correspondant dans une similitude directe de centre ω.

1° Construire le lieu Δ_1 de la projection H de ω sur la droite MM'.

2° En déduire la construction de M et M' connaissant la longueur MM', la direction de MM' ou un point de la droite MM'.

● **260.** Reprendre le problème précédent en remplaçant Δ et Δ' par deux cercles Γ et Γ'.

● **261.** La similitude directe (ω, k, θ) transforme un point M du cercle O en un point M' du cercle O' qui coupe le cercle O en A. On pose $V = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$.

1° Démontrer que l'angle (AM, AM') est égal à $\frac{1}{2}(V + \theta)$.

2° Les cercles O et O' sécants en A étant donnés, construire le point ω correspondant à (AM, AM') = α (angle donné).

● **262.** Les points M et M' qui décrivent deux divisions rectilignes semblables sur les droites Qx et Qx' se correspondent dans la similitude directe (O, k, α). Soient Q et R les transformés de P et Q dans cette similitude.

1° Démontrer que OQ est bissectrice de $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR})$ et que $OR = k^2\, OP$. Déterminer le lieu (D) du symétrique φ de O par rapport à MM'. Que représente (D) pour le triangle QMM'?

2° Les pieds I et I' des bissectrices intérieure et extérieure issues de O du triangle OMM' décrivent deux droites Δ et Δ' perpendiculaires en ω. Démontrer que le lieu du milieu K de II' est la médiatrice de $O\omega$. Cette médiatrice coupe Qx et Qx' en K_1 et K_2 homologues dans la similitude de centre O. En déduire que ω est situé sur D.

3° Le produit de l'homothétie (ω, k) par la symétrie droite d'axe Δ transforme MPQ en M'QR. En déduire que ω divise $\overline{RP}$ dans le rapport k^2, que l'angle $(O\omega, OQ)$ est droit et que le cercle PQR tangent en Q à ωQ est centré sur $O\omega$.

● **263.** Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point fixe A sur Ox tel que $\overline{OA} = a > 0$, un point fixe B sur Oy tel que $\overline{OB} = b > 0$ et soit I le milieu de AB. On décrit les cercles de centres respectifs A et B passant par O. Ces cercles se coupent en S. On fait pivoter autour de O un angle droit dont un côté coupe en C le cercle A et l'autre côté coupe en D le cercle B. On désigne par θ l'angle saillant $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.

1° Calculer en fonction de a, b, θ les longueurs OC, OD et CD. Montrer que les triangles OAB et OCD sont directement semblables et trouver l'enveloppe de CD.

2° Montrer que la projection H de O sur CD décrit le cercle de diamètre OS et que le milieu M de CD et le point de rencontre N de AC et BD décrivent le cercle de diamètre AB. Comparer les arcs homologues décrits par M et N.

3° Soit Q le point de rencontre des tangentes en C et D aux cercles A et B. Démontrer que les points O, C, D, N et Q sont sur un cercle de centre M et que IM est médiatrice de ON. La droite OQ coupe le cercle de diamètre AB en R, démontrer que $\overrightarrow{RQ} = 2\,\overrightarrow{IM}$.

● **264.** On donne dans un plan deux cercles fixes O et O', sur le premier un point fixe A et un point mobile M, sur le second un point fixe A' et un point mobile M' tels que les droites AM et A'M' soient parallèles.

1° Montrer que l'on peut d'une infinité de façons remplacer respectivement A et A' par deux autres points fixes B et B' des cercles O et O' de telle sorte que BM et B'M' restent parallèles. En particulier on peut remplacer A et A' par les points diamétralement opposés C et C'.

2° Sur chacune des droites MM', BB' on prend le point M_1 ou le point B_1 définis par les relations $\overline{MM_1} = k\,\overline{M'M_1}$; $\overline{BB_1} = k\,\overline{B'B_1}$ où k est une constante algébrique. Montrer que le lieu géométrique de chacun des points M_1, B_1 est un même cercle Γ.

3° Trouver le lieu du centre du cercle Γ lorsque k varie. Construire les cercles Γ de rayon donné. Montrer qu'il existe en général un rayon minimum. Comment doivent être disposés A et A′ pour que le minimum soit nul?

4° Comment doivent être disposés les cercles O et O′ ainsi que les points A et A′ pour que les points M et M′ puissent venir coïncider pour une position particulière ou pour que la longueur MM′ reste constante.

● **265.** Étant donné deux cercles O et O′ et deux rayons OA et O′A′ construire le centre ω de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{O'A'}$ et un point variable M du cercle O en M′. Soit N le point commun à OM et O′M′, P le point commun à AM et A′M′, Q le point commun aux tangentes en M et M′ aux cercles O et O′.

1° Montrer que les six points ω, M, M′, N, P et Q sont situés sur un même cercle dont le centre J décrit un cercle (γ) de même centre I que le cercle ωOO′.

2° Montrer que IJ est la médiatrice de ωN et que la tangente en J au cercle (γ) est la médiatrice de ωQ.

3° On désigne par R le point de rencontre de ωQ avec le cercle ωOO′. Démontrer que $\overrightarrow{RQ} = 2\overrightarrow{IJ}$ et que la longueur QR est constante.

4° Soit M_1 le point du cercle ωMM′ tel que $(\omega M, \omega M_1) = \alpha$ (angle donné). Montrer que le lieu de M_1 est un cercle dont on précisera le centre O_1, que la tangente en M_1 à ce cercle passe par Q et que, lorsque α varie, tous les cercles O_1 sont vus du point ω sous le même angle.

● **266.** Dans un plan on considère deux droites $u'u$ et $v'v$ se coupant en O en faisant un angle de 45°. Sur $u'u$ on porte un segment MN de longueur $2h$ et de milieu A distinct de O. Sur $v'v$ on porte un segment PQ de longueur $2h\sqrt{2}$ et de milieu B distinct de O.

1° Déterminer les similitudes directes qui transforment le vecteur MN en le vecteur PQ ou en le vecteur QP.

2° Montrer que les centres I_1 et I_2 de ces similitudes sont sur le cercle OAB et montrer que la droite I_1I_2 coupe le rayon issu de A au milieu de ce rayon.

3° On fait tourner PQ d'un angle droit autour de A. Préciser la position du segment RS obtenu. Déterminer le centre de la rotation qui transforme le vecteur PQ en le vecteur SR. *(Lyon.)*

● **267.** On donne dans un plan une droite Δ et un point A à une distance AH $= a$ de Δ.

1° A tout point M de Δ on fait correspondre les points P et P′ définis par :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{2}\,;\ MP = k\,MA \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP'}) = -\frac{\pi}{2}\,;\ MP' = \frac{1}{k}\,MA$$

où k est un nombre positif donné. Montrer que, lorsque M décrit Δ, les points P et P′ décrivent des droites D et D′ et que le cercle PAP′ passe par un point fixe Q autre que A.

2° Trouver le lieu du point Q lorsque k varie, A restant fixe.

3° On suppose que k restant constant, A varie. Montrer que la droite AQ reste parallèle à une direction fixe, et que le milieu de AQ reste sur Δ. En déduire le lieu de Q lorsque A décrit une droite Δ_1 qui coupe Δ en un point B. *(Grenoble.)*

● **268.** Dans un plan on donne une droite fixe D, un point fixe A sur D, un point fixe B, non situé sur D, se projetant en J sur D. Soit I le milieu de AB et α la détermination comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de l'angle de droites (AB, D). Un cercle variable O passe par A et B et recoupe la droite D en M. Soit T la tangente en M à ce cercle.

1° On projette B en u sur OM et en u' sur T. Montrer que M est le transformé de O dans une similitude S de centre B. Déterminer son angle et son rapport en fonction de α. Montrer que O et u, O et u', u et u' sont respectivement couples homologues dans des similitudes S_1, S_2, S_3 que l'on déterminera.

2° Quel est le lieu Δ de u? Chercher ses points d'intersection avec D et AB. Quel est le lieu Δ′ de u'? En quel point Δ′ coupe-t-elle D? Quel est l'angle de Δ et Δ′?

3° On considère deux cercles O′ et O″ de la famille. Les tangentes T′ à O′ en M′ et T″ à O″ en M″ se coupent en P. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PM′M″ passe par B. *(Clermont.)*

● **269.** On considère les cercles C du plan tels que les tangentes qu'on peut leur mener d'un point fixe O soient rectangulaires.

1° Quel est le lieu des centres de ceux des cercles C qui passent par un point donné A, distinct de O.

2° On considère ceux des cercles C qui sont centrés sur une droite D ne passant pas par O. Quel est le lieu des points de contact T et T′ avec ces cercles des tangentes issues de O ?

3° Construire les cercles C centrés sur D donnée et passant par A donné.

4° Que deviennent les résultats précédents lorsqu'on substitue à la famille des cercles C celle des cercles ω dont les tangentes issues de O font un angle constant donné différent de $\frac{\pi}{2}$? *(Nancy.)*

● **270.** Soit une droite fixe Δ, un point fixe P′ sur Δ, deux points O et P symétriques par rapport à Δ. On désigne par S′ la similitude directe de point double O transformant P en P′. Soit Γ un cercle passant par O et P et Γ' son transformé par S′. On désigne par ω et ω' et par R et R′ les centres et les rayons respectifs des cercles Γ et Γ'.

1° A et B désignent les points d'intersection de Γ et Δ. Montrer que Γ' passe par ω et par les centres des cercles circonscrits aux triangles AOP′ et BOP′.

2° On suppose que Γ et P′ sont fixes. Trouver O sur Γ pour que Γ et Γ' soient tangents. Trouver O sur Γ pour que $R = R'$. Montrer qu'à toute position O_1 de O sur Γ on peut associer une autre position O_2 telle que les rayons R'_1 et R'_2 des cercles Γ'_1 et Γ'_2 soient égaux.

3° Γ et P′ sont toujours fixes. On fixe de plus un point P″ de Δ et on désigne par S″ la similitude de centre O transformant P en P″. Elle transforme Γ en Γ'' de rayon R″. Trouver O sur Γ pour que $R'' = kR'$ où k est une constante positive donnée.

4° Γ et P′ sont toujours fixes. On mène par P′ deux droites rectangulaires qui coupent Γ, la première en O_1 et O_2, la seconde en O_3 et O_4 auxquels correspondent quatre similitudes S'_1, S'_2, S'_3 et S'_4, d'où quatre cercles Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3, Γ'_4, de rayons respectifs R'_1, R'_2, R'_3, R'_4. Montrer qu'il existe une relation simple entre deux quelconques de ces rayons.

5° O et P′ sont fixes. Les cercles Γ forment un faisceau F et leurs transformés Γ' un faisceau F′. Un cercle Γ et son transformé Γ' se coupent en O et M. Trouver le lieu géométrique du point M quand Γ varie. Lieux des points de contact des tangentes communes aux cercles Γ et Γ' quand Γ varie. *(Antilles.)*

ONZIÈME LEÇON

DIVISION HARMONIQUE

• **257. Définition.** — ***Deux points* C *et* D *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B *s'ils divisent le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *dans le même rapport arithmétique.***

On dit aussi que C et D divisent harmoniquement le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (fig. 227).

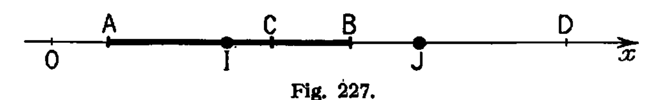


Fig. 227.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les quatre points alignés A, B, C et D vérifient l'une des relations suivantes :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \; (1) ; \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \; (2) ; \quad \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0 \; (3);$$

ou encore : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$ (4); ou $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ (5).

Étant donné un point C de la droite AB, on pourra toujours construire son conjugué D par rapport à A et B, sauf si $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$, c'est dire si le point C est le milieu de AB (n° 15).

• **258. Division harmonique.** — ***Si les points* C *et* D *sont conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B, *les points* A *et* B *sont conjugués harmoniques par rapport à* C *et* D. *L'ensemble des quatre points* A, B, C, D, *constitue la division harmonique* (ABCD).**

Les relations (1) et (2) s'écrivent en effet :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Dans une division harmonique (ABCD) on peut échanger A et B ou C et D ainsi que les deux couples AB et CD.

● **259. Exemples.** — 1° *Les pieds des bissectrices* AD *et* AE *du triangle* ABC *divisent harmoniquement le côté* BC.

On sait que (fig. 228) : $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

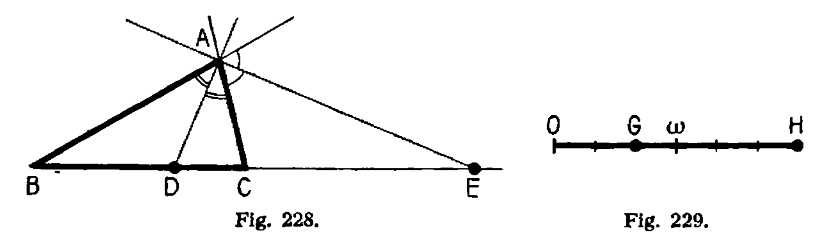


Fig. 228. Fig. 229.

2° *Les centres d'homothétie* I *et* J *de deux cercles (ou de deux sphères) divisent harmoniquement le segment qui joint leurs centres* O *et* O'.

En effet (n° 220) : $\frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = -\frac{\overline{JO'}}{\overline{JO}} = \frac{R'}{R}$.

3° *La division* (GHOω) *de la droite d'Euler du triangle* ABC *est une division harmonique.*

On a (fig 229) : $\frac{\overline{G\omega}}{\overline{GO}} = -\frac{\overline{H\omega}}{\overline{HO}} = -\frac{1}{2}$. (n° 228)

● **260. Remarques.** — 1° *L'expression* $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ *relative à quatre points alignés* A, B, C, D *pris dans cet ordre est appelée birapport (ou rapport anharmonique) de ces quatre points.* On écrit :

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}.$$

La condition pour que la division ABCD soit harmonique s'écrit ainsi :

$$(ABCD) = -1.$$

2° Lorsque le point D s'éloigne indéfiniment sur la droite AB, le rapport $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 1 - \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$ tend vers 1 et le birapport (ABCD) tend vers $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

On écrit : $(ABC\,\infty) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Lorsque C est en I milieu de AB (fig. 227) on a : $(\mathrm{ABI}\infty) = \frac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IB}}} = -1$. C'est pourquoi on dit que :

Le point à l'infini de la droite AB *est le conjugué harmonique du milieu* I *de* AB *par rapport à* A *et* B.

• 261. Relations caractéristiques de la division harmonique.

1° *Relation générale entre les abscisses.* — Soient a, b, c, d les abscisses des quatre points A, B, C, D d'une division harmonique de l'axe Ox (fig. 227). La relation $\overline{\mathrm{AC}}.\overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{AD}}.\overline{\mathrm{BC}} = 0$ s'écrit :

$$(c-a)(d-b) + (d-a)(c-b) = 0$$

Ou :

$$2(ab+cd) = ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d).$$

Soit :

$$\boxed{(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)} \qquad (7)$$

(se rappeler : *Produit des deux sommes = deux fois la somme des produits*).

2° **L'origine est en A.** — Dans ce cas : $a = 0$, $b = \overline{\mathrm{AB}}$, $c = \overline{\mathrm{AC}}$ et $d = \overline{\mathrm{AD}}$.
La relation (7) devient : $b(c+d) = 2cd$. Soit en divisant par $bcd \neq 0$.

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \qquad \text{ou :} \qquad \boxed{\frac{2}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}} \qquad 8)$$

Cette relation, qui montre que $\overline{\mathrm{AB}}$ est la moyenne harmonique de $\overline{\mathrm{AC}}$ et $\overline{\mathrm{AD}}$, donne par permutation :

$$\frac{2}{\overline{\mathrm{BA}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{BC}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{BD}}}; \quad \frac{2}{\overline{\mathrm{CD}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{CA}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{CB}}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\overline{\mathrm{DC}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{DA}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{DB}}} \qquad (8')$$

3° **L'origine est en I milieu de** AB.— Dans ce cas : $b = \overline{\mathrm{IB}} = -\overline{\mathrm{IA}} = -a$; $c = \overline{\mathrm{IC}}$ et $d = \overline{\mathrm{ID}}$. La relation (7) devient :

$$0 = 2(-a^2 + cd) \qquad \text{soit} \qquad a^2 = b^2 = cd.$$

Donc :

$$\boxed{\overline{\mathrm{IA}}^2 = \overline{\mathrm{IB}}^2 = \overline{\mathrm{IC}}.\overline{\mathrm{ID}}} \qquad (9)$$

En prenant J, milieu de CD, pour origine, on obtient de même :

$$\overline{\mathrm{JC}}^2 = \overline{\mathrm{JD}}^2 = \overline{\mathrm{JA}}.\overline{\mathrm{JB}}. \qquad (9')$$

La relation (9) montre que $\overline{\mathrm{IC}}.\overline{\mathrm{ID}}$ est positif, donc que C et D sont d'un même côté du point I. Si C tend vers A ou B, il en est de même de D. Enfin si C tend vers I, le point D tend vers le point à l'infini de la droite AB et on retrouve la division harmonique particulière $(\mathrm{ABI}\infty)$.

4° **Autres relations.** — Les relations (8) donnent :

$$2\,\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}(\overline{AC}+\overline{AD}) = \overline{AB}\,(2\,\overline{AJ}) = 2\,\overline{AB}.\overline{AJ}.$$

Donc :
$$\boxed{\overline{AC}\,.\,\overline{AD} = \overline{AB}\,.\,\overline{AJ}} \qquad (10)$$

De même :

$$\overline{BC}.\overline{BD} = \overline{BA}.\overline{BJ}\ ;\quad \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\overline{CI}\ ;\overline{DA}.\overline{DB} = \overline{DC}.\overline{DI} \qquad (10')$$

• **262. Théorème.** — ***Si les points*** C ***et*** D ***divisent le vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***dans les rapports respectifs*** — k ***et*** + k ***le milieu*** J ***de*** CD ***divise*** $\overrightarrow{AC}$ ***et*** $\overrightarrow{CB}$ ***dans le rapport*** k; ***il divise*** $\overrightarrow{AD}$ ***et*** $\overrightarrow{DB}$ ***dans le rapport*** — k ***et il divise*** $\overrightarrow{AB}$ ***dans le rapport*** k^2.

Par hypothèse : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -k$ et $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$. D'après les relations (9'):

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{JC}-\overline{JA}}{\overline{JB}-\overline{JC}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k.$$

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{JD}} = \frac{\overline{JD}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{JD}-\overline{JA}}{\overline{JB}-\overline{JD}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -k.$$

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} \times \frac{\overline{JC}}{\overline{JB}} = k \times k = k^2.$$

La relation (10), qui s'écrit $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AJ}}{\overline{AD}}$, montre d'ailleurs que les divisions ACJ et ABD sont homothétiques par rapport à A. Elles sont donc semblables.

• **263. — Calcul des différents segments.** — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant donné ainsi que le rapport k, on peut calculer $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ et $\overline{BD}$:

$$\frac{\overline{CA}}{-k} = \frac{\overline{CB}}{1} = \frac{\overline{AB}}{k+1} \qquad \text{Donc : } \overline{AC} = \frac{k}{k+1}\overline{AB}\ ;\ \overline{BC} = -\frac{1}{k+1}\overline{AB}.$$

$$\frac{\overline{DA}}{k} = \frac{\overline{DB}}{1} = \frac{\overline{AB}}{1-k} \qquad \text{Donc : } \overline{AD} = \frac{k}{k-1}\overline{AB}\ ;\ \overline{BD} = \frac{1}{k-1}\overline{AB}.$$

D'où :
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{k-1}{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = -\frac{k-1}{k+1}.$$

D'autre part :
$$\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right)\overline{AB} = \frac{2k}{k^2-1}\overline{AB}.$$

FAISCEAU HARMONIQUE

• **264. Définition.** — ***On appelle faisceau harmonique l'ensemble des quatre droites joignant un point donné*** O ***aux quatre points d'une division harmonique*** ABCD.

Si (ABCD) = — 1, les quatre droites OA, OB, OC, OD prises dans cet ordre (fig. 230) sont les rayons du faisceau harmonique O (ABCD). Les rayons OA et OB sont conjugués par rapport aux rayons OC et OD, et les rayons OC et OD sont conjugués par rapport aux rayons OA et OB.

• **265. Théorème fondamental.** — ***Un faisceau harmonique détermine une division harmonique sur toute sécante aux quatre rayons.***

Considérons (fig. 231) un faisceau de quatre droites issues du point O et coupées respectivement en A, B, C, D par la sécante Δ, en A', B', C', D' par la

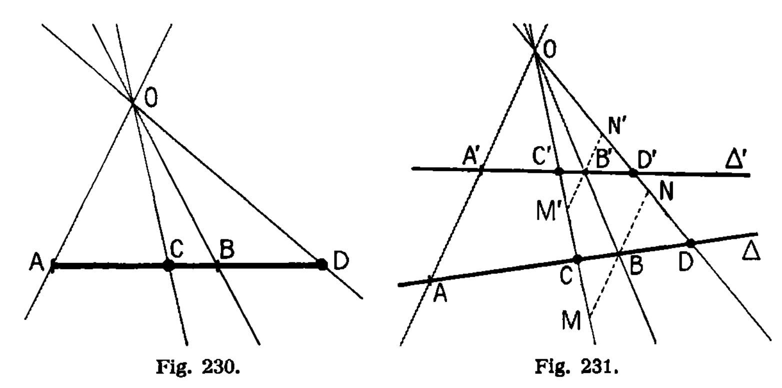


Fig. 230. Fig. 231.

sécante Δ'. Les parallèles au rayon OA issues de B et de B' coupent le rayon OC en M et M', le rayon OD en N et N'.

L'homothétie des triangles CAO et CBM d'une part, puis celle des triangles DAO et DBN d'autre part donnent :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BM}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BN}}. \qquad \text{On en déduit : } \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}}$$

$$\text{Donc : (ABCD)} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} \quad (1). \qquad \text{De même (A'B'C'D')} = \frac{\overline{B'N'}}{\overline{B'M'}}. \quad (2)$$

Les deux divisions MBN et M'B'N' étant homothétiques par rapport à O :

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{B'N'}}{\overline{B'M'}} \quad \text{et par suite} \quad \text{(ABCD)} = \text{(A'B'C'D')}. \qquad (3)$$

Lorsque la division (ABCD) est harmonique, le faisceau O (ABCD) est harmonique et on a : (ABCD) = — 1. Donc (A'B'C'D') = — 1. La division (A'B'C'D') est également harmonique.

• **266. Corollaire I.** — ***Pour qu'un faisceau de quatre droites concourantes soit harmonique il faut et il suffit que trois de ces droites déterminent des segments égaux sur une parallèle à la quatrième.***

Il résulte de la démonstration précédente que si (ABCD) = — 1 on a $\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = -1$ et par suite $\frac{\overline{B'N'}}{\overline{B'M'}} = -1$. Le point B' est le milieu de M'N'.

Réciproquement si $\frac{\overline{B'N'}}{\overline{B'M'}} = -1$, la relation (2) montre que la division (A'B'C'D') est harmonique et que le faisceau O (ABCD) est harmonique.

Ce corollaire ne fait qu'étendre le théorème fondamental au cas d'une division harmonique particulière (M'N'B'∞).

• **267. Corollaire II.** — On dit que la division (A'B'C'D') est la *projection ou perspective de centre* O de la division (ABCD) sur la droite Δ'. Le théorème fondamental peut donc s'énoncer ainsi :

Une division harmonique se conserve en projection centrale.

On peut même dire plus généralement que :

Le birapport de quatre points alignés se conserve en projection centrale.

• **268. Faisceau harmonique de droites parallèles.** — On appelle ainsi (fig. 232) l'ensemble formé par quatre parallèles issues des quatre points d'une division harmonique (ABCD). Le théorème fondamental (nº 265) est toujours applicable, car d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ et $\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Donc : (A'B'C'D') = (ABCD) = — 1.

Fig. 232.

Fig. 233.

On voit, en outre, que toute division harmonique se conserve en projection parallèle (ou oblique) et qu'il en est de même du birapport de quatre points alignés.

● **269. Remarque.** — ***Un faisceau harmonique est déterminé par trois de ses rayons.***

Étant donné un faisceau de trois droites concourantes ou parallèles issues des trois points alignés A, B, C, il suffit de construire le point D conjugué de C par rapport à A et B pour déterminer le quatrième rayon.

● **270. Exemples de faisceaux harmoniques.**

1° ***Deux côtés d'un triangle, la médiane relative au troisième et la parallèle à ce troisième côté.***

Le faisceau O (ABMx) est harmonique (fig. 233) car M est le milieu du segment AB parallèle au quatrième rayon Ox (n° 266).

2° ***Deux droites concourantes et les bissectrices des angles qu'elles forment.***

Portons OA = OB sur les deux rayons Ox et Oy (fig. 234). La droite Ou, bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, est la médiane OM du triangle isocèle OAB, et la bissectrice extérieure Ov est la parallèle à AB.

Notons que dans ce faisceau harmonique les deux rayons conjugués Ou et Ov sont rectangulaires.

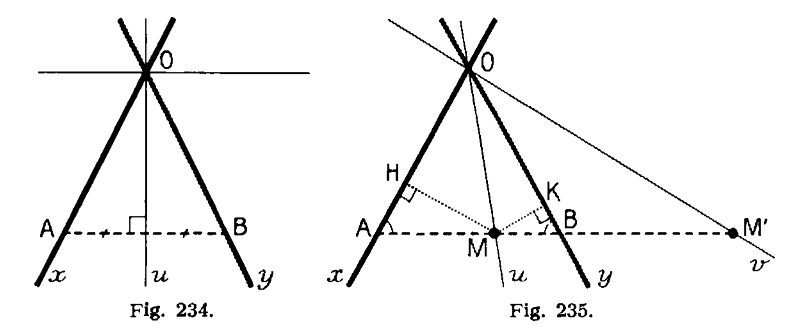


Fig. 234. Fig. 235.

3° ***Deux droites données et les deux droites lieu des points dont le rapport des distances aux deux premières est égal au nombre arithmétique k.***

Nous avons vu (n° 230) que, si on porte OA = OB sur Ox et Oy (fig. 235) ce lieu coupe AB en M et M', points qui divisent harmoniquement le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport k.

● **271. Réciproques.** — 1° ***Lorsque dans un faisceau harmonique deux rayons conjugués sont perpendiculaires, ces deux rayons sont les bissectrices des angles formés par les deux autres.***

Si Ou et Ov (fig. 234) sont deux rayons conjugués rectangulaires du faisceau harmonique O ($xyuv$), la parallèle AB à Ov est coupée perpendiculairement en son milieu M par Ou. Le triangle OAB étant par suite isocèle, les droites Ou et Ov sont les bissectrices de l'angle au sommet AOB.

2° *Dans tout faisceau harmonique deux rayons conjugués peuvent être considérés comme le lieu des points dont le rapport des distances aux deux autres rayons est égal à une certaine constante.*

a) Si les deux rayons O*u* et O*v* sont rectangulaires, ils orment le lieu des points équidistants des deux autres rayons O*x* et O*y*.

b) Supposons donc que O*u* et O*v* ne sont pas perpendiculaires (fig. 235) et portons sur O*x* et O*y* les segments égaux OA et OB. La droite AB coupe O*u* et O*v* en M et M′ tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = k$. D'après le n° 230, O*u* et O*v* coïncident avec le lieu des points dont le rapport des distances à O*x* et O*y* est égal à k.

c) Si on a affaire à un faisceau harmonique de parallèles on le coupe par une sécante perpendiculaire ABMM′ et on a : $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = k$.

• **272. Application.** — ***Le lieu géométrique des points d'un plan dont le rapport des distances à deux points donnés* A *et* B *de ce plan, a une valeur donnée $k \neq 1$, est le cercle admettant pour diamètre le segment qui joint les points divisant le vecteur* AB *dans le rapport k.***

1° Soit M un point tel que $\frac{MA}{MB} = k$ (fig. 236). Les bissectrices de l'angle AMB coupent AB en I et J tels que $\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB} = k$. Les points I et J sont donc fixes et puisque l'angle IMJ est droit, le point M appartient au cercle de diamètre IJ.

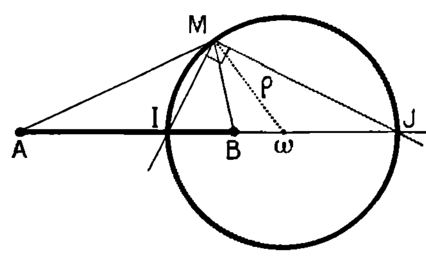


Fig. 236.

2° Réciproquement si M est un point quelconque du cercle de diamètre IJ on a : (ABIJ) = — 1 et le faisceau M (ABIJ) est un faisceau harmonique dont les rayons conjugués MI et MJ sont perpendiculaires. La droite MI est bissectrice de l'angle AMB (n° 271) et $\frac{MA}{MB} = \frac{IA}{IB} = k$.

• **273. Centre et rayon du lieu précédent.** — Le centre ω du cercle de diamètre IJ est le milieu de IJ. C'est donc le point qui divise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans e rapport k^2 (n° 262). En posant $\overline{AB} = a$ et en supposant $k > 1$ (échanger A et B si besoin est), on a :

$$\frac{\overline{IA}}{-k} = \frac{\overline{IB}}{1} = \frac{a}{k+1} \quad \text{et} \quad \overline{AI} = \frac{ak}{k+1} = a\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\overline{JA}}{k} = \frac{\overline{JB}}{1} = \frac{a}{1-k} \quad \text{et} \quad \overline{AJ} = \frac{ak}{k-1} = a\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \quad (2)$$

Donc : $\overline{IJ} = \overline{AJ} - \overline{AI} = \frac{2ak}{k^2 - 1}$ et le rayon ωM du lieu précédent est donc : $\rho = \frac{ak}{k^2 - 1}$.

Ces différents résultats sont conformes à ceux du n° 93.

Les relations (1) et (2) montrent que $\overline{AI}$ et $\overline{AJ}$ sont des fonctions de $k > 1$ l'une croissante, l'autre décroissante. Pour $k' > k > 1$ on obtient un cercle lieu ω' intérieur au cercle ω. On en déduit que si $\frac{MA}{MB} > k$, le point M est intérieur au cercle ω, que si $\frac{MA}{MB} < k$, il est extérieur à ce cercle et réciproquement.

• **274. Corollaire.** — *Dans l'espace le lieu des points* M *tels que* $\frac{MA}{MB} = k$ *est la sphère* S *de diamètre* IJ *et de rayon* $\rho = \frac{ak}{k^2 - 1}$.

Dans tout plan P ne contenant pas la droite AB le lieu est le cercle (γ) intersection de la sphère S et du plan P. Ce cercle (γ) n'existe que si la distance de ω au plan P est inférieure au rayon ρ de S.

POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A DEUX DROITES

• **275. Définition.** — *Deux points* M *et* P *sont dits conjugués par rapport aux deux droites données* Δ *et* Δ' si la droite MP coupe Δ et Δ' en deux points A et B conjugués harmoniques par rapport à M et P (fig. 237 et 238). La condition pour qu'il en soit ainsi s'écrit donc : (ABMP) = — 1.

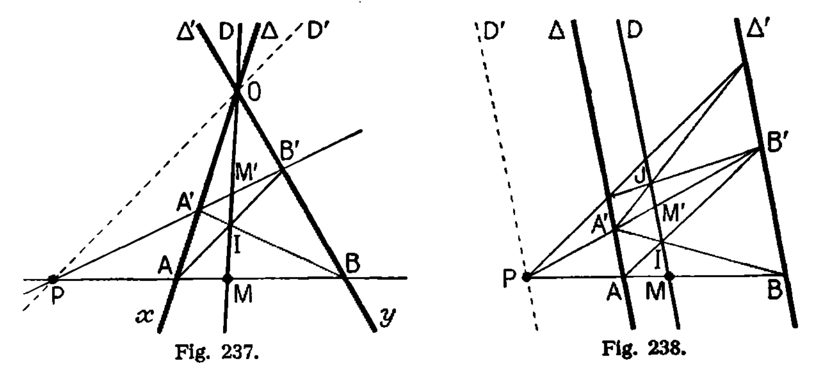


Fig. 237.

Fig. 238.

Si MP est parallèle à Δ' par exemple la condition ($A\infty MP$) = — 1 donne $\overline{AM} + \overline{AP} = 0$, et le point A est le milieu de MP.

• **276. Théorème.** — ***Le lieu géométrique des conjugués d'un point fixe* P *par rapport à deux droites données* Δ *et* Δ′ *est une droite* D *appelée polaire de* P *par rapport à* Δ *et* Δ′.**

Supposons d'abord que Δ et Δ′ sont deux droites concourantes Ox et Oy (fig. 237). Pour que M soit conjugué de P il faut et il suffit que le faisceau O (xyPM) soit harmonique. Les trois premiers rayons étant fixes il en est de même du quatrième (nº 269) qui constitue le lieu D de M.

Si Δ et Δ′ sont parallèles (fig. 238), les droites D′ et D issues de P et M et parallèles à Δ et Δ′ forment avec elles un faisceau harmonique de parallèles (ΔΔ′D′D) dont les trois premiers rayons sont fixes. Le lieu du point M est le quatrième rayon D.

• **277. Propriétés de la polaire.** — 1º La polaire d'un point P par rapport à deux droites concourantes Ox et Oy est issue du point O commun à ces deux droites. La polaire d'un point P par rapport à deux droites parallèles est parallèle à ces deux droites.

2º Tous les points de OP (ou de D′) ont même polaire par rapport aux droites concourantes Ox et Oy (ou parallèles Δ et Δ′).

3º Si la polaire de P passe par M, inversement la polaire de M passe par P.

• **278. Construction de la polaire.** —Soient M et M′ les points de la polaire D du point P par rapport à Δ et Δ′ situés sur les sécantes PAB et PA′B′ (fig. 237 et 238). Les points M et M′ appartiennent aussi à la polaire de P par rapport aux deux droites AB′ et BA′. La droite MM′ passe donc par le point d'intersection I de ces deux droites. La polaire cherchée D est la droite OI si Δ et Δ′ se coupent en O, la parallèle, issue de I, à Δ et Δ′ si ces droites sont parallèles. (Dans ce dernier cas ou si le point O est inaccessible, on construit un second point J de D à l'aide d'une troisième sécante issue de P).

• **279. Remarque.** — Cette construction qui nécessite uniquement l'emploi de la règle permet de construire le conjugué d'un point P de la droite AB par rapport à A et B. Il suffit de mener deux droites quelconques OA et OB et d'achever la construction précédente.

APPLICATIONS

• **280. Théorème de Céva.** — ***Pour que trois droites issues des sommets* A,B,C, *d'un triangle soient concourantes il faut et il suffit qu'elles coupent les côtés opposés en trois points* α, β, γ *vérifiant la relation :***

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1 \qquad (1)$$

Soit I le point commun à Bβ et Cγ (fig. 239) et α′ le point commun à BC et βγ. D'après le théorème de Ménélaüs : $\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$ (2). Pour que Aα passe par I il faut et il

suffit que $A\alpha$ soit la polaire de α' par rapport à AB et AC donc que : $\dfrac{\overline{\alpha'B}}{\overline{\alpha'C}} = -\dfrac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\alpha C}}$ ce qui avec la relation (2) donne la condition (1) annoncée.

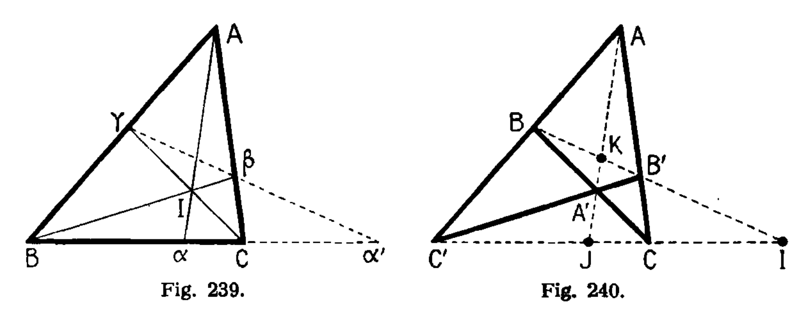


Fig. 239. Fig. 240.

• **281. Théorème.** — ***Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.***

Soit un quadrilatère complet ABCA'B'C' obtenu en coupant les trois côtés du triangle ABC par la transversale A'B'C' (fig. 240). La droite AA'JK est la polaire de I par rapport aux droites ABC' et AB'C, ce qui montre que les divisions (BB'IK) et (CC'IJ) sont harmoniques. D'autre part A' est un point de la polaire de A par rapport aux droites IBB' et ICC'. La division AA'JK est harmonique.

• **282. Corollaire.** — ***Dans tout trapèze les milieux des deux bases divisent harmoniquement le segment qui joint le point d'intersection des diagonales et le point d'intersection des côtés non parallèles.***

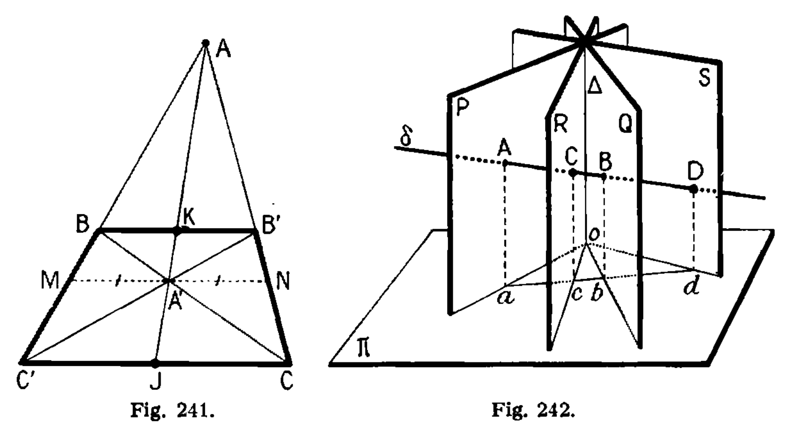


Fig. 241. Fig. 242.

Si les diagonales BB' et CC' du quadrilatère complet ABCA'B'C' sont parallèles, le point I est rejeté à l'infini. Les points J et K (fig. 241) sont alors les

milieux respectifs de CC′ et BB′, bases du trapèze BB′CC′. Notons également que la parallèle aux bases issue de A′, coupe les côtés BC′ et B′C en M et N tels que : A′M = A′N, (BC′AM) = — 1 et (B′C AN) = — 1, car MN est la polaire de A par rapport aux droites BB′ et CC′.

• **283. Faisceau harmonique de plans.** — On appelle ainsi (fig. 242) l'ensemble de quatre plans P, Q, R, S, parallèles ou issus d'une même droite Δ et passant respectivement par les quatre points d'une division harmonique (ABCD). On démontre par projection orthogonale sur un plan π perpendiculaire à ces quatre plans, que :

1° *Un faisceau harmonique de plans découpe une division harmonique sur toute sécante* δ *et découpe un faisceau harmonique sur tout plan sécant.*

2° *Si les deux plans conjugués* R *et* S *sont rectangulaires, ils sont les plans bissecteurs du dièdre* (P, Q) *formé par les deux autres.*

3° *Le lieu géométrique du conjugué* M′ *d'un point* M *par rapport à deux plans donnés* P *et* Q *est un plan* S *conjugué par rapport à* P *et* Q *du plan* R *du même faisceau passant par* M.

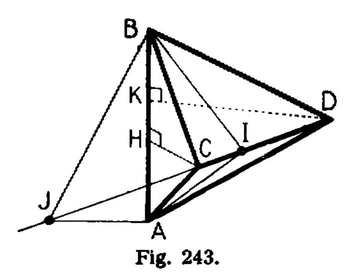


Fig. 243.

Exemple. — Les deux faces ABC et ABD du tétraèdre ABCD et les deux bissecteurs ABI et ABJ du dièdre d'arête AB forment un faisceau harmonique de plans.

En projetant sur un plan perpendiculaire à AB on voit, en désignant par CH et DK les hauteurs des triangles ABC et ABD, que l'on a :

$$\frac{IC}{ID} = \frac{JC}{JD} = \frac{HC}{KD} = \frac{\text{aire (ABC)}}{\text{aire (ABD)}}.$$

Les points I et J divisent donc l'arête CD dans le rapport des aires des faces issues de AB.

Si les faces ABC et ABD sont équivalentes le point I est le milieu de CD; le point J est rejeté à l'infini et le bissecteur extérieur du dièdre AB est parallèle à CD.

SUJETS D'EXAMEN

— Polaire d'un point par rapport à deux droites concourantes. Application au quadrilatère complet. (*Saïgon*, ME.)

— Couples de points conjugués harmoniques par rapport à deux droites données. Couples de droites conjuguées harmoniques par rapport à deux droites données. Division et faisceau harmoniques. (*Aix*, ME et MT.)

— Division harmonique sur un axe. Définition. Différentes formes de la relation harmonique. (*Caen*, MT.)

EXERCICES

● **271.** Soient quatre points alignés A,B,C,D et les milieux I de AB et J de CD.

1° Si la division (ABCD) est harmonique, démontrer que l'on a :

$$(ACBD) = 2; \quad \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\overline{IJ}^2; \quad \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BD}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} = 0.$$

2° Montrer que la 3ᵉ relation équivaut à : $2\,\overline{IJ}\,(\overline{AC}.\overline{BD} + \overline{AD}.\overline{BC}) = 0$ et étudier les différentes réciproques.

3° On désigne par O le milieu de IJ et par M un point quelconque. Démontrer que si $(ABCD) = -1$ on a : $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 4\overline{MO}^2 + 3\overline{IJ}^2$ et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$. Démontrer les réciproques.

● **272.** Soient sur une droite Δ une division harmonique (ABCD) et un segment MN de milieu O.

1° On prend les conjugués A′, B′, C′, D′ de A,B,C,D par rapport à M et N. Démontrer que la division (A′B′C′D′) est harmonique [P étant un point du cercle de diamètre MN on pourra comparer les faisceaux P (ABCD) et P (A′B′C′D′)]. Cas particulier où O est en D.

2° On achève les divisions harmoniques $(DACA_1)$ et $(DBCB_1)$. Nature de la division (A_1B_1CD)?

● **273.** Soient D et E les milieux des côtés AB et AC du triangle ABC, G le centre de gravité du triangle et O le milieu de DE. La droite CO coupe AB en I et BE en J. Démontrer que :

1° $(ADBI) = -1$; $\quad \overline{AB} = 3\overline{AI}$ et $\overline{DB} = -3\overline{DI}$

2° $(BJGE) = -1$ et $\overline{JB} = -4\overline{JE} = 6\,\overline{JG}$

3° $(OCIJ) = -1$; $\quad \overline{OC} = -3\overline{OI}$ et $2\overline{JC} = -3\overline{JI}$.

● **274.** On désigne par I et J les milieux des segments AB et CD de la division harmonique (ABCD) telle que : $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k > 1$.

1° Calculer k pour que $\overline{CD} = \overline{AB}$. Montrer que l'on a alors : $\overline{AB}^2 = 2\overline{IJ}^2$.

2° Calculer k pour que $\overline{CD} = 2\overline{AB}$. Démontrer dans ce cas les relations :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{BD}; \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}.\overline{CB} \text{ et } \overline{BD}^2 = \overline{AB}.\overline{AD}.$$

3° Montrer que dans l'hypothèse $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ les divisions ABC et DAB sont homothétiques et déterminer leur centre d'homothétie.

● **275.** Un cercle de centre O passe par le sommet P d'un faisceau harmonique et coupe ses rayons respectivement en A, B, C et D.

1° Étant donné un point quelconque M du cercle O, montrer que le faisceau M (A,B,C,D) est harmonique. Déterminer les similitudes faisant coïncider les deux faisceaux.

2° Démontrer que les tangentes en A et B au cercle O coupent la droite CD en un même point K.

3° Soit I le milieu de AB. Démontrer que AB est bissectrice de l'angle CID. Comparer les trois triangles IAC, IDA et BDC.

● **276.** Soient D, E, F les pieds des hauteurs AD, BE et CF du triangle ABC, dont l'orthocentre est H, et soit P le point de rencontre des droites EF et BC.

1° Quelle est la polaire de P par rapport à AB et AC? Nature du faisceau D (APEF).

2° Montrer que A, B, C et H sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle DEF.

3° Les droites CA et DF se coupent en Q. Montrer que AB, DE et PQ sont concourantes en R.

● **277.** On considère un point fixe P et deux droites Δ et Δ′ (concourantes ou parallèles). Un sécante variable issue du point fixe P coupe Δ en A et Δ′ en B.

1° Montrer que les lieux des points M et N tels que $(PABM) = (PBAN) = -1$ sont des droites D et D′ du même faisceau que Δ et Δ′.

2° Montrer que P a même polaire par rapport à (Δ, Δ′) et par rapport à (D, D′).

● **278.** Dans un quadrangle ABCD :

1° Deux points diagonaux sont conjugués par rapport aux deux côtés qui concourent à l'autre point diagonal.

2° Deux côtés du triangle diagonal sont conjugués par rapport aux deux côtés du quadrangle qui concourent au même point diagonal.

● **279.** Un trapèze isocèle est circonscrit à un cercle de centre O. Une tangente variable Δ coupe les bases en A et B, les côtés obliques en C et D et la parallèle Ox aux deux bases en I.

1° Nature de la division (ABCD)?

2° Démontrer que : $\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{AD} = \frac{IC}{IA} = \frac{IA}{ID}$.

● **280.** Un point variable A décrit un cercle fixe O passant par deux points donnés B et C. Le diamètre DE perpendiculaire à BC coupe AB en M et AC en N.

1° Nature de la division (DEMN)? Démontrer que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = -1$.

2° On achève les divisions harmoniques (ABMP) et (ACNQ), trouver l'enveloppe de PQ.

● **281.** Soit un parallélogramme ABCD et Δ la polaire de A par rapport à CB et CD. Une sécante variable Ax coupe BD en I, BC en M, CD en N et Δ en E.

1° Démontrer que $\overline{IA}^2 = \overline{IE}^2 = \overline{IM}.\overline{IN}$ et $\overline{BM}.\overline{DN} = \overline{BC}.\overline{DC}$.

2° Retrouver la deuxième formule en comparant (CMB∞) et (CN∞D).

● **282.** On considère deux droites fixes Ox et Oy. Une droite variable Δ issue du point fixe P coupe Ox en A et Oy en B. La droite qui joint A au milieu I de OP coupe Oy en C et la parallèle à OP menée par C coupe Δ en M.

1° Nature de la division (BPAM)? Lieu géométrique du point M.

2° La droite MI coupe Oy en D. Quelle est la nature du quadrilatère AMCD?

● **283.** On donne deux divisions harmoniques (ABCD) et (A'B'C'D) de supports distincts et deux points fixes P et P' sur une droite issue de D.

1° Montrer que les trois droites AA', BB' et CC' concourent en I, que les trois droites AB', BA' et CC' concourent en J. Nature de la division (CC'IJ)?

2° Soient α, β, γ, α', β' les points communs aux droites des couples suivants : PA et P'A', PB et P'B', PC et P'C', PA et P'B', PB et P'A'. Démontrer que les points α, β, γ d'une part, α', β', γ d'autre part sont alignés sur deux droites Δ et Δ' coupant la droite PP' en δ et δ'. Nature de la division (PP' δδ')?

● **284.** Soit un cercle de centre I et de diamètre AB. La tangente en M coupe la droite AB en D et le point M se projette en C sur AB.

1° Démontrer que $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ et que (ABCD) = — 1.

2° En déduire une construction du conjugué d'un point intérieur C ou extérieur D du segment AB par rapport à A et B.

● **285.** On considère un triangle isocèle ABC de base BC. Par un point variable M de la droite BC tel que $\overline{MB} = k\,\overline{MC}$ on mène les parallèles à AC et à AB qui coupent AB en P et, AC en Q. La droite BC coupe la droite PQ en R et la parallèle Ax à PQ en N.

1° Démontrer que (BCMN) = — 1 et que $\overline{RM}^2 = \overline{RB}.\overline{RC}$.

2° Évaluer en fonction de k le rapport de $\overline{RB}$ et de $\overline{RC}$.

● **286.** Dans un triangle ABC on désigne par M le milieu de BC, D et E les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A, par I, J, K, L et r, r_a, r_b, r_c les centres et les rayons des cercles inscrit et exinscrits, par P, Q, R, S les points de contact de BC avec ces différents cercles et enfin par H le pied de la hauteur AH = h_a.

1° Démontrer que les divisions (ADIJ) et (AEKL) sont harmoniques et que les milieux de IJ et KL sont les intersections du cercle ABC et de la médiatrice de BC.

2° En déduire les relations : $\overline{MP}^2 = \overline{MQ}^2 = \overline{MD}.\overline{MH}$, $\overline{MR}^2 = \overline{MS}^2 = \overline{ME}.\overline{MH}$.
puis que $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

● **287.** 1° Soient sur une droite deux vecteurs de même sens $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$. Trouver le lieu géométrique des points d'où l'on voit ces deux vecteurs sous le même angle orienté.

2° Etant donnés quatre points A,B,C,D alignés dans cet ordre, construire un point M d'où l'on voit les trois vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ sous le même angle orienté.

● **288.** On donne deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ de même support et de même sens tels que $\vec{AB} = k\,\vec{CD}$ et un point variable M tel que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{MC}, \vec{MD})$. On désigne par I et J les pieds des bissectrices de l'angle BMC et par O le milieu de IJ.

1° Nature des divisions (ADIJ) et (BCIJ). Démontrer que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = k$ et que les points I et J sont fixes.

2° En déduire le lieu géométrique du point M.

● **289.** On considère trois points alignés A, B, C et un cercle variable ω passant par A et B et coupant la médiatrice de AB en E et F. Les droites CE et CF recoupent le cercle ω en M et N et soit I le milieu de AB.

1° Démontrer que les droites AB, MF et NE sont concourantes en D. Nature de la division (ABCD) et lieu géométrique de M et N?

2° Démontrer que la droite MN coupe AB en un point fixe J.

● **290.** 1° Démontrer que les quatre birapports (ABCD), (BADC), (CDAB) et (DCBA) sont égaux. En déduire qu'avec les quatre points alignés ABCD on ne peut former que six birapports distincts.

2° En utilisant l'identité : $\overline{AB}\,.\,\overline{CD} + \overline{AC}\,.\,\overline{DB} + \overline{AD}\,.\,\overline{BC} = 0$ démontrer que ces six birapports ont pour valeurs : λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ et $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ en désignant par λ la valeur de l'un quelconque d'entre eux.

● **291.** On considère un cercle fixe O, un point fixe P sur le diamètre AB et une corde variable CD passant par P. Soient Q et R les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère ACBD.

1° Démontrer que la droite QR coupe AB en un point fixe H. Trouver la nature des quadrangles ABQR et OPQR.

2° Trouver le lieu Δ des points Q et R et le lieu du point M conjugué de P par rapport à C et D.

3° Soit N le milieu de QR. Montrer que les points C,D,O,H et N sont sur un même cercle. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes en C et D au cercle O.

● **292.** *Triangles homologiques.* Soient deux triangles ABC et A'B'C' d'un même plan. Les côtés BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' se coupent respectivement en α, β et γ.

Démontrer que si les trois droites AA', BB' et CC' sont concourantes en O (ou parallèles) les trois points α, β, γ sont alignés sur une droite Δ et réciproquement. Le point O peut-il être situé sur Δ?

● **293.** On se donne une droite Δ, un point extérieur O et un rapport k. A tout point M du plan (O, Δ) on fait correspondre le point M' de la droite OM qui coupe Δ en μ, tel que $\frac{\overline{M'O}}{\overline{M'\mu}} = k\,\frac{\overline{MO}}{\overline{M\mu}}$ [*homologie* (O, Δ, k)].

1° Montrer que dans cette transformation toute droite d a pour homologue une droite d' et que les trois droites d, d' et Δ sont concourantes ou parallèles. En déduire une construction à la règle de M' connaissant M et un couple de points homologues A et A' alignés avec O (applicable même si O est sur Δ).

2° Soient H, H' et K les projections de M, M' et O sur Δ. Démontrer que MH' et M'H passent par deux points fixes I et J' de OK symétriques par rapport au milieu de OK.

● **294.** Reprendre l'exercice précédent dans l'espace en remplaçant la droite Δ par un plan π. Montrer que le transformé d'un plan P est un plan P' et les 3 plans P, P' et π sont issus d'une même droite ou parallèles.

● **295.** On considère un tétraèdre ABCD dont les quatre faces sont des triangles équivalents.

1° Démontrer que les bissecteurs extérieurs des dièdres d'arêtes AB et CD sont parallèles et que la droite MN qui joint les milieux des arêtes AB et CD est leur perpendiculaire commune. En déduire trois axes de symétrie du tétraèdre et démontrer que les quatre faces sont des triangles égaux dont les angles sont aigus.

2° Démontrer que le centre de gravité O du tétraèdre est en même temps, le centre de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite. Comparer à l'aide de considérations de volume, la valeur h des hauteurs du tétraèdre, le rayon r de la sphère inscrite et la valeur r' des rayons des sphères exinscrites.

3° Montrer que les bissecteurs extérieurs des six dièdres du tétraèdre délimitent un parallélépipède rectangle de centre O et de diagonales AA', BB', CC' et DD'. Calculer en fonction des dimensions a, b, c de ce parallélépipède rectangle, l'aire d'une face, la hauteur, le volume et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. Que représentent A', B', C' et D' pour le tétraèdre ABCD?

● **296.** 1° On considère le cercle C de diamètre AB et de centre O. Un point P de ce cercle se projette en M sur AB. Montrer que la tangente en P à C est tangente aux cercles de centres A et B passant par M.

2° Soit Q le second point d'intersection du cercle C avec le cercle de diamètre PM, E le centre de celui-ci, I le point d'intersection des droites AB et PQ. Montrer que la droite IE est parallèle à la tangente en P au cercle C et qu'elle est tangente aux cercles de diamètres AM et BM en ses points d'intersection avec le cercle de diamètre PM. *(Grenoble.)*

● **297.** Soient dans le plan aux points A et B tels que AB $= 2a$ et O le milieu de AB.

1° Étant donnée une droite quelconque (D) du plan trouver sur cette droite un point I tel que (D) soit l'une des bissectrices de l'angle AIB.

2° Lieu géométrique du point I lorsque (D) pivote autour d'un point fixe H de la droite AB.

3° Soit (D') la seconde bissectrice de l'angle AIB et α l'angle aigu que fait (D) avec la droite AB. Montrer que le produit des distances du point O aux deux droites D et D' ne dépend que de a et α. *(Espagne.)*

● **298.** On considère un cercle C de centre O de rayon R $= 2a\sqrt{2}$, un point fixe A tel que OA $= 4a$, le point B situé sur la demi-droite OA tel que OB $= 2a$, puis les cercles Γ dont les centres ω sont situés sur le cercle C et qui sont vus de A sous l'angle $\frac{\pi}{3}$.

1° Démontrer que tous les cercles Γ sont vus du point B sous un angle constant que l'on calculera.

2° Déterminer les lieux des points de contact des tangentes aux cercles Γ issues de chacun des points A et B.

● **299.** On donne un cercle O de rayon R et une corde AB de ce cercle. Un point M quelconque parcourt le cercle O; on trace MA et MB qui coupent la médiatrice Δ de AB en A' et B' respectivement.

1° Montrer que A' et B' restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes quand M décrit le cercle O.

2° On oriente Δ de façon que $(\overrightarrow{AB}, \Delta) = \frac{\pi}{2}$; on désigne par α l'angle AOB et on définit la position de M sur le cercle O par l'angle $(\Delta, \overrightarrow{OM}) = \theta$. Calculer $y = \overline{A'B}$ connaissant R, α et θ.

3° Construire le point M de façon que A'B' $= l$ longueur donnée. *(Nancy.)*

● **300.** On donne dans un plan un point A et une droite Δ. On demande d'étudier la transformation suivante : à tout point M du plan on fait correspondre M' tel que A, M, M' soient alignés et que, si P est le point de rencontre de AMM' avec Δ on ait (APMM') $= -1$.

1° Si M décrit une droite D montrer que M' décrit une droite D'.

2° Si D tourne autour d'un point fixe I, montrer que D' tourne autour d'un point fixe I'.

3° Comment faut-il choisir D pour que D′ lui soit perpendiculaire? Trouver dans ce cas le lieu géométrique des projections du point A sur les droites D et D′.

(Lille.)

● **301.** On considère un point A et une droite (D). On désigne par (D′) la parallèle à (D) menée par A, par Δ la parallèle à (D) et (D′) équidistante de ces deux droites. à tout point M du plan on fait correspondre le point M′ de AM conjugué harmonique de M par rapport à A et au point d'intersection de AM et (D).

1° Montrer que lorsque M décrit une droite (δ), M′ décrit une droite (δ′) qu'on appellera homologue de (δ). Montrer qu'en général (δ) et (δ′) coupent (D′) en deux points symétriques par rapport à A. Cas de (δ) parallèle à (D).

2° Étudier les homologues de deux droites (δ) parallèles, de deux droites (δ) se coupant sur Δ.

3° Montrer que trois points dont l'un est le milieu du segment formé par les deux autres ont pour homologues trois points formant une division harmonique avec le point d'intersection de la droite qui les porte et de Δ.

(Caen.)

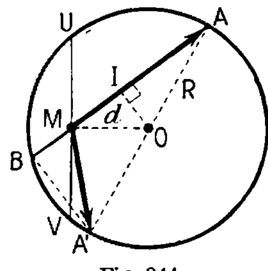
DOUZIÈME LEÇON

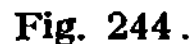
PUISSANCE PAR RAPPORT A UN CERCLE

● **284. Théorème.** — ***Lorsqu'une sécante variable issue d'un point fixe*** M ***coupe un cercle donné en*** A ***et*** B, ***le produit*** $\overline{MA}.\overline{MB}$ ***est un nombre constant appelé puissance du point*** M ***par rapport à ce cercle.***

Soit I le milieu de AB et désignons par R le rayon du cercle O donné et par d la distance OM (fig. 244 et 245). Nous avons :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB}) = (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} - \overline{IA}) = \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2.$$




Fig. 244.

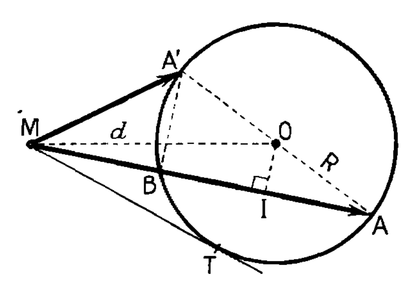


Fig. 245.

Les triangles OIM et OIA étant rectangles en I on obtient :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = (\overline{OM}^2 - \overline{OI}^2) - (\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2) = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 = d^2 - R^2.$$

Cette valeur constante du produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est représentée par le symbole $\mathcal{P}_o(M)$:

$$\boxed{\mathcal{P}_o(M) = d^2 - R^2.} \qquad (1)$$

● **285. Propriétés de la puissance.** — 1° Désignons par A' le point diamétralement opposé au point A sur le cercle O. L'angle ABA' étant droit, le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ est égal à $\overline{MA}.\overline{MB}$ (n° 78) :

$$\boxed{\mathcal{P}_o(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}.} \qquad (2)$$

La puissance du point M *par rapport au cercle* O *est le produit scalaire des vecteurs joignant le point* M *à deux points diamétralement opposés sur ce cercle.*

On retrouve aisément $\mathcal{P}_o$ (M) car :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 \text{ (n° 80).}$$

2° Si on mène deux sécantes MAB et MCD au cercle O on a (fig. 246 et 247) :

$$\mathcal{P}_o(M) = \overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}. \qquad (3)$$

Si le point M est extérieur (fig. 245) on a, en désignant par MT une tangente :

$$\mathcal{P}_o(M) = \overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}. \qquad (4)$$

Si le point M est intérieur (fig. 244) on a, en désignant par UV la corde perpendiculaire à OM : $\mathcal{P}_o(M) = -\overline{MU}^2$. (5)

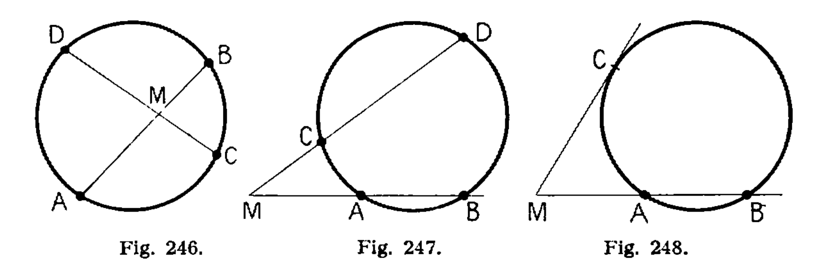


Fig. 246. Fig. 247. Fig. 248.

3° Pour que la puissance $\mathcal{P}_o(M)$ soit positive, nulle ou négative, il faut et il suffit que d soit supérieur, égal ou inférieur à R, donc que M soit extérieur, sur le cercle ou intérieur au cercle O. Le minimum de $\mathcal{P}_o$ (M) est atteint lorsque M est en O : $\mathcal{P}_o(O) = -R^2$.

Le lieu des points M tels que $\mathcal{P}_o(M) = k$ est le cercle de centre O tel que $\overline{OM}^2 - R^2 = k$. Donc de rayon $\sqrt{R^2 + k}$.

4° Si le rayon R du cercle O devient nul on dit qu'on a affaire au *cercle point* O et la puissance $\mathcal{P}_o(M)$ est alors égale à $\overline{MO}^2$.

• **286. Réciproques.** — 1° ***Si les côtés*** AB ***et*** CD ***du quadrangle*** ABCD ***se coupent en un point*** M ***tel que*** $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$, ***ce quadrangle est inscriptible.***

Le cercle ABC recoupe en effet (fig. 246 et 247) la droite MC en D' tel que $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD'}$. On a donc $\overline{MD'} = \overline{MD}$ ce qui montre que D' est en D.

2° ***Si le point*** M ***du côté*** AB ***du triangle*** ABC ***est tel que*** $\overline{MC}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$ ***la droite*** MC ***est tangente en*** C ***au cercle*** ABC.

(Supposer (fig. 248), dans la démonstration précédente, que D est confondu avec C).

AXE RADICAL DE DEUX CERCLES.

• **287. Théorème.** — ***Le lieu géométrique des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles donnés est une droite Δ, perpendiculaire à la droite des centres, appelée axe radical des deux cercles.***

Pour que le point M ait même puissance par rapport aux deux cercles O(R) et O'(R'), il faut et il suffit que (fig. 249) :

$$\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2 \quad \text{ou} \quad \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2 \qquad (1)$$

En désignant par I le milieu de OO', le lieu de M est donc (n° 89) une droite Δ perpendiculaire à la droite OO' au point H défini par la relation :

$$2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IH} = R^2 - R'^2. \qquad (2)$$

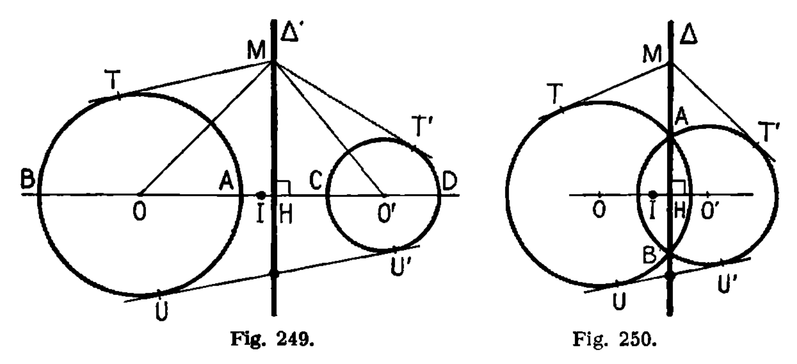


Fig. 249. Fig. 250.

Si R = R' l'axe radical Δ est la médiatrice de OO'. Si R' = 0, la droite Δ est l'axe radical du cercle O(R) et du cercle-point O'.

Notons que si O' vient se confondre avec O et si R' ≠ R, l'axe radical est rejeté à l'infini.

• **288. Propriétés de l'axe radical.** — 1° ***L'axe radical de deux cercles passe par tout point commun aux deux cercles.***

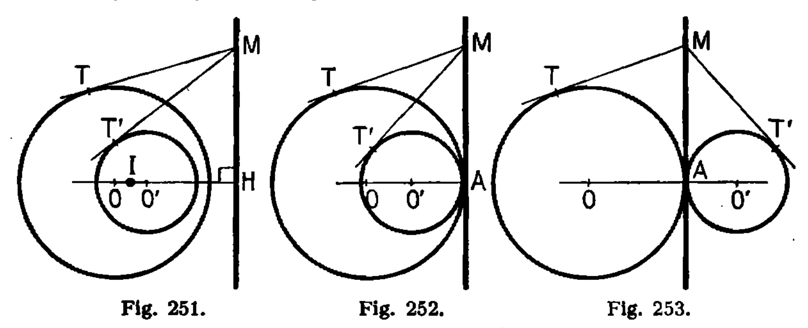


Fig. 251. Fig. 252. Fig. 253.

Les puissances d'un tel point par rapport aux deux cercles étant nulles, elles sont donc égales. L'axe radical de deux cercles sécants (fig. 250) est par suite le

support de leur corde commune et l'axe radical de deux cercles tangents (fig. 252 et 253) est leur tangente commune. L'axe radical de deux cercles intérieurs ou extérieurs est obligatoirement extérieur aux deux cercles (fig. 249 et 251) car s'il coupait l'un d'eux en un point il couperait l'autre au même point.

2° Précisons la position de Δ dans le cas où $R > R'$. La relation (2) montre que dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont de même sens. Le point H appartient à la demi-droite IO' et $HO > HO'$. Par suite $HO + R > HO' + R'$ donc (fig. 249) : $HB > HD$. La relation $HA . HB = HC . HD$ entraîne alors : $HA < HC$. *La droite Δ est donc plus proche du cercle O que du cercle O'.*

3° ***La portion de l'axe radical, extérieure aux deux cercles, est le lieu des points d'où on peut leur mener des tangentes égales.***

En effet pour que l'on ait $MT = MT'$ (fig. 250) il faut et il suffit que M ait même puissance positive par rapport aux cercles O et O'. Il en résulte que l'*axe radical de deux cercles passe par le milieu de toute tangente commune à ces deux cercles.*

• **289. Théorème.**—***Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux concourent en général en un même point qui a même puissance par rapport aux trois cercles et qu'on appelle centre radical des trois cercles.***

1° Si les centres O, O' et O'' de trois cercles donnés ne sont pas alignés (fig. 254), l'axe radical Δ des cercles O et O' et l'axe radical Δ' des cercles O et O'' se coupent en un point I dont les puissances $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ par rapport aux trois cercles sont égales. Le point I appartient donc également à l'axe radical Δ'' des cercles O' et O''.

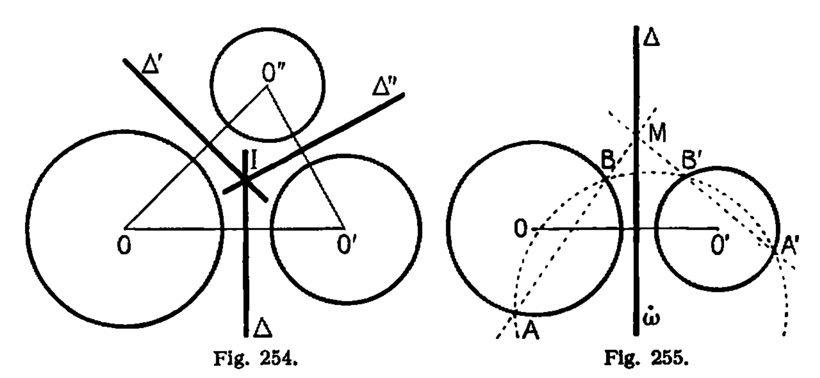


Fig. 254. Fig. 255.

2° Si les trois centres O, O' et O'' sont alignés, les droites Δ et Δ' sont parallèles ou confondues. Dans le premier cas il n'y a aucun point possédant même puissance par rapport aux trois cercles et les trois droites Δ, Δ' et Δ'' sont distinctes et parallèles.

Si les deux droites Δ et Δ' sont confondues, tout point de Δ a même puissance par rapport aux trois cercles et les trois droites Δ, Δ' et Δ'' sont confondues. *On dit que les trois cercles admettent un même axe radical.*

• 290. Construction de l'axe radical de deux cercles non sécants. — Soit à construire (fig. 255) l'axe radical Δ des deux cercles O et O' quelconques. Traçons un cercle auxiliaire ω coupant le cercle O en A et B, le cercle O' en A' et B'. Le point d'intersection M de AB et A'B' est le centre radical des trois cercles ω, O et O'. C'est donc un point de l'axe radical cherché Δ.

Il suffit alors de mener de M la perpendiculaire Δ à la droite des centres OO', ou bien de répéter la construction pour déterminer un second point N de Δ. Si le cercle O' est un cercle point, on fait passer par O' le cercle auxiliaire ω et on lui mène la tangente en O' qui coupe la droite AB en M.

• 291. Théorème. — ***La différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est, en valeur absolue, égale au double produit de la distance de leurs centres par la distance de ce point à leur axe radical.***

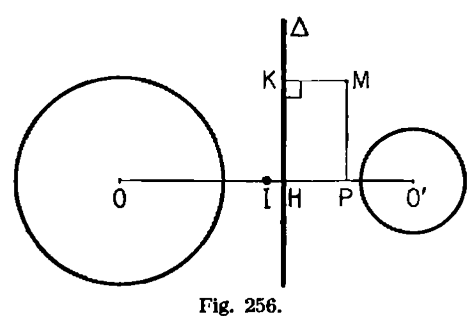


Fig. 256.

Soit (fig. 256) H le pied de l'axe radical Δ des cercles O(R) et O'(R'), I le milieu de OO', P et K les projections du point donné M sur la droite OO' et sur Δ. La différence des puissances du point M par rapport aux cercles O et O' s'écrit :

$$\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M) = (\overline{MO}^2 - R^2) - (\overline{MO'}^2 - R'^2)$$
$$= (\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2) - (R^2 - R'^2)$$

Or (n° 88) : $\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IP}$

et (n° 287) : $R^2 - R'^2 = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IH}$.

Donc : $\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M) = 2\,\overline{OO'}\,.\,(\overline{IP} - \overline{IH}) = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{HP}$.

Soit : $$\boxed{\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M) = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}}$$

formule algébrique qui définit $\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M)$ en grandeur et en signe.

• 292. Corollaires. — 1° *Le lieu des points dont la différence des puissances par rapport à deux cercles est constante est une perpendiculaire à la droite des centres.*

Pour que $\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M) = k$ il faut et il suffit que $2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{HP} = k$ donc que la projection de M sur OO' soit le point P déterminé par cette relation.

2° *La puissance d'un point* M *par rapport à un cercle* O *est égale à* $2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}$ *où* K *désigne la projection de* M *sur l'axe radical du cercle* O *et d'un cercle quelconque de centre* O' *passant par* M.

Dans la relation du n° 291 on a $\mathcal{P}_{o'}(M) = 0$ d'où : $\mathcal{P}_o(M) = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}$.

APPLICATIONS

• **293. Utilisation de la puissance.** — 1° Les considérations de puissance permettent souvent d'établir des relations métriques dans des figures où interviennent des cercles.

2° Pour démontrer que trois points α, β, γ sont alignés il suffit de montrer que chacun de ces points a même puissance par rapport à deux cercles de la figure. Car s'il en est ainsi α, β et γ appartiennent à l'axe radical de ces deux cercles.

3° Si (fig. 257) deux points distincts α et β ont chacun même puissance par rapport à trois cercles O, O′ et O″, ces trois cercles admettent un axe radical $\alpha\beta$ (n° 289). Il en résulte que :

a) Les points O, O′ et O″ sont alignés sur une perpendiculaire à $\alpha\beta$.

b) Tout point γ de la droite $\alpha\beta$ a même puissance par rapport aux trois cercles O, O′ et O″.

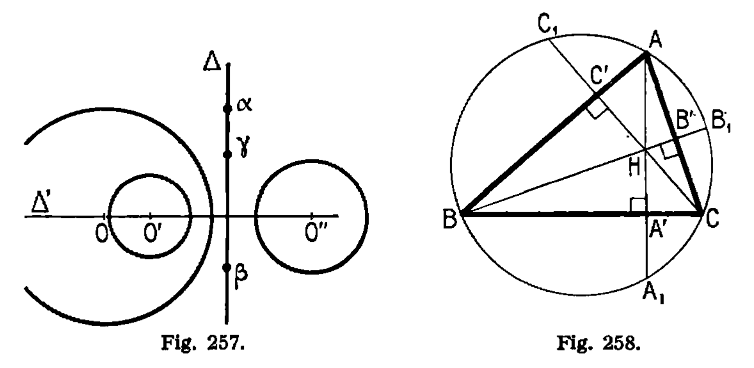


Fig. 257. Fig. 258.

• **294. Relations dans le quadrangle orthocentrique.** — Considérons (fig. 258) un triangle ABC, d'orthocentre H et désignons par A′, B′, C′ les pieds des hauteurs AH, BH et CH et par A_1, B_1 et C_1 les intersections de ces hauteurs avec le cercle ABC.

1° Des relations : $\overline{A'A_1} = -\overline{A'H}$ et $\overline{A'B}\,.\,\overline{A'C} = \overline{A'A}\,.\,\overline{A'A_1}$ on déduit que :

$$\boxed{\overline{A'B}\,.\,\overline{A'C} = -\overline{A'A}\,.\,\overline{A'H}} \qquad (1)$$

Il y a deux autres relations analogues avec B′ et C′.

2° Des relations telles que : $\overline{HA}\,.\,\overline{HA_1} = \overline{HB}\,.\,\overline{HB_1} = \overline{HC}\,.\,\overline{HC_1}$ et $\overline{HA_1} = 2\,\overline{HA'}$ on déduit que :

$$\boxed{\overline{HA}\,.\,\overline{HA'} = \overline{HB}\,.\,\overline{HB'} = \overline{HC}\,.\,\overline{HC'}} \qquad (2)$$

Ces relations résultent aussi du fait que H est le centre radical des trois cercles BCB'C', CAC'A' et ABA'B'.

3° En échangeant les rôles de H et A dans le quadrangle ABCH on obtient :

$$\boxed{\overline{AA'} \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'}} \qquad (3)$$

qui résultent aussi du fait que A est le centre radical des cercles BCB'C', BHA'C' et CHA'B'.

• 295. Application. — ***Les orthocentres des quatre triangles d'un quadrilatère complet sont alignés sur une droite Δ. Les milieux des diagonales de ce quadrilatère complet sont alignés sur une droite Δ' perpendiculaire à la précédente.***

Les cercles de centres O, O' et O'' ayant pour diamètres les diagonales AD, BE et CF du quadrilatère complet ABCDEF (fig. 259) passent par les pieds des hauteurs AA', BB' et CC' du triangle ABC. L'orthocentre H du triangle ABC vérifiant les relations $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$ a donc même puissance par rapport aux trois cercles. Il est de même de J, K, L orthocentres respectifs des triangles AEF, DBF et DEC.

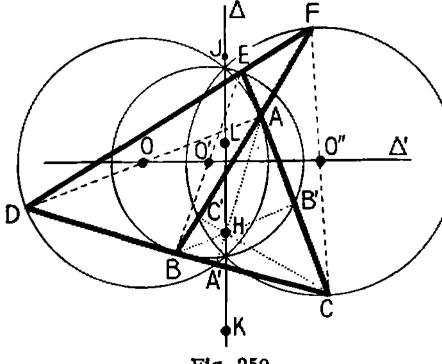


Fig. 259.

Les quatre points H, J, K, L sont donc (n° 293) alignés sur l'axe radical Δ des trois cercles O, O' et O'' et les centres de ces cercles sont alignés sur une droite Δ' perpendiculaire à Δ.

REMARQUE. — On voit que la droite Δ est la *droite de Steiner* commune du point d'intersection ω des cercles ABC, AEF, DBF et DEC (n° 165) par rapport aux triangles correspondants.

• 296. Théorème de Pascal. — ***Lorsqu'un hexagone est inscrit dans un cercle, les points de rencontre des côtés opposés sont alignés.***

Soit un hexagone inscrit ABCDEF (fig. 260). Numérotons les côtés AB, BC, CD, DE, EF et FA dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6 et appliquons au triangle PQR formé par les côtés impairs 1, 3, 5 le théorème de Ménélaüs relatif aux transversales, constituées par les côtés pairs 2, 4, 6. On obtient ainsi dans le triangle PQR coupé par les transversales : αDE, AβF et BCγ :

$$\frac{\overline{\alpha Q}}{\overline{\alpha R}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{EQ}} = 1; \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{\beta R}}{\overline{\beta P}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{FQ}} = 1; \quad \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma Q}} = 1;$$

Effectuons le produit membre à membre de ces trois égalités. En tenant compte des relations

$$\overline{AR}\,.\,\overline{BR} = \overline{CR}\,.\,\overline{DR} \quad ; \quad \overline{CP}\,.\,\overline{DP} = \overline{EP}\,.\,\overline{FP} \quad ; \quad \overline{EQ}\,.\,\overline{FQ} = \overline{AQ}\,.\,\overline{BQ}.$$

On obtient :
$$\frac{\overline{\alpha Q}}{\overline{\alpha R}} \cdot \frac{\overline{\beta R}}{\overline{\beta P}} \cdot \frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma Q}} = 1$$

ce qui montre que les points α, β, γ sont alignés (n° 94).

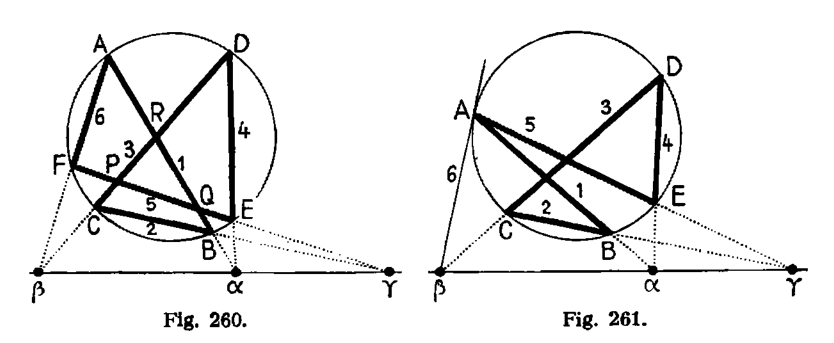


Fig. 260. Fig. 261.

REMARQUE. — Si le point F vient en A, le théorème subsiste pour le pentagone inscrit ABCDE à condition de lui adjoindre comme 6[e] côté la tangente en A (fig. 261). Il y a 5 droites de Pascal ainsi attachées à un pentagone inscrit.

• 297. Relations d'Euler dans un triangle.

Considérons un triangle ABC (fig. 262) et désignons par O, I et J les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrit dans l'angle A, par R, r et r_a leurs rayons respectifs. Le quadrilatère BICJ ayant deux angles opposés B et C droits est inscriptible dans un cercle dont le centre est situé sur la médiatrice de BC et sur la droite IJ bissectrice intérieure de l'angle BAC. Ce centre est donc le milieu ω de l'arc BC du cercle O intérieur à l'angle BAC.

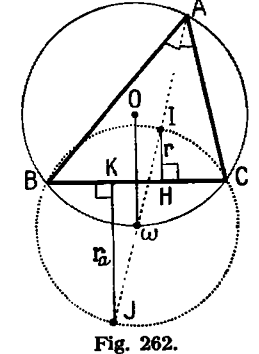


Fig. 262.

Soient H et K les projections des points I et J sur l'axe radical BC du cercle ω et du cercle O. On a (n° 291) :

$$\mathcal{P}_o(I) = \mathcal{P}_o(I) - \mathcal{P}_\omega(I) = 2\,\overline{O\omega}.\overline{HI}$$

soit : $\overline{IO}^2 - R^2 = -2Rr$

ou
$$\boxed{\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr}$$

De même :

$$\mathcal{P}_o(J) = \mathcal{P}_o(J) - \mathcal{P}_\omega(J) = 2\,\overline{O\omega}.\overline{KJ}$$

soit $\overline{JO}^2 - R^2 = 2Rr_a$

ou
$$\boxed{\overline{OJ}^2 = R^2 + 2Rr_a}$$

PUISSANCE PAR RAPPORT A UNE SPHÈRE

• **298. Théorème.** — ***Si une sécante variable issue d'un point fixe*** M ***coupe une sphère donnée en*** A ***et*** B, ***le produit*** $\overline{MA}.\overline{MB}$ ***est un nombre constant appelé puissance du point*** M ***par rapport à la sphère***

Soit (Γ) le grand cercle de la sphère O(R) situé dans le plan OMAB (fig. 263). Le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est la puissance de M par rapport à (Γ). En posant OM = d on a :

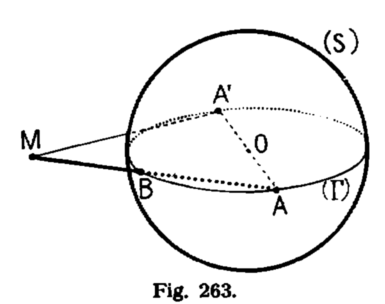


Fig. 263.

$$\mathcal{P}_o(M) = \overline{MA}.\overline{MB} = d^2 - R^2. \quad (1)$$

La puissance $\mathcal{P}_o(M)$ de M par rapport à la sphère est la puissance de M par rapport à tout cercle (γ) de la sphère dont le plan passe par M. En désignant par A′ le point diamétralement opposé à A sur la sphère, par MCD et MEF deux autres sécantes issues de M, par MT une tangente issue de M ou par UV une corde perpendiculaire en M à OM, on obtient comme au n° 285 :

$$\mathcal{P}_o(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} \quad (2)$$

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{ME}.\overline{MF} \quad (3)$$

$$\mathcal{P}_o(M) = \overline{MT}^2 \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_o(M) = -\overline{MU}^2 \quad (4) \text{ et } (5)$$

• **299. Réciproque.** — ***Si les trois droites*** AB, CD ***et*** EF ***non coplanaires, concourent en un point*** M ***tel que :***

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{ME}.\overline{MF}$$

les six points A,B,C,D,E,F, ***appartiennent à une même sphère.***

Soit D′ et F′ les points où les droites MC et ME recoupent la sphère ABCE. On a : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD'} = \overline{ME}.\overline{MF'}$.

En comparant ces relations avec celles de l'hypothèse on en déduit que les points D et F sont confondus avec D′ et F′. Si F vient se confondre avec E, la sphère ABCE est tangente en E à la droite ME.

• **300. Théorème.** — ***Le lieu géométrique des points qui ont même puissance par rapport à deux sphères données est un plan*** P, ***perpendiculaire à la droite des centres, appelé plan radical des deux sphères.***

En désignant (fig. 264) par I le milieu du segment OO′ qui joint les centres des deux sphères O(R) et O′(R) et par H la projection d'un point quelconque M sur OO′ on voit comme au n° 287 que la condition $\mathcal{P}_o(M) = \mathcal{P}_{o'}(M)$ équivaut à :

$$2\,\overline{OO'}.\overline{IH} = R^2 - R'^2$$

Le lieu de M est donc le plan P perpendiculaire à OO′ au point H déterminé par la relation précédente. On voit comme au n° 288 que :

Le plan radical de deux sphères sécantes est le plan de leur cercle commun. Le plan radical de deux sphères tangentes est leur plan tangent commun en leur point de contact. La portion du plan radical extérieure aux deux sphères est le lieu des points d'où on peut leur mener des tangentes égales.

Si on coupe les sphères O et O′ par un plan sécant Q, l'axe radical des cercles d'intersection γ et γ' est l'intersection δ du plan radical P par le plan Q.

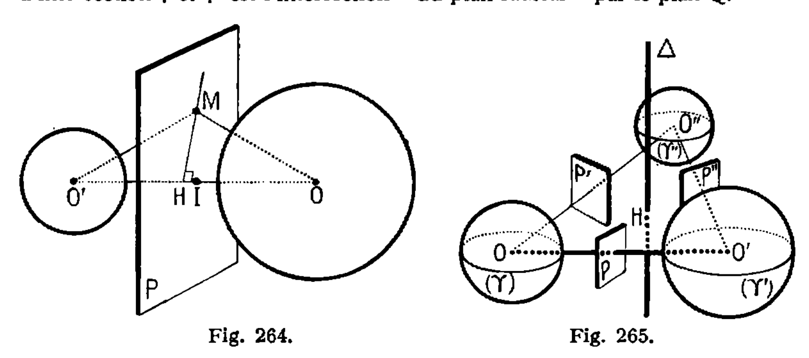


Fig. 264. Fig. 265.

● **301. Théorème.** — ***Le lieu géométrique des points qui ont même puissance par rapport à trois sphères données dont les centres ne sont pas alignés est une droite Δ perpendiculaire au plan des centres appelée axe radical des trois sphères.***

Le plan radical P des sphères O et O′ (fig. 265) et le plan radical P′ des sphères O et O″ se coupent suivant une droite Δ perpendiculaire au plan OO′O″. Or tout point de Δ a même puissance par rapport aux trois sphères O, O′ et O″. La droite Δ appartient donc au plan radical P″ des sphères O′ et O″.

Si les centres O, O′ et O″ sont alignés les trois plans radicaux sont parallèles et distincts ou éventuellement confondus.

Notons que l'axe radical Δ de trois sphères passe par tout point commun à ces trois sphères. Si on coupe les trois sphères par un plan sécant Q, le centre radical des trois cercles d'intersection γ, γ' et γ'' est l'intersection de la droite Δ par le plan Q. En particulier le pied H de Δ dans le plan OO′O″ est le centre radical des trois grands cercles des sphères O, O′ et O″ situés dans le plan des centres.

● **302. Théorème.** — ***Étant données quatre sphères dont les centres ne sont pas situés dans un même plan, il existe un point et un seul appelé centre radical qui a même puissance par rapport aux quatre sphères.***

Ce point appartient au plan radical de deux quelconques de ces sphères et à l'axe radical de trois quelconques d'entre elles.

En effet le point ω commun à l'axe radical Δ des sphères O_1, O_2 et O_3 et au plan radical P des sphères O_1 et O_4 est le point unique qui a même puissance par rapport aux quatre sphères O_1, O_2, O_3 et O_4. La deuxième partie du théo-

rème est alors une conséquence évidente des théorèmes nos 300 et 301. Si les quatre points O_1, O_2, O_3 et O_4 sont dans un même plan la droite Δ et le plan P sont en général parallèles. Éventuellement la droite Δ peut être contenue dans le plan P. On dit que les quatre sphères admettent Δ pour axe radical.

• 303. Différence des puissances par rapport à deux sphères données.

La différence des puissances d'un point par rapport à deux sphères est, en valeur absolue, égale au double produit de la distance de leurs centres par la distance de ce point à leur plan radical.

En désignant par π le plan radical des sphères O(R) et O'(R'), par I le milieu de OO' par P et K les projections d'un point donné M sur la droite OO' et sur le plan π, on obtient par le même calcul qu'au n° 291 :

$$\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M) = 2\,\overline{OO'}.\overline{KM}$$

formule algébrique qui définit $\mathcal{P}_o(M) - \mathcal{P}_{o'}(M)$ en grandeur et en signe.

SUJETS D'EXAMEN

— Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles (*Montpellier*, ME.)

— Puissance d'un point par rapport à une sphère. Plan radical. (*Lausanne*, ME.)

— Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles.
Variation de cette différence suivant la position du point. Lieu des points pour lesquels cette différence a une valeur donnée. (*Aix*, MT.)

EXERCICES

• 302. Pour que deux cercles O et O' soient sécants il faut et il suffit qu'il existe un point M de leur axe radical ayant une même puissance négative par rapport à ces deux cercles.

• 303. D'un point M de l'axe radical des cercles O et O' on mène la sécante MAB au premier et la sécante MCD au deuxième. Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

• 304. Soient AB et CD les diamètres des cercles O et O' portés par la droite OO'. Montrer que le pied H de leur axe radical Δ est le centre de l'homothétie qui transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{DB}$ (ou $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{CB}$) et en déduire une construction de l'axe radical Δ.

• 305. On considère quatre points A, B, C, D d'une même droite, un cercle variable O passant par A et B, un cercle variable O' passant par C et D. Trouver l'enveloppe de l'axe radical Δ des cercles O et O'.
Étudier le cas où B est en A et le cas où B est en A et C en D.

● **306.** Reprendre le problème précédent en supposant que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle fixe (Γ).

● **307.** Deux cercles variables O et O′ sont respectivement tangents en A et B à la droite fixe AB. Les cercles de centre O passant par B et de centre O′ passant par A se coupent en M en N. Trouver l'enveloppe de la droite MN.

● **308.** On considère deux cercles fixes O et O′, le premier tangent en A à Ax, le second tangent en B à By et deux points variables M et N qui décrivent respectivement Ax et By de telle sorte que AM = BN. Trouver le lieu des points d'intersection du cercle de centre O passant par M et du cercle de centre O′ passant par N.

● **309.** Un cercle variable ω passe par un point fixe A et coupe le cercle fixe O en B et C. La droite BC coupe en M la tangente en A au cercle ω.

1° Montrer que le lieu de M est une droite perpendiculaire en I à OA.

2° Le cercle de centre M passant par A recoupe le diamètre EF passant par A du cercle O en D. Nature de la division (ADEF) et lieu du point P symétrique de A par rapport à M?

● **310.** Soient trois points fixes A, B, C alignés dans cet ordre et un point variable P qui décrit la droite Δ perpendiculaire en C à AB. On mène la perpendiculaire BH à AP et cette droite coupe le cercle de diamètre AP en M et N.

1° Nature du quadrilatère BCPH? Montrer que le lieu de M et N est un cercle de centre A.

2° Démontrer que les cercles BCM et BCN de centres ω et ω′ sont respectivement tangents à AM et AN et que la figure BωPω′ est un parallélogramme. Nature du faisceau P (BCMN).

● **311.** Un point M décrit un cercle fixe O(R). On désigne par Δ l'axe radical du cercle O et du cercle de centre M passant par un point fixe A tel que OA = d.

1° Calculer en fonction de d et R la distance AK de A à la droite Δ.

2° En déduire l'enveloppe de la droite Δ puis l'enveloppe de la droite MK.

● **312.** On considère deux cercles fixes O(R) et A(a). Une tangente variable en M au cercle A coupe le cercle O en B et C. Soit ω le centre du cercle ABC.

1° Evaluer en fonction de R, a et d = AO, la distance Oω.

2° Déterminer le lieu du point ω et l'enveloppe de la droite ωM.

● **313.** Dans un triangle ABC un cercle variable passant par A et par le milieu M de BC recoupe la droite BC en E et le cercle ABC en D. La droite AD coupe BC en F.

1° Démontrer les relations $\overline{FM}.\overline{FE} = \overline{FB}.\overline{FC}$ et (BCEF) = — 1.

2° On suppose que la droite AE est tangente au cercle ABC. Montrer que les deux droites AM et AD sont symétriques par rapport aux bissectrices de l'angle BAC.

● **314.** On désigne par A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC et par I, J, K et L les centres des cercles inscrit et exinscrits dans les angles A, B et C du triangle ABC.

1° Montrer que l'axe radical des cercles K et L est la bissectrice intérieure de l'angle B′A′C′ et que le centre radical des cercles J, K, L est le centre du cercle inscrit dans le triangle A′B′C′.

2° Etablir de même que le centre radical des cercles I, K, L est le centre du cercle exinscrit dans l'angle A′ du triangle A′B′C′.

● **315.** Soit un point fixe A, un cercle de centre O et une sécante variable ABC à ce cercle :

1° En supposant A intérieur au cercle O, trouver le lieu des extrémités de la corde MN, menée par A et perpendiculaire à BC, dans le cercle de diamètre BC.

2° En supposant A extérieur au cercle O, trouver le lieu des points de contact des tangentes AT et AU au cercle de diamètre BC.

● **316.** Dans un triangle ABC la perpendiculaire en B à AB coupe AC en D et la perpendiculaire en C à AC coupe AB en E.

1° Montrer que DE est perpendiculaire au rayon AO du cercle ABC.

2° Etablir que l'axe radical des cercles ABD et ACE est la droite AO.

● **317.** On désigne par O le centre du cercle ABC, par H l'orthocentre et par ω le centre du cercle d'Euler du triangle ABC, par M, N, P les milieux des côtés BC, CA, AB et enfin par A', B', C' les pieds des hauteurs AH, BH et CH. Les droites BC et B'C' se coupent en α, CA et C'A' en β, AB et A'B' en γ.

1° Etablir les relations : $\overline{\alpha B}.\overline{\alpha C} = \overline{\alpha B'}.\overline{\alpha C'} = \overline{\alpha A'}.\overline{\alpha M}$ et $(BCA'\alpha) = -1$.

2° En déduire que α, β, γ sont alignés sur une droite Δ perpendiculaire à OH et axe radical des cercles O et ω.

● **318.** Un point variable M décrit un cercle fixe O passant par A et B. Sur la bissectrice intérieure de l'angle AMB on prend les points C et D tels que $\overline{MC}^2 = \overline{MD}^2 = MA.MB$.

1° Démontrer que les quatre points ABCD sont sur un même cercle centré au milieu de l'arc AMB. En déduire les lieux de C et D, lorsque M parcourt le cercle O.

2° Soit I le milieu de AB. Démontrer que la droite AB est bissectrice intérieure de l'angle CID et que l'on a : $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = IC.ID$.

● **319.** D'un point P de l'axe radical des cercles O(R) et O'(R') on mène à ces deux cercles les tangentes respectives PM et PM'.

1° Montrer qu'il existe un cercle ω tangent en M au cercle O et tangent en M' au cercle O'. En déduire que la droite MM' passe par l'un ou l'autre de deux points fixes I ou J.

2° Si P varie le produit $\overline{IM}.\overline{IM'}$ est constant. Trouver sa valeur en fonction de R, R' et OO' $= d$.

3° Construire le cercle ω sachant qu'il passe par un point donné A.

● **320.** Soient trois points fixes B, C, P alignés et un point variable A qui décrit une droite Δ perpendiculaire en I à la droite BC. Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1° Trouver l'enveloppe de la droite EF qui joint les pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC et l'enveloppe de l'axe radical du cercle ABC et du cercle de diamètre AH.

2° Soit M la projection de A sur la droite PH. Montrer que la droite AM passe par un point fixe et trouver le lieu du point M.

● **321** Deux cercles O et O' sont sécants en A et B. Une sécante variable Δ coupe le premier en C et M le second en D et N. On mène dans le cercle O la corde CE parallèle à AN, et dans le cercle O' la corde DF parallèle à AM.

1° Démontrer que les points A, E, F sont alignés et que le quadrangle CDEF est inscriptible.

2° Lieu géométrique du point d'intersection I de CE et de DF? Montrer que le quadrangle BCDI est inscriptible.

● **322.** Un triangle ABC est dit pseudo-rectangle si : $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$.

1° Démontrer que le côté BC est parallèle au diamètre AD $= 2R$ du cercle ABC et que la hauteur AA' est tangente à ce cercle ainsi qu'au cercle d'Euler du triangle.

2° Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que BA $=$ BH, CA $=$ CH puis que : $\overline{AA'}^2 = \overline{A'B}.\overline{A'C}$; $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4R^2$ et $\frac{1}{\overline{AA'}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2}$.

3° Un cercle passant par A et centré sur AH recoupe AB et AC respectivement en C' et B'. Démontrer que B'C' est perpendiculaire à BC et que le triangle AB'C' est pseudo-rectangle.

● **323.** Un cercle O passe par le centre ω d'un second cercle et le coupe en B et C. Une sécante variable issue du point ω coupe le segment BC en D, le cercle O en A et le cercle ω en I et J (I entre A et D).

1° Etablir la relation $(ADIJ) = -1$ et démontrer que I et J sont les centres du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

2° Construire le point ω puis le triangle ABC connaissant les points B et C et les rayons r et r_a des cercles inscrit et exinscrit I et J.

3° Effectuer la même construction connaissant B et C, l'angle A du triangle ABC et la longueur AD $= \beta$.

● **324.** On donne un cercle fixe de centre O, un diamètre $x'x$ et un point quelconque M de ce cercle. Le cercle de centre M tangent en I à $x'x$ coupe le cercle O en B et C et la droite MI coupe BC en D, le cercle (M) en J et le cercle O en A.

1° Démontrer que D est le centre radical des cercles (O), (M) et du cercle de diamètre AM. En déduire que D est le milieu de MI.

2° Etablir que : (ADIJ) = — 1 et que les points I et J sont les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

3° Soient r et r_a les rayons des deux cercles inscrit et exinscrit I et J et h_a la hauteur issue de A du triangle ABC. Démontrer que : $h_a = r_a = 3r$.

● **325.** Soit ω le centre d'une similitude directe qui transforme le cercle O en le cercle O' et soient, sur ces deux cercles, deux points homologues M et M'.

1° Démontrer que le lieu de la projection H de ω sur MM' est un cercle ayant pour centre la projection K de ω sur OO'.

2° Soit ω' le symétrique de ω par rapport à OO' et H' la projection de ω' sur MM'. Montrer que le produit $\overline{\omega H}\cdot\overline{\omega' H'}$ est constant et qu'il en est de même de l'aire du triangle ω'MM'.

● **326.** On considère un quadrilatère ABA'B' dont les diagonales AA' et BB' se coupent en ω, et on désigne par I le centre de la similitude inverse qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{B'A'}$ et par J le centre de la similitude inverse qui transforme : $\overrightarrow{AB'}$ en $\overrightarrow{BA'}$.

1° Montrer que les triangles IAA' et IBB' ont même angle en I et sont équivalents et qu'il en est de même des triangles JAA' et JB'B. Nature du faisceau ω (ABIJ).

2° Montrer que la droite IJ est l'axe radical des cercles de diamètres AA' et BB'.

3° On complète le quadrilatère complet ABC A'B'C'. Montrer qu'il existe six points analogues à I ou J situés sur la droite Δ qui contient les orthocentres des quatre triangles du quadrilatère complet.

● **327.** On donne un cercle fixe O(R), un point fixe I tel OI = $d \neq$ R et un point variable M sur le cercle O. Ce cercle recoupe la droite IM en A et coupe en B et C le cercle de centre M passant par I.

1° Montrer que l'enveloppe des trois côtés du triangle ABC est un cercle fixe de centre I dont le rayon r est donné par la relation d'Euler $|d^2 - R^2| = 2Rr$.

2° En déduire que si deux cercles donnés O(R) et I(r) tels que OI = d vérifient la relation précédente, il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle O et admettant le cercle I pour cercle inscrit ou exinscrit.

3° Soit IP un rayon du cercle I perpendiculaire à IO. Montrer que le cercle de centre P et de rayon r est tangent au cercle O. En déduire une construction géométrique des deux valeurs de R qui correspondent à un point O et à un cercle I (r) donnés.

● **328.** Soit un triangle ABC et les deux points variables M et N tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NC} + \lambda\overrightarrow{NA} = 0.$$

1° Démontrer que lorsque λ varie, les points M et N se correspondent dans les deux similitudes directe et inverse de centres respectifs O et ω qui transforment $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{AC}$. Préciser les éléments de ces deux similitudes.

2° Que peut-on dire des cercles AOB, AOC et ABC par rapport à AC, AB et Aω? Montrer que OA et Oω sont les bissectrices de l'angle BOC, que les triangles ωAM et ωNB sont équivalents et qu'il en est de même des triangles ωAN et ωMC.

3° Démontrer que l'axe radical des cercles de diamètres AN et MC est une droite fixe Δ tandis que l'axe radical des cercles de diamètres AN et MB passe par un point fixe S. Préciser les positions de Δ et S. (On pourra opérer vectoriellement en calculant $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et λ puis en écrivant que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IN}$ est égal à $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IM}$ ou à $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}$ quel que soit λ).

● **329.** Un point variable M décrit une droite fixe Δ perpendiculaire en H au prolongement Bx du segment AB. La perpendiculaire menée de B à AM coupe AM en C et coupe Δ en N. Les droites AN et BM se coupent en D.

1° Nature du quadrangle ABMN? Montrer que le produit $\overline{HM}.\overline{HN}$ est constant et que le cercle de diamètre MN passe par deux points fixes I et J conjugués harmoniques par rapport à A et B.

2° Trouver le lieu du centre O du cercle AMN et montrer qu'il passe par un deuxième point fixe A_1. Démontrer que CD passe par un point fixe K tel que (ABHK) = — 1.

3° La droite CD coupe le cercle O en P et Q et coupe le diamètre AE de ce cercle en F. Démontrer que $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AE}.\overline{AF} = \overline{AK}.\overline{AA_1}$ et trouver le lieu des points P et Q.

● **330.** On considère un cercle Γ de centre O, de rayon R, une corde BC et un point A de ce cercle.

1° Les points B et C restant fixes et le point A décrivant le cercle donné, montrer que les lieux des milieux des segments AB et AC sont deux cercles Γ_1 et Γ_2. Déterminer l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 et le centre radical de Γ, Γ_1 et Γ_2.

2° Evaluer en fonction de l'angle A du triangle ABC l'angle sous lequel se coupent les cercles Γ_1 et Γ_2.

3° Montrer que lorsque le point A décrit Γ, B et C restant fixes, les lieux des points I, J, K et L, centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits dans le triangle ABC se compose de deux cercles dont la somme des carrés des rayons est égale à $4R^2$. *(Lyon.)*

● **331.** Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy. Un cercle de rayon a est tangent en O à l'axe Oy et une droite (D) est parallèle à Ox et a pour ordonnée b. Une droite (E) variable passant par O coupe D en A et le cercle en B. Les parallèles à Ox et Oy menées respectivement par B et A se coupent en M.

1° Construire les points M situés sur une droite donnée (D′) parallèle à D. Existe-t-il des points M sur D?

2°. On trouve en général deux points M_1 et M_2 sur (D′) se projetant sur (D) en A_1 et A_2. Soit I l'intersection de (D) avec Oy. Montrer que le produit $\overline{IA_1}.\overline{IA_2}$ est constant et en déduire que A_1 et A_2 sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes lorsque (D′) varie. *(Lyon.)*

● **332.** Dans un plan on donne deux points fixes O, O′ ($\overline{OO'} = d$) et un nombre positif $k \neq 1$. A tout cercle C du plan, de centre O, de rayon R on associe le cercle C′, de centre O′, de rayon kR.

1° Montrer que C′ est homothétique de C dans le rapport k et aussi dans le rapport $-k$. Construire les centres respectifs S, S′ de ces homothéties. Calculer $\overline{OS}$, $\overline{OS'}$ sur l'axe OO′ ainsi que la distance SS′.

2° Quelles sont suivant les valeurs de R, les positions relatives des cercles C et C′? Quel est le lieu Γ de leurs points communs quand R varie?

3° On donne le pied A sur OO′ de l'axe radical de C et C′ par son abscisse OA $= a$. Calculer R en fonction de d, a, k. Montrer que la puissance de A par rapport au cercle C vaut $\overline{AS}.\overline{AS'}$. Construire le cercle C. Discuter.

4° On suppose $k < 1$. Un cercle passant par O et O′ coupe le lieu Γ en M_1 et M_2. Soient α, O_1, O'_1 les angles en M_1, O et O′ du triangle M_1OO'. Calculer $\operatorname{tg} O_1$ en fonction de k et de α au moyen des relations $\sin O_1 = k \sin O'_1$ et $O_1 + O'_1 = \pi - \alpha$.

Soient $\pi - \alpha$, O_2, O'_2 les angles en M_2, O et O′ du triangle M_2OO'. Calculer de même $\operatorname{tg} O_2$. En déduire la relation entre $\sin \alpha$ et $\operatorname{tg} O$, O étant l'angle en O du quadrilatère $OM_1O'M_2$. Cas particulier où SS′ $=$ OO′. *(Paris.)*

● **333.** Deux sphères variables S et S′ passent respectivement par les cercles fixes γ et γ' d'un même plan P ou d'une même sphère Σ.

1° Montrer que le plan radical de S et S′ passe par une droite fixe Δ.

2° Étudier le cas où la sphère S est tangente à P ou à Σ et le cas où les deux sphères S et S′ sont toutes deux tangentes à P ou à Σ.

● **334.** Trois sphères variables S_1, S_2, S_3 passent respectivement par les cercles fixes γ_1, γ_2 et γ_3 d'un même plan P, dont les centres ne sont pas alignés.

1° Montrer que l'axe radical des trois sphères S_1, S_2 et S_3 passe par un point fixe.

2° Étudier le cas où la sphère S_1 est tangente au plan P, le cas où S_1 et S_2 sont tangentes à P et le cas où S_1, S_2 et S_3 sont tangentes à P.

● **335.** Reprendre le problème précédent en remplaçant le plan P par une sphère Σ.

● **336.** Une sphère variable ω passe par un point fixe A et coupe la sphère fixe S suivant un cercle variable γ. Soit Δ l'intersection du plan de γ et du plan tangent en A à la sphère ω.

1° Montrer que le lieu de la droite Δ est un plan fixe P.

2° Que représente le plan P pour la sphère S et le point fixe A?

● **337.** On donne une sphère O(R) et un point fixe A tel que OA $= d$. Une sphère variable dont le centre M est situé sur la sphère O passe par A. Démontrer que l'enveloppe du plan radical des sphères (O) et (M) est une sphère de centre A.

● **338.** On considère deux sphères fixes O(R) et A(a). Un plan variable tangent en M à la sphère A coupe la sphère O suivant un cercle γ. Soit ω le centre de la sphère passant par A et contenant γ. Déterminer le lieu de ω et montrer que la droite ωM passe par un point fixe

● **339.** 1° Déterminer le lieu géométrique des points de contact avec un plan P des sphères tangentes à ce plan et passant par deux points donnés A et B.

2° Construire les sphères passant par trois points non alignés A, B, C et tangentes soit à un plan donné P, soit à une droite donnée Δ.

● **340.** Soit S une sphère variable passant par deux points donnés A et B et soit Σ une sphère fixe.

1° Montrer que le plan radical de S et de Σ passe en général par un point fixe I de la droite AB. En déduire le lieu des points de contact avec Σ des sphères S tangentes à Σ.

2° Construire les sphères passant par trois points non alignés ABC et tangentes à la sphère Σ.

● **341.** On considère deux cercles fixes de l'espace (C) et (γ) non situés sur une même sphère et dont les plans se coupent suivant une droite Δ.

1° Montrer qu'il existe sur la droite Δ un point I et un seul dont les puissances par rapport aux cercles (C) et (γ) sont égales. Cas d'exception.

2° Déterminer une sphère passant (C) et tangente à (γ).

● **342.** Deux cercles γ et γ' appartiennent à un même plan P ou à une même sphère Σ et deux sphères S et S' passent respectivement par γ et γ'.

1° Montrer que le plan radical de S et S' passe par une droite fixe Δ.

2° Lieu géométrique du point de contact M des sphères S et S' lorsqu'elles sont tangentes.

● **343.** Une sphère variable ω est tangente à deux sphères fixes O(R) et O'(R').

1° Montrer que la droite MM' qui joint les points de contact passe par l'un ou l'autre de deux points fixes I et J.

2° Lorsqu'une sphère est tangente à trois sphères fixes O_1, O_2 et O_3 en M_1, M_2 et M_3, le plan M_1 M_2 M_3 passe par l'une ou l'autre de quatre droites fixes.

TREIZIÈME LEÇON

CERCLES ORTHOGONAUX

• **304. Définition.** — ***Deux cercles sécants d'un même plan sont orthogonaux lorsque les tangentes en un de leurs points communs sont perpendiculaires*** (n° 52).

Pour que les deux cercles O(R) et O'(R'), sécants en A et B soient orthogonaux (fig. 266) il faut et il suffit que la tangente en A à l'un d'eux passe par le centre de l'autre ou que les rayons OA et O'A soient perpendiculaires. Cela revient à dire que le triangle OAO' doit être rectangle en A ou que le point A doit appartenir au cercle de diamètre OO'.

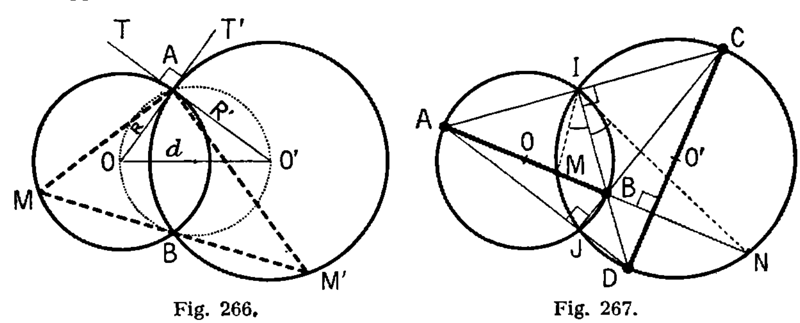


Fig. 266. Fig. 267.

• **305. Théorème I.** — ***Pour que deux cercles*** O ***et*** O' ***soient orthogonaux il faut et il suffit qu'une sécante*** MM' ***passant par un de leurs points communs soit vue de l'autre point commun sous un angle droit.***

On sait (n° 244) que M' est le transformé de M dans la similitude de centre A qui transforme $\overrightarrow{AO}$ en $\overrightarrow{AO'}$. L'égalité $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ montre (fig. 266) que pour que l'angle OAO' soit droit il faut et il suffit que l'angle $M\widehat{A}M'$ le soit.

• **306. Théorème II.** — ***Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit que le carré du rayon de l'un d'eux soit égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre.***

La relation $\overline{OA}^2 + \overline{O'A}^2 = \overline{OO'}^2$ (fig. 266) s'écrit :

$$\boxed{R^2 + R'^2 = d^2} \qquad (1)$$

et donne $R^2 = d^2 - R'^2$ et $R'^2 = d^2 - R^2$. C'est-à-dire :

$$\boxed{R^2 = \mathcal{T}_{o'}(O)} \quad \text{et} \quad \boxed{R'^2 = \mathcal{T}_o(O').} \qquad (2)(3)$$

On peut donner à cette relation des formes variées. Désignons (fig. 267) par AB un diamètre du cercle O et par CD un diamètre du cercle O'. La relation (2) s'écrit :

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}. \qquad (4)$$

Elle se ramène à : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ ou $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'}$ etc. (5)
dont l'analogie avec les formules de la division harmonique est évidente.

• **307. Théorème III.** — ***Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit qu'un diamètre de l'un soit divisé harmoniquement par l'autre.***

Soit AB un diamètre du cercle O qui coupe le cercle O' en M et N (fig. 267).

La relation (2) qui s'écrit : $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM}.\overline{ON}$ (6)
est équivalente à : $(ABMN) = -1$ (7)

Il faut et il suffit que la division (ABMN) soit harmonique.

• **308. Corollaire.** — ***Pour que deux cercles O et O' soient orthogonaux il faut et il suffit qu'ils aient pour diamètres respectifs deux côtés opposés d'un quadrangle orthocentrique.***

1° Le faisceau I(ABMN) étant harmonique et IA étant perpendiculaire à IB (fig. 267), les droites IA et IB sont les bissectrices de l'angle MIN et passent par les milieux C et D des arcs MN du cercle O'. Il en est de même de JA et JB et on voit que le quadrangle ABCD est orthocentrique.

2° Si par hypothèse le quadrangle ABCD est orthocentrique les cercles O et O' de diamètres AB et CD se coupent aux points d'intersections I de AC et BD, J de AD et BC. L'angle AJC étant droit les cercles sont orthogonaux (n° 305).

• **309. Remarque.** — Si M et M' sont homologues dans une des homothéties qui font correspondre les cercles O et O' (fig. 197) on sait (n° 221) que : $(AM, AM') = \frac{V}{2}$ ou $\frac{V+\pi}{2}$. Les cercles seront orthogonaux si l'angle MAM' est égal à $\frac{\pi}{4}$ ou à $\frac{3\pi}{4}$.

En particulier, MM' pouvant être tangente commune :

Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit qu'une tangente commune à ces deux cercles soit vue de l'un de leurs points communs sous un angle de $\frac{\pi}{4}$ ou de $\frac{3\pi}{4}$.

• **310. Cercles orthogonaux à un cercle donné.** — 1° Un cercle de centre O', orthogonal au cercle donné O(R), coupe celui-ci sur le cercle de diamètre OO' c'est-à-dire aux points de contact A et B des tangentes issues de O' au cercle O et on a (fig. 266) : R' = O'A.

2° Tout cercle (ω) passant par un point donné M et orthogonal au cercle donné O (fig. 268) passe par un deuxième point fixe N du diamètre AB passant

par M, tel que (ABMN) = — 1 et tout cercle passant par M et N est orthogonal à O. Le lieu du centre ω de ce cercle est donc la médiatrice Δ de MN et la relation : $\overline{\omega M}^2 = \mathcal{P}_o(\omega)$ montre que Δ est l'axe radical du cercle O et du cercle-point M.

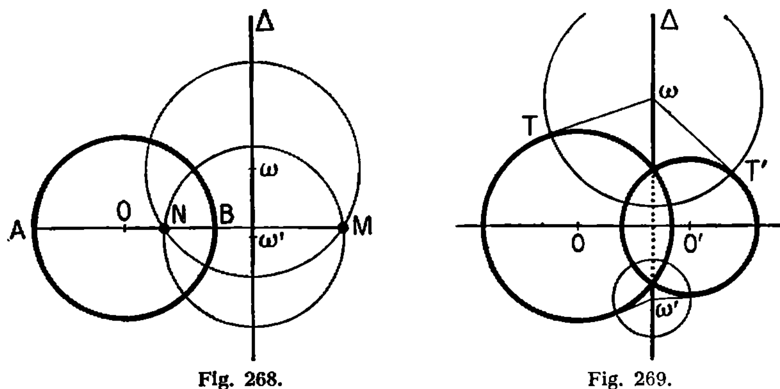


Fig. 268. Fig. 269.

• 311. Cercles orthogonaux à deux cercles donnés. — Pour que (fig. 269) le cercle $\omega(\rho)$ soit orthogonal aux deux cercles donnés O(R) et O'(R') il faut et il suffit que l'on puisse mener de ce point, à ces deux cercles, des tangentes ωT et $\omega T'$ égales à ρ. Donc (n° 288) :

Le lieu des centres des cercles orthogonaux à deux cercles donnés est la portion, extérieure à ces deux cercles, de leur axe radical.

Notons que deux cercles quelconques ω et ω' de cette famille admettent la droite OO' pour axe radical :

$$\mathcal{P}_\omega(O) = \mathcal{P}_{\omega'}(O) = R^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\omega(O') = \mathcal{P}_{\omega'}(O') = R'^2.$$

Tout cercle orthogonal à trois cercles donnés dont les centres ne sont pas alignés a pour centre le centre radical ω de ces trois cercles. Ce cercle n'existe que si le point ω est extérieur aux trois cercles donnés.

• 312. Pseudo-orthogonalité. — Soit AB une corde du cercle O(R), te le cercle $\omega(\rho)$ de diamètre AB (fig. 270). On dit que *le cercle ω est coupé diamétralement par le cercle* O *et le cercle* O *est dit pseudo-orthogonal au cercle ω.* En posant $O\omega = d$ on obtient la relation :

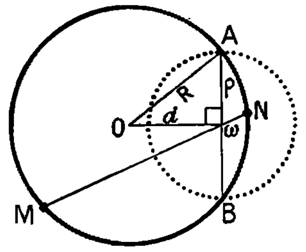


Fig. 270.

$$\boxed{d^2 = R^2 - \rho^2} \qquad (1)$$

ou

$$\boxed{\mathcal{P}_o(\omega) = -\rho^2} \qquad (2)$$

Pour qu'un cercle ω soit coupé diamétralement

par un cercle O il faut et il suffit que le carré de son rayon soit égal à l'opposé de la puissance de son centre par rapport au cercle O.

Remarquons que cette condition (1) ou (2) n'est autre que la condition pour que l'axe radical AB des cercles O et ω passe par ω.

Il existe un cercle et un seul, de centre O donné, pseudo-orthogonal au cercle donné $\omega(\rho)$. Si le cercle O passe par le point fixe M, il passe aussi par le point fixe N de la droite ωM tel que $\overline{\omega M}\,.\,\overline{\omega N} = -\rho^2$.

Lorsque le point fixe ω a une puissance constante $\mathfrak{P}$ par rapport au cercle variable O :

1° Si $\mathfrak{P} = k^2$, le cercle O est orthogonal au cercle $\omega(k)$;

2° Si $\mathfrak{P} = -k^2$, le cercle O est pseudo-orthogonal au cercle $\omega(k)$;

3° Si $\mathfrak{P} = 0$, le cercle O est orthogonal (ou pseudo-orthogonal) au cercle point ω.

FAISCEAUX DE CERCLES

• **313. Définition.** — ***On appelle faisceau de cercles toute famille de cercles admettant deux à deux le même axe radical*** Δ.

Il en est ainsi, par exemple, des cercles passant par deux points fixes A et B ou (fig. 269) des cercles orthogonaux à deux cercles fixes (n° 311).

Nous allons montrer qu'un faisceau est défini lorsque l'on connaît un cercle O(R) de ce faisceau et l'axe radical commun Δ et par suite lorsque l'on connaît deux éléments O(R) et O'(R') du faisceau. Comme Δ est l'axe radical du cercle O et d'un cercle quelconque O' du faisceau il en résulte que OO' est perpendiculaire à Δ. Donc :

Les centres des cercles d'un faisceau sont alignés sur une perpendiculaire à l'axe radical Δ ***du faisceau.***

Étudions les différents genres de faisceaux suivant la position relative du cercle O et de la droite Δ donnés.

• **314. 1er Cas. Faisceau de cercles sécants.** — Si le cercle O coupe la droite Δ (fig. 271) en A et B, il en est de même de tout cercle O' du faisceau (n° 288, 1°). *Les points fixes* A *et* B *sont les points de base du faisceau.*

Les cercles du faisceau sont les cercles passant par les points de base A ***et*** B.

Il existe un cercle du faisceau et un seul admettant pour centre un point donné O' de la droite des centres Hx, médiatrice de AB. Le rayon O'A de ce cercle est au moins égal à HA. Notons que :

Tout cercle du faisceau de points de base A *et* B *est un lieu de points* M *tels que* (MA, MB) $= \theta + k\pi$ (θ donné.)

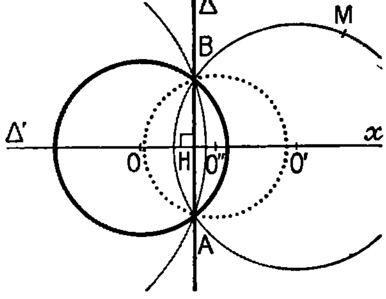


Fig. 271.

● **315. 2e Cas. Faisceau de cercles tangents.** — Si le cercle O est tangent en A à Δ (fig. 272), il en est de même de tout cercle du faisceau (no 288, 1o) :

***Les cercles du faisceau sont les cercles tangents en* A *à* Δ.**

Il existe un cercle et un seul admettant pour centre un point donné de la droite des centres Ax. Son rayon O'A devient nul lorsque O' vient en A :

Le cercle-point A *fait partie du faisceau* (O, Δ).

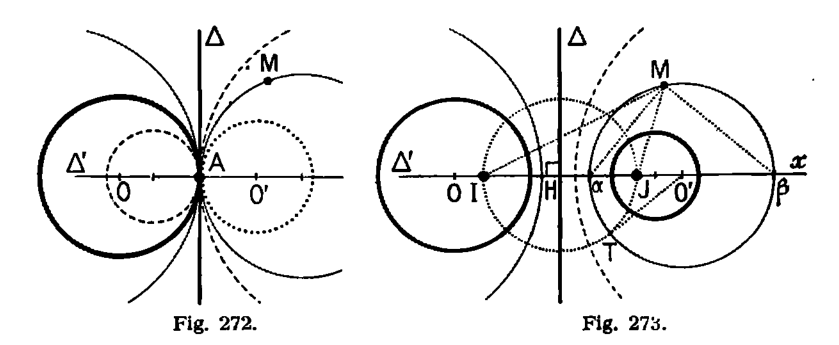


Fig. 272. Fig. 273.

● **316. 3e Cas. Faisceau de cercles à points-limites.** — Si le cercle O est extérieur à la droite Δ (fig. 273), la projection H de O sur Δ a une puissance constante positive ρ^2 par rapport à tout cercle du faisceau. Un cercle du faisceau est donc caractérisé par le fait d'être centré sur la perpendiculaire Hx à Δ (no 313) et d'être orthogonal au cercle H(ρ). Soit IJ le diamètre du cercle H(ρ) porté par la droite Hx. Tout point O' de la droite Hx, extérieur au segment IJ est le centre d'un cercle du faisceau dont le rayon $R' = \sqrt{\overline{O'I}\,.\,\overline{O'J}}$ est égal à la tangente O'T au cercle H(ρ). Lorsque O' vient en I ou J, ce rayon s'annule :

Les cercles points* I *et* J *font partie du faisceau et se nomment points de Poncelet ou points-limites du faisceau.

Soit αβ le diamètre du cercle O' porté par la droite Hx. La relation :

$$\overline{HI}^2 = \overline{HJ}^2 = \overline{H\alpha}\,.\,\overline{H\beta} \quad \text{montre que} \quad (IJ\alpha\beta) = -1 :$$

***Les cercles du faisceau sont les cercles qui admettent pour extrémités d'un diamètre deux points divisant harmoniquement le segment* IJ.**

Pour tout point M du cercle O' de diamètre αβ, on a (no 272) la relation :

$$\frac{MI}{MJ} = \frac{\alpha I}{\alpha J} = \frac{\beta I}{\beta J} = k.$$

Tout cercle du faisceau est un lieu de points M *dont le rapport des distances aux points limites est constant.*

● **317. Théorème général.** — ***Dans un faisceau de cercles il existe un cercle et un seul passant par un point donné* M *du plan.***

C'est le cercle ABM dans le cas d'un faisceau à points de base A et B (fig. 271), le cercle centré sur la médiatrice de AM et tangent en A à Δ dans le cas d'un

faisceau de cercles tangents (fig. 272) et enfin, le cercle ayant pour diamètre le segment qui joint les pieds α et β des bissectrices issues de M du triangle MIJ dans le cas d'un faisceau à points limites I et J (fig. 273). Si M est sur la droite IJ, il est confondu avec α ou β et il suffit d'achever la division harmonique (IJ$\alpha\beta$).

Lorsque M vient sur Δ le cercle correspondant du faisceau vient se confondre avec la droite Δ qui peut être considérée comme un cercle de rayon infini du faisceau.

• **318. Relation entre les rayons de trois cercles d'un faisceau.** — Soient $O_1(R_1)$, $O_2(R_2)$ et $O_3(R_3)$ trois cercles d'un même faisceau d'axe radical Δ. Désignons par M un point quelconque du plan par K sa projection sur Δ et par $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ses puissances par rapport aux trois cercles donnés. On a (n° 291) :

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = 2\,\overline{O_1O_2}.\overline{KM} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3 = 2\,\overline{O_1O_3}.\overline{KM}.$$

D'où
$$(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)\,\overline{O_1O_3} - (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3)\,\overline{O_1O_2} = 0$$

soit
$$\boxed{\mathcal{P}_1.\overline{O_2O_3} + \mathcal{P}_2.\overline{O_3O_1} + \mathcal{P}_3.\overline{O_1O_2} = 0} \qquad (1)$$

Or : $\mathcal{P}_1 = \overline{MO}_1^2 - R_1^2$; $\mathcal{P}_2 = \overline{MO}_2^2 - R_2^2$ et $\mathcal{P}_3 = \overline{MO}_3^2 - R_3^2$

et d'autre part d'après la relation de Stewart (n° 90) on a :

$$\overline{MO}_1^2.\overline{O_2O_3} + \overline{MO}_2^2.\overline{O_3O_1} + \overline{MO}_3^2.\overline{O_1O_2} + \overline{O_2O_3}.\overline{O_3O_1}.\overline{O_1O_2} = 0.$$

On obtient en éliminant M :

$$\boxed{R_1^2.\overline{O_2O_3} + R_2^2.\overline{O_3O_1} + R_3^2.\overline{O_1O_2} + \overline{O_2O_3}.\overline{O_3O_1}.\overline{O_1O_2} = 0} \qquad (2)$$

Cette relation, qui n'est autre que la relation de Stewart appliquée au point A commun aux trois cercles lorsqu'il existe, permet de calculer le rayon R_3, par exemple, connaissant R_1, R_2 et les points O_1, O_2 et O_3.

• **319. Théorème.** — ***Le lieu géométrique des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles*** O ***et*** O′ ***est un nombre constant*** $k \neq 1$ ***est le cercle du faisceau*** (O,O′) ***dont le centre*** ω ***divise le vecteur*** $\overrightarrow{OO'}$ ***dans le rapport*** k.

Soit K la projection d'un point M quelconque du plan sur l'axe radical Δ des cercles O et O′ (fig. 274) et soit ω le centre du cercle du faisceau (O, O′) passant par M :

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}_O(M) &= \mathcal{P}_O(M) - \mathcal{P}_\omega(M) = 2\,\overline{O\omega}.\overline{KM}\\ \mathcal{P}_{O'}(M) &= \mathcal{P}_{O'}(M) - \mathcal{P}_\omega(M) = 2\,\overline{O'\omega}.\overline{KM}\end{aligned}\right\}\quad \text{Donc : } \frac{\mathcal{P}_O(M)}{\mathcal{P}_{O'}(M)} = \frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}.$$

Pour que le point M soit un point du lieu il faut et il suffit que :

$$\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}} = k \qquad \text{ou :} \qquad \overline{\omega O} - k\,\overline{\omega O'} = 0$$

Ce qui revient à dire que le point M appartient au cercle fixe du faisceau (O, O′) dont le centre ω vérifie la relation précédente.

EXEMPLES. — 1° Si $R = R' = 0$ on retrouve le lieu des points M tels que : $\overline{MO}^2 = k\,\overline{MO'}^2$ (n° 93 et 272).

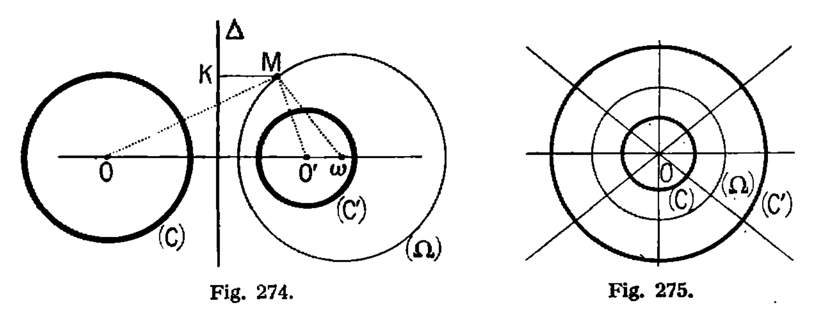


Fig. 274. Fig. 275.

2° *Le cercle de similitude* de deux cercles donnés O et O' (n° 244) est le lieu des points M tels que :

$$\frac{MO'}{MO} = \frac{R'}{R} = k \quad \text{donc :} \quad \frac{\overline{MO'}^2}{\overline{MO}^2} = \frac{R'^2}{R^2} = \frac{\overline{MO'}^2 - R'^2}{\overline{MO}^2 - R^2} = \frac{\mathcal{P}_{o'}(M)}{\mathcal{P}_{o}(M)} = k^2.$$

C'est donc un cercle du faisceau (O, O'), propriété évidente lorsque les deux cercles possèdent au moins un point commun A.

● **320. Remarque.** — Si le point O' est en O (fig. 275) le lieu des points M tels que $\mathcal{P}_o(M) = k\,\mathcal{P}_{o'}(M)$ satisfait à : $\overline{MO}^2 - R^2 = k\,(\overline{MO}^2 - R'^2)$.

Soit à : $(1 - k)\,\overline{MO}^2 = R^2 - kR'^2$.

Le lieu est un cercle concentrique aux cercles donnés. C'est pourquoi on dit que *les cercles de centre donné* O *forment un faisceau de cercles singulier* dont l'axe radical est rejeté à l'infini.

FAISCEAUX ORTHOGONAUX

● **321. Théorème.** — ***Il existe une infinité de cercles orthogonaux à chacun des cercles d'un faisceau* (F). *Ces cercles engendrent un faisceau* (Φ) *et les deux faisceaux* (F) *et* (Φ) *sont dits orthogonaux ou conjugués.***

Pour que le cercle $\omega(\rho)$ soit orthogonal (fig. 276) aux différents cercles du faisceau (F) défini par les cercles O et O', il faut qu'il soit orthogonal à chacun des cercles O et O'. Cela suffit, car si le cercle $\omega(\rho)$ est orthogonal aux deux cercles O et O', son centre est situé sur l'axe radical Δ du faisceau (F) et le carré ρ^2 de son rayon est égal à la puissance de son centre ω par rapport à tout cercle du faisceau (F) (n° 306).

Les différents cercles ω admettent, deux à deux, la droite OO' pour axe radical car chacun des points O et O' a même puissance par rapport aux différents cercles ω. Ces cercles ω engendrent donc un faisceau (Φ) et réciproquement

tout cercle O du faisceau (F) est orthogonal à chacun des cercles du faisceau (Φ) : *Les deux faisceaux réciproques* (F) *et* (Φ) *sont dits orthogonaux ou conjugués ; la droite des centres de l'un est l'axe radical de l'autre.*

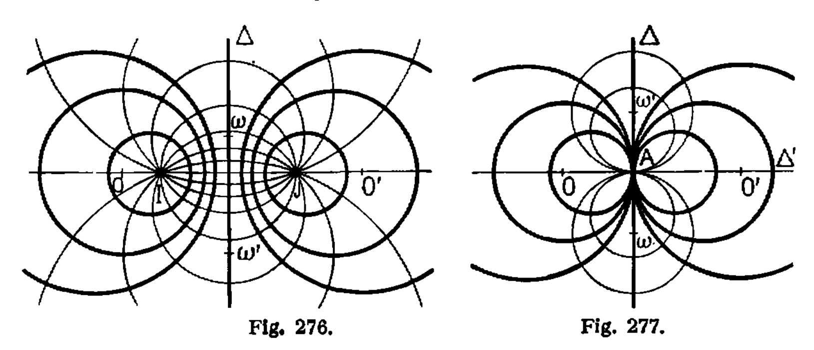


Fig. 276. Fig. 277.

● **322. Propriétés.** — 1° ***Lorsque deux faisceaux de cercles sont orthogonaux les points de base de l'un sont les points-limites de l'autre.***

Si un faisceau (F) admet I et J pour points limites (fig. 276), tous les cercles du faisceau conjugué (Φ) sont orthogonaux aux cercles points I et J. Le faisceau (Φ) admet donc I et J pour points de base.

Si un faisceau (Φ) admet I et J pour points de base, les cercles points I et J font partie du faisceau conjugué (F). Celui-ci admet donc I et J pour points limites.

2° ***Le faisceau*** (F) ***des cercles tangents en*** A ***à*** Δ ***est orthogonal au faisceau*** (Φ) ***des cercles tangents en*** A ***à la perpendiculaire*** Δ' ***à*** Δ.

Tout cercle ω (fig. 277) orthogonal aux cercles O tangents en A à Δ, a pour centre un point ω de Δ et pour rayon ωA. Il est donc tangent en A à Δ'.

3° ***Le faisceau singulier des cercles de centre*** O ***est orthogonal au faisceau des droites issues de*** O.

Ce cas (fig. 275) peut être regardé comme celui d'un faisceau à points limites lorsque l'un de ces points limites s'éloigne indéfiniment.

APPLICATIONS

● **323. Utilisation du faisceau conjugué.** — Dans les problèmes où interviennent les cercles d'un faisceau (F) il y a souvent avantage à considérer les cercles du faisceau orthogonal (Φ).

Exemple I. — *Construire le cercle* ω *du faisceau de points limites* I *et* J *passant par un point donné* M.

Le cercle cherché (fig. 278) est orthogonal en M au cercle du faisceau admettant I et J pour points de base, c'est-à-dire au cercle IJM. Le centre du cercle ω est donc situé à l'intersection de la droite IJ et de la tangente en M au cercle IJM. Son rayon est égal à ωM.

EXEMPLE II. — *Construire le cercle ω d'un faisceau* (F) *donné orthogonal à un cercle donné de centre* M.

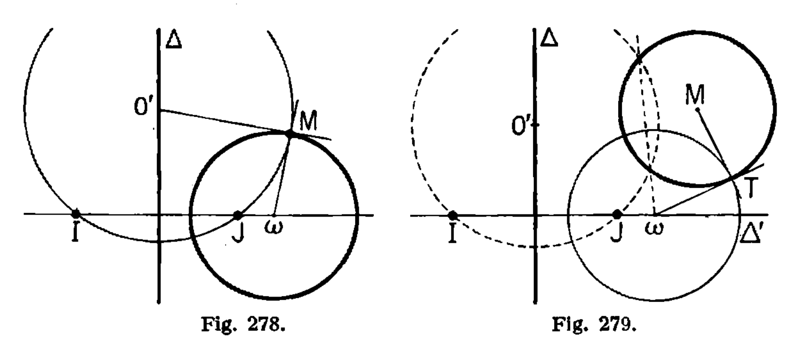


Fig. 278. Fig. 279.

Pour qu'un cercle appartienne au faisceau (F) il faut et il suffit (fig. 279) qu'il soit centré sur la droite des centres Δ' de ce faisceau, et qu'il soit orthogonal à un cercle quelconque O' du faisceau conjugué (Φ). Le cercle ω orthogonal aux cercles M et O' a donc pour centre l'intersection de Δ' et de l'axe radical δ du cercle M et du cercle O'. On choisira ce dernier de façon qu'il coupe le cercle M.

Il existe, dans un faisceau de cercles, un cercle et un seul orthogonal à un cercle quelconque ne faisant partie du faisceau conjugué.

Si le cercle M est un cercle-point et si le faisceau (F) est un faisceau à points limites, on obtient la solution du problème précédent.

• 324. Problème I. — *Construire un cercle tangent à une droite donnée* Δ *et passant par deux points donnés* A *et* B.

Tout cercle ω tangent en M à Δ et passant par A et B (fig. 280) appartient au faisceau de points de base A et B. Le point M appartient par suite au cercle du faisceau conjugué de points limites A et B, orthogonal à Δ. Le centre de ce cercle est l'intersection I de Δ et de AB. Son rayon $\sqrt{\overline{IA}.\overline{IB}}$ est égal à la tangente IT menée de à un cercle quelconque passant par A et B.

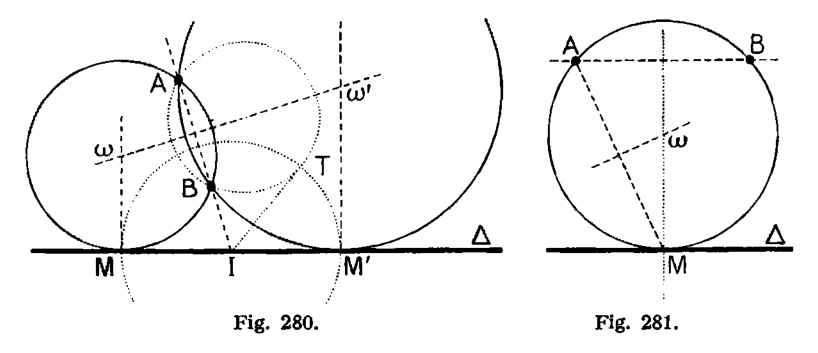


Fig. 280. Fig. 281.

Réciproquement si M et M' sont les intersections de Δ par le cercle I les cercles ABM et ABM' orthogonaux en M et M' au cercle I sont tangents à Δ.

Discussion. — 1° Δ *coupe la droite* AB *en* I (fig. 280). — La construction est possible si I est extérieur au segment AB, c'est-à-dire si A et B sont d'un même côté de Δ. On obtient deux solutions, les cercles ABM et ABM'.

Si A, par exemple est sur Δ, les points I, M et M' sont confondus en A. Il y a une solution double : le cercle passant par B tangent en A à Δ.

Si A et B sont de part et d'autre de Δ, pas de solution.

2° Δ *est parallèle à* AB (fig. 281). — Les points I et M' sont rejetés à l'infini dans la direction AB et le cercle I devient la médiatrice de AB qui coupe Δ en M. Une solution : le cercle ABM. La droite AB constituant la solution dégénérée ABM'. En définitive :

***Il existe deux cercles passant par deux points donnés* A *et* B *et tangents à une droite donnée* Δ *qui coupe un des prolongements du segment* AB.**

• **325. Remarque.** — On effectue de la même façon la construction d'un cercle ω appartenant à un faisceau de points limites J et K et tangent en M à une droite donnée Δ. Le point I est l'intersection de Δ et de la médiatrice de JK. On a alors : IM = IJ et le point ω est l'intersection de la droite JK et de la perpendiculaire en M à Δ. Toujours deux solutions lorsque JK n'est pas perpendiculaire à Δ, une seule dans le cas contraire.

• **326. Problème II.** — ***Construire les cercles tangents à un cercle* O *donné et passant par deux points donnés* A *et* B.**

Tout cercle ω tangent en M au cercle O et passant par A et B (fig. 282) appartient au faisceau de points de base A et B. Le point M appartient par suite au cercle du faisceau conjugué, de points limites A et B, orthogonal au cercle O. Le centre I de ce cercle est l'intersection de AB et de l'axe radical CD du cercle O et d'un cercle quelconque O' passant par A et B. Les intersections M et M' du cercle I et du cercle O sont les points de contact des tangentes IM et IM' au cercle O.

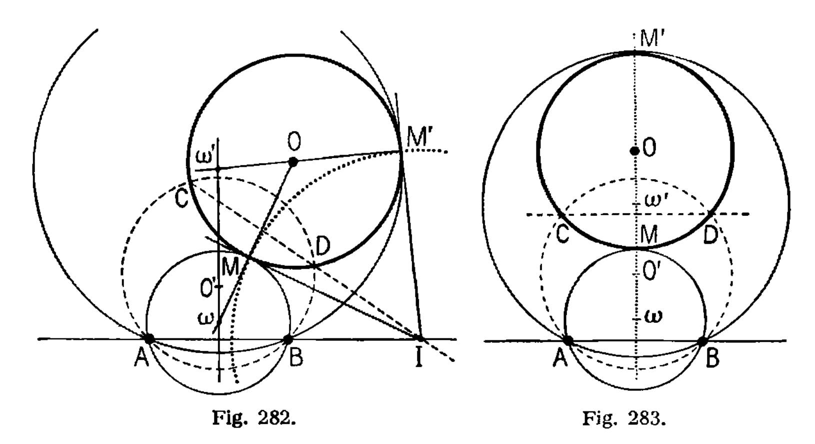


Fig. 282. Fig. 283.

Réciproquement les points M et M' étant ainsi déterminés les cercles ABM et ABM' orthogonaux en M et M' au cercle I, sont tangents au cercle O.

DISCUSSION. — 1° *Les droites* AB *et* CD *se coupent en* I (fig. 282). — La construction est possible si le point I est extérieur aux cercles O et O'. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que A et B appartiennent au même arc d'extrémités C et D du cercle O', c'est-à-dire que A et B soient tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle O. On obtient alors deux solutions ABM et ABM'.

L'une de ces solutions dégénère en la droite AB lorsque cette dernière est tangente au cercle O.

Si le point A vient sur le cercle O, les points I, M et M' sont confondus en A : une solution double qui peut dégénérer en la droite AB. Si les points A et B sont l'un intérieur, l'autre extérieur au cercle O il n'y a pas de solution.

2° *Les droites* AB *et* CD *sont parallèles* (fig. 283). — Dans ce cas qui se présente lorsque OA et OB sont égaux, le point I est rejeté à l'infini dans la direction de AB. Le cercle I dégénère en la médiatrice de AB qui coupe le cercle O en deux points diamétralement opposés M et M'. Deux solutions : les cercles ABM et ABM' dont l'un dégénère en la droite AB lorsque cette dernière est tangente au cercle O.

Il existe deux cercles tangents à un cercle donné* O *et passant par deux points donnés* A *et* B *tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle donné* O *lorsque la droite* AB *n'est pas tangente à ce cercle.

• **327. Remarque.** — On effectue de la même façon la construction d'un cercle appartenant à un faisceau de points limites J et K et tangent en M à un cercle donné O. Le point I est l'intersection de CD (axe radical du cercle O et d'un cercle sécant quelconque O' du faisceau donné) et de la médiatrice de JK. On a : IM = IJ. Toujours deux solutions lorsque la médiatrice de JK n'est pas tangente au cercle O. Une seule dans le cas contraire.

SPHÈRES ORTHOGONALES

• **328. Définition.** — ***Deux sphères* O (R) *et* O' (R') *sont orthogonales lorsque les plans tangents en un de leurs points communs* M *sont perpendiculaires.***

Cela revient à dire que le plan tangent en M à l'une des sphères passe par le centre de l'autre, que le triangle OMO' est rectangle, que le point M appartient à la sphère de diamètre OO' ou que le point O' est le sommet du cône circonscrit à la sphère O le long du cercle d'intersection des deux sphères.

• **329. Propriétés caractéristiques.** — La relation :

$$\boxed{\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2} \qquad (1)$$

permet d'établir comme aux n°s 306 à 308 les propriétés caractéristiques suivantes :

1° *Le carré du rayon de l'une est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre :*

$$R^2 = \mathcal{P}_{o}'(O) \quad \text{et} \quad R'^2 = \mathcal{P}_o(O'). \qquad (2)$$

2° *Un diamètre de l'une est divisé harmoniquement par l'autre.*

On a (fig. 284) : $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM}.\overline{ON}$ ou $(ABMN) = -1$ (3)

3° *Un plan diamétral de l'une coupe les deux sphères suivant deux cercles orthogonaux.*

4° *Les extrémités de deux diamètres perpendiculaires* AB *et* CD *de ces deux sphères sont les sommets d'un tétraèdre orthocentrique* ABCD.

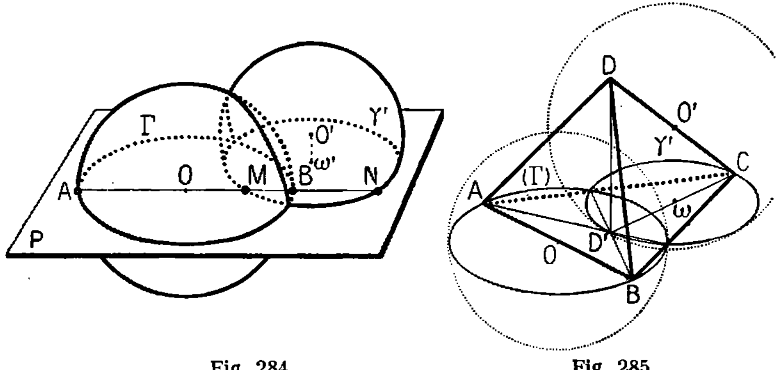


Fig. 284. Fig. 285.

La projection D' du point D sur le plan ABC (fig. 285) est en effet l'orthocentre du triangle ABC.

● **330. Applications.** — 1° La sphère O(R) étant donnée il existe une sphère orthogonale et une seule admettant pour centre un point extérieur donné O'.

2° Toute sphère ω orthogonale à la sphère donnée O(R) et passant par le point donné P du diamètre AB de la sphère O recoupe la droite AB en un point fixe P' conjugué de P par rapport à A et B. Si la sphère ω passe par deux points donnés P et Q elle contient le cercle PP'Q. Les trois points P, Q, R n'étant pas situés dans un plan issu de O il existe une sphère ω et une seule passant par ces trois points; c'est la sphère PP'QR.

3° Toute sphère ω orthogonale à plusieurs sphères données a pour centre un point de même puissance positive par rapport à ces dernières. C'est donc un point de leur plan radical, de leur axe radical ou leur centre radical.

● **331. Faisceaux et réseaux de sphères.** — 1° La famille des sphères O orthogonales à trois sphères ω_1, ω_2 et ω_3 dont les centres ne sont pas alignés constitue *un faisceau de sphères* (F). Ces sphères O admettent deux à deux le plan $\omega_1\omega_2\omega_3$ pour plan radical et leurs centres sont alignés sur l'axe radical Δ des sphères ω_1, ω_2 et ω_3.

2° La famille des sphères ω orthogonales à deux sphères O_1 et O_2 constitue *un réseau de sphères* (Φ). Ces sphères ω admettent trois à trois la droite O_1O_2 pour axe radical et leurs centres sont situés dans le plan radical des sphères O_1 et O_2.

3° Lorsque les sphères O_1 et O_2 appartiennent au faisceau de sphères F toute sphère du faisceau F est orthogonale à chaque sphère du réseau Φ des sphères orthogonales à O_1 et O_2 et réciproquement. *Le faisceau* F *et le réseau* Φ *sont dits orthogonaux ou conjugués.*

Les sphères du réseau Φ orthogonales à une sphère donnée quelconque (M) constituent un faisceau de sphères (φ) orthogonal à (O_1), (O_2) et (M) et par suite à toute sphère du faisceau (F). *Les deux faisceaux* (F) *et* (φ) *sont dits orthogonaux.*

• **332. Cercle orthogonal à une sphère.** — *Un cercle γ est orthogonal à une sphère* S *si la tangente à ce cercle au point d'intersection* A *est perpendiculaire au plan tangent en* A *à la sphère* S.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit (fig. 286) que le plan de γ coupe la sphère S suivant un grand cercle (C) orthogonal à γ. Il résulte du n° 329 (3°) que toute sphère passant par γ est orthogonale à S et lorsqu'une sphère S est orthogonale à deux sphères données (ou à une sphère et un plan donnés) elle est orthogonale à leur cercle d'intersection γ.

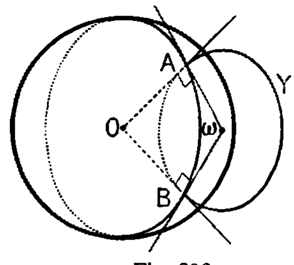


Fig. 286.

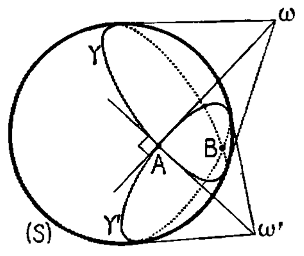


Fig. 287.

• **333. Cercles orthogonaux dans l'espace.** — *Deux cercles γ et γ', non situés dans un même plan, sécants en* A *et* B, *sont orthogonaux si leurs tangentes en un de leurs points communs sont perpendiculaires.*

Si les deux cercles γ et γ' sont les cercles ABC et ABD (fig. 287) ils sont situés sur la sphère S circonscrite au tétraèdre ABCD. Les tangentes en A et B au cercle γ' sont deux génératrices du cône de sommet ω circonscrit à la sphère S le long de γ et réciproquement, tout plan tel que ωAB coupe la sphère S suivant un cercle γ' orthogonal à γ.

Pour que deux cercles d'une même sphère soient orthogonaux il faut et il suffit que le plan de l'un d'eux passe par le sommet du cône de révolution circonscrit à cette sphère le long de l'autre.

Lorsque, sur la sphère S. le cercle variable (γ) est orthogonal à deux cercles fixes γ_1 et γ_2, son plan passe par la droite fixe Δ joignant les sommets ω_1 et ω_2 des cônes associés aux cercles γ_1 et γ_2. Cette famille de cercles (γ) constitue un faisceau de cercles sur la sphère S.

• **334. Pseudo-orthogonalité dans l'espace.** — *Si la corde* AB *de la sphère* O(R) *est un diamètre de la sphère $\omega(\rho)$ on dit que la sphère ω est coupée diamétralement par la sphère* O *et que la sphère* O *est pseudo-orthogonale à la sphère ω.*

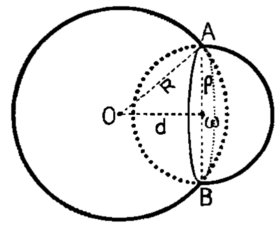


Fig. 288.

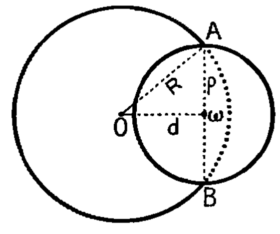


Fig. 289.

Il en résulte (fig. 288) que l'intersection des sphères O et ω est un grand cercle de la

sphère ω et que le plan radical des deux sphères passe par le centre ω de la sphère ω(ρ). En posant Oω = *d*, on obtient la condition :

$$\boxed{d^2 = R^2 - \rho^2} \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\rho^2 = -(d^2 - R^2)} \quad (2)$$

Le carré du rayon de la sphère ω est l'opposé de la puissance de son centre par rapport à la sphère pseudo-orthogonale O.

Lorsqu'un point fixe ω a une puissance constante négative $-\rho^2$ par rapport à une sphère variable O, cette dernière reste pseudo-orthogonale à la sphère ω(ρ).

On définit de même un cercle pseudo-orthogonal à une sphère (fig. 289) ou une sphère pseudo-orthogonale à un cercle dont le plan passe par le centre de cette sphère lorsque la corde AB du premier élément O(R) est un diamètre du second ω(ρ). Les relations (1) et (2) restent valables.

EXERCICES

● **344.** Pour que deux cercles sécants en A et B soient orthogonaux il faut et il suffit que les droites MA et MB, issues d'un point M de l'un d'eux, recoupent l'autre en deux points C et D diamétralement opposés.

● **345.** Pour que deux cercles de centres O et O′ soient orthogonaux il faut et il suffit qu'un point M du cercle de diamètre OO′ ait des puissances opposées par rapport à ces deux cercles.

● **346.** Pour que deux cercles O et O′ soient orthogonaux il faut et il suffit que par un de leurs points d'intersection on puisse leur mener deux sécantes MM′ et NN′, telles que MN et M′N′ soient perpendiculaires, ou que les tangentes en M et M′ soient rectangulaires.

● **347.** Soit un triangle OAB rectangle en O et un point variable M de la droite AB.
1° Montrer que les cercles OAM et OBM sont orthogonaux.
2° Montrer que les cercles ω et ω′ passant par M et respectivement tangents en A à OA et en B à OB sont orthogonaux. Lieu de leur second point commun N.

● **348.** On donne un triangle rectangle OAB et un point fixe C de l'hypoténuse AB. Une sécante variable passant par C coupe OA en M et OB en N.
1° Montrer que les cercles AMC et BNC sont orthogonaux.
2° Lieu géométrique du second point P commun à ces deux cercles.

● **349.** Construire un cercle ω orthogonal à un cercle donné O(R) connaissant son rayon ρ et sachant que son centre se trouve sur une droite donnée Δ ou sur un cercle donné (Γ).

● **350.** Construire une division harmonique (ABCD) connaissant les longueurs AB et CD. En désignant par I et J les milieux de AB et CD établir que $4\overline{IJ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.

● **351.** Étant donné un segment AB et une longueur $2l$ construire un cercle ω(ρ) orthogonal au cercle de diamètre AB, découpant sur la droite AB un segment MN de longueur $2l$ et sachant d'autre part que le point ω se trouve sur une droite donnée Δ ou sur un cercle donné Γ.

● **352.** Reprendre le problème précédent en supposant que le cercle ω à construire soit pseudo-orthogonal.

● **353.** Construire un cercle passant par deux points donnés A et B, et découpant sur une droite donnée Δ un segment MN de longueur $2l$. Discuter :
1° Dans le cas où A et B sont d'un même côté de Δ.
2° Dans le cas où A et B sont de part et d'autre de Δ.

● **354.** On donne un cercle O(R), deux points fixes A et B et une longueur $2l$:

1° Trouver l'enveloppe des cordes de longueur $2l$ du cercle O et l'enveloppe des cordes MN communes au cercle O et à un cercle variable ω passant par A et B.

2° Construire la corde MN sachant que $MN = 2l$.

● **355.** Reprendre le problème précédent en supposant :

1° Que le cercle ω est tangent en A à une droite donnée Δ.

2° Que le cercle ω appartient à un faisceau de point limites I et J.

● **356.** Trouver le lieu des points dont la somme des puissances par rapport à deux cercles donnés O et O′ est nulle.

Étudier le cas de deux cercles O et O′ orthogonaux.

● **357.** On donne deux cercles fixes O(R) et O′(R′), un cercle variable $\omega(\rho)$. Déterminer le lieu du point ω dans les cas suivants :

1° Le cercle ω coupe diamétralement chacun des cercles O et O′.

2° Le cercle ω est orthogonal au cercle O et coupe diamétralement le cercle O′.

3° Le cercle ω est coupé diamétralement par chacun des cercles O et O′. Discuter.

● **358.** Reprendre l'exercice précédent dans le cas où :

1° Le cercle ω est orthogonal à l'un des deux cercles O et O′ et est coupé diamétralement par l'autre.

2° Le cercle ω coupe diamétralement l'un des deux cercles O et O′ et est coupé diamétralement par l'autre.

● **359.** 1° Lorsque trois cercles de centres respectifs A, B et C sont deux à deux orthogonaux leur centre radical D est l'orthocentre du triangle ABC.

2° Comment faut-il modifier l'énoncé lorsque les deux cercles B et C sont orthogonaux entre eux et tous deux pseudo-orthogonaux aux cercle A?

● **360.** On considère un cercle O′ coupé diamétralement en A et B par le cercle O. Démontrer que le cercle de similitude des deux cercles est le cercle ω orthogonal en A et B au cercle O.

● **361.** On considère les divisions harmoniques (ABCD) et (ABEF).

1° Démontrer que les cercles de diamètres AB, CE et DF font partie d'un même faisceau ; on pourra montrer que le pied de l'axe radical des deux derniers a même puissance par rapport aux trois cercles ou établir l'égalité :

$$\frac{\overline{AC}.\overline{AE}}{\overline{AD}.\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}.\overline{BE}}{\overline{BD}.\overline{BF}} = -\frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}.$$

2° Démontrer qu'il en est de même de trois cercles passant respectivement par A et B, C et E, D et F, concourants en M ou dont les centres sont alignés.

● **362.** On considère quatre points alignés A, B, C, D et on désigne par I le milieu de AB, par J le milieu de CD. Démontrer que pour que les deux cercles de diamètres AB et CD soient orthogonaux il faut et il suffit que la somme des puissances d'un point M du plan par rapport à ces deux cercles soit é ale au double de sa puissance par rapport au cercle de diamètre IJ. (On peut procéder vectoriellement en montrant que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$).

● **363.** Étant donné un triangle ABC, d'orthocentre H, de centre de gravité G et de hauteurs AA′, BB′ et CC′, démontrer que le cercle ABC circonscrit au triangle, le cercle d'Euler A′B′C′ et le cercle de diamètre HG font partie d'un même faisceau. Que représente le troisième cercle pour les deux premiers?

● **364.** Soit TT′ une tangente commune aux deux cercles orthogonaux O(R) et O′(R′), se coupant en A et B. On désigne par C et D les projections de T et T′ sur la droite OO′.

1° Calculer en fonction de R et R′ les longueurs AB, TT′ et CD.

2° Nature du quadrilatère ACBD?

● **365.** On considère un triangle AOB et deux cercles variables orthogonaux ω et ω', passant le premier par O et A le second par O et B, se recoupant en M.

1° Trouver le lieu du point N où BM recoupe le cercle ω et le lieu du point P où AM recoupe le cercle ω'.

2° Evaluer l'angle (MA, MB) en fonction de $\theta = (OA, OB)$ et trouver le lieu du point M. Préciser la position de ce lieu à l'aide du point C où la perpendiculaire en A à OA coupe OB et du point D où la perpendiculaire en B à OB coupe OA.

● **366.** Soit un cercle de diamètre BC, de centre O, un point fixe A de ce cercle et une sécante variable issue de A qui coupe la droite BC en M et qui recoupe le cercle en P.

1° Démontrer que les cercles ABM et ACM sont orthogonaux et qu'il en est de même des cercles BMP et CMP.

2° On mène la corde PQ du cercle O parallèle à BC et la corde AN égale à AQ. Montrer que les bissectrices de l'angle $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})$ et celles de l'angle $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ})$ sont fixes, et que le produit AM.AN est constant.

3° Démontrer que le cercle de diamètre MN est orthogonal à un cercle fixe dont on calculera le rayon en fonction de AB et AC.

● **367.** Soit (ω) un cercle du faisceau défini par le cercle O(R) et la droite Δ comme axe radical, et M un point quelconque du cercle (ω).

1° Exprimer en fonction de $\overline{O\omega}$ le rapport de la puissance de M par rapport au cercle O et de la distance orientée $\overline{MH}$ de M à la droite Δ orientée dans un sens donné.

2° Trouver le lieu des points M dont la puissance par rapport au cercle O et la distance orientée de M à l'axe Δ sont dans un rapport algébrique donné.

3° Étudier, dans le cas où R = 0, le lieu des points tel que $\overline{MO}^2 = 2a$ MH (a longueur donnée).

● **368.** Soit un quadrilatère complet ABC A'B'C' dont les diagonales AA', BB' et CC' déterminent un triangle diagonal IJK.

1° Démontrer que le cercle ω circonscrit au triangle IJK est orthogonal aux cercles de diamètres AA', BB' et CC'.

2° En déduire que ω est situé sur une droite remarquable du quadrilatère complet.

● **369.** On désigne par a, b, c les longueurs BC, CA, AB des côtés du triangle ABC, par D, E, F les pieds des bissectrices intérieures et par D', E', F' les pieds des bissectrices extérieures des angles A, B et C.

1° Montrer que les cercles de diamètres DD', EE' et FF', de centres respectifs α, β et γ ont deux points communs M et M' tels que : a MA = b MB = c MC et a M'A = b M'A = c M'C.

2° Montrer que les trois cercles précédents sont orthogonaux au cercle ABC, que les droites Aα, Bβ, Cγ sont tangentes à ce cercle et que les points α, β, γ sont alignés sur la médiatrice de MM'.

3° En déduire que le centre O du cercle ABC est situé sur la droite MM'. Ce cercle coupe la droite MM' en P et Q, montrer que AP et AQ sont les bissectrices de l'angle MAM'.

● **370.** On considère un cercle O(R), un point fixe extérieur A et les tangentes en B et C, issues de A, à ce cercle. Un point variable P décrit le cercle O et les droites PB et PC coupent la droite Δ, perpendiculaire en A à OA, en M et N.

1° Montrer que le cercle PMN est tangent en P au cercle O et que les quadrangles ABPN et ACPM sont inscriptibles.

2° Comparer les triangles ABM et ANC puis montrer que le produit $\overline{AM}.\overline{AN}$ est égal à $-\overline{AB}^2$.

3° Démontrer que le cercle de diamètre MN est orthogonal au cercle O.

● **371.** 1° Le plan étant rapporté à une origine fixe O, montrer que tout cercle ω(R) de de plan est déterminé par la donnée du vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ et de la puissance $\gamma = \mathcal{P}\omega(O)$ du point O par rapport à ce cercle. Démontrer que la puissance de tout point M du plan est donnée par la formule $\mathcal{P}\omega(M) = \overline{OM}^2 - 2\,\overrightarrow{O\omega}.\overrightarrow{OM} + \gamma$.

2° Démontrer que tout point M de l'axe radical de deux cercles ω_1 (γ_1) et ω_2 (γ_2) est caractérisé par la relation : $2\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2}.\overrightarrow{OM} = \gamma_2 - \gamma_1$. Retrouver ainsi le théorème relatif aux différences des puissances de O par rapport aux deux cercles.

3° Établir que la condition pour que les deux cercles $\omega_1(\gamma_1)$ et $\omega_2(\gamma_2)$ soient orthogonaux est : $2\,\overrightarrow{O\omega_1}.\overrightarrow{O\omega_2} = \gamma_1 + \gamma_2$.

● **372.** Une sécante variable issue d'un point fixe P coupe deux axes fixes Ox et Oy en M et N. On désigne par I et J les points de Ox et de Oy tels que PI et PJ soient respectivement parallèles à Oy et Ox.

1° Démontrer que le produit $\overline{IM}.\overline{JN}$ est constant. En désignant par AB une position particulière de MN on pose $\overrightarrow{IM} = \lambda\,\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JN} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{JB}$.

2° Montrer que le cercle de diamètre MN est orthogonal à un cercle fixe ayant pour centre l'orthocentre ω du triangle OIJ et passant par O (on exprimera $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega N}$ en fonction de $\overrightarrow{\omega I}$, $\overrightarrow{\omega J}$, $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JB}$ et on montrera que $\overrightarrow{\omega M}.\overrightarrow{\omega N}$ est constant).

3° Montrer que l'axe radical des cercles de diamètres IN et JM passe par ω tandis que l'axe radical des cercles de diamètres AN et BM passe par l'orthocentre H du triangle OAB. Lieu des points de rencontre de ces deux derniers cercles.

● **373.** 1° Étant donnés un point fixe A et un cercle ω (ρ), montrer que le lieu des points M centres des cercles M (r) orthogonaux au cercle ω et vus du point A sous un angle constant donné est un cercle O(R) du faisceau défini par le cercle ω et le cercle-point A.

2° Réciproquement si le point M décrit un cercle O montrer que le cercle M (r) vu du point A sous un angle constant reste orthogonal (ou pseudo orthogonal) à un cercle fixe de centre ω du faisceau (O) (A).

3° Démontrer que l'axe radical du cercle O et du cercle variable M (r) enveloppe un cercle de centre ω.

● **374.** On donne un cercle fixe O (R) et un point fixe A de ce cercle. Un cercle M (r) dont le centre M décrit le cercle O est vu du point A sous un angle constant ($r = k$.MA). Le cercle M est coupé en N et N' par le cercle K orthogonal en A et M au cercle O et les droites NA et NM recoupent le cercle O en P et I.

1° Montrer que PI est un diamètre du cercle O. Comparer les deux triangles NAM et NIP et montrer que la longueur PN est constante.

2° Soit J le centre radical des cercles (O), (M) et (K). Montrer que J divise le vecteur AM dans un rapport constant et que l'enveloppe de NN' est un point fixe ω.

3° Démontrer que le lieu de J est un cercle de centre ω, orthogonal au cercle (M) et enveloppe de l'axe radical des cercles (O) et (M).

● **375.** Soit un quadrilatère variable Q situé dans un plan fixe. On désigne par a, b, c et d les longueurs constantes des côtés AB, BC, CD et DA.

1° Calculer en fonction de $a^2 - b^2$ et $c^2 - d^2$ le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ et montrer qu'il reste constant lorsque le quadrilatère Q se déforme. A quelle condition les diagonales AC et BD sont-elles rectangulaires?

2° On suppose $a^2 + c^2 > b^2 + d^2$ et on mène $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BD}$. Démontrer que lorsque le quadrilatère se déforme de telle sorte que le sommet A reste fixe, le cercle de diamètre IC est orthogonal à un cercle fixe, le cercle de diamètre JC est pseudo-orthogonal à ce même cercle fixe tandis que le cercle de diamètre DB est coupé diamétralement par un second cercle fixe.

3° Généraliser les résultats précédents en supposant que le quadrilatère Q est gauche.

● **376.** On donne deux droites Δ et Δ' perpendiculaires en O et un point fixe A. Deux sécantes issues de A coupent Δ en P et Q, Δ' en P' et Q'. Soient I et I' les centres des cercles APQ et AP'Q' et soit M le second point commun à ces deux cercles.

1° Montrer que les cercles I et I' sont orthogonaux. Construire les sécantes PAP' et QAQ' correspondant à un point M donné.

2° Trouver les lieux des points I, I' et M dans les cas suivants :

a) La sécante PAP' est fixe. *b*) Le quadrangle PP'QQ' est inscriptible. *c*) Le rapport des segments PQ et P'Q' est constant. *d*) Les cercles OPP' et OQQ' sont orthogonaux.

● **377.** On considère un angle droit AOB et un point variable M qui décrit la droite AB. On construit les cercles de centres ω et ω' passant par M et respectivement tangents en A à OA et en B à OB.

1° Démontrer que les cercles ω et ω' sont orthogonaux. Lieu de leur deuxième point de rencontre N.

2° Trouver l'enveloppe de la droite MN et le lieu du centre du cercle OMN.

3° Démontrer que le cercle de diamètre $\omega\omega'$ passe par le milieu F de AB. En déduire le lieu de son centre I, la correspondance entre ω et ω' et le lieu de la projection K du point F sur la droite $\omega\omega'$.

● **378.** Étant donnés un cercle O (R) et une droite D de son plan située à une distance OH = 2R du centre, on appelle Γ tout cercle tangent à D et orthogonal au cercle O.

1° Construire un cercle Γ de rayon donné r. Discuter.

2° Construire un cercle Γ passant par un point donné A du cercle O. On trouve en général deux solutions Γ_1 et Γ_2 dont on évaluera les rayons r_1 et r_2 en fonction de R et de l'angle HOA $= \theta$. Cas particuliers où $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3° Construire un cercle Γ tangent à D en un point donné B.

● **379.** Étant donnés, deux points A et B du plan, trouver :

1° Le lieu géométrique des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$. Si k varie on obtient un faisceau de cercles F. Quels sont les cercles de rayon nul du faisceau F?

2° Le lieu des points M tel que l'angle de droites (MA, MB) soit constant. Si cet angle varie on obtient un faisceau de cercles Φ. Que peut-on dire de ce faisceau par rapport au précédent?

3° Étant donnés deux faisceaux de cercles F et F′, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux faisceaux aient un cercle en commun et montrer que les deux faisceaux conjugués Φ et Φ′ ont alors un cercle en commun.

● **380.** On donne deux cercles de centres O et O′, de rayons R et R′ (R > R′).

1° Calculer la puissance p par rapport à chacun des cercles du pied H de l'axe radical sur la ligne des centres, en fonction de R, R′ et OO′ = d. Retrouver tous les cas de nullité de cette puissance.

2° Le cercle O étant fixe, le point O′ décrit une demi-droite Ox et l'on suppose R′ = 0. Construire l'axe radical du cercle O et du cercle point O′ dans tous les cas de figure. Montrer que la puissance p du point H n'est jamais négative.

3° Montrer qu'il existe deux positions O'_1, O'_2 du point O′ pour lesquelles p a une valeur donnée. Construire ces positions dans le cas où $p = R^2$.

4° Montrer que les cercles Γ ayant pour diamètre $O'_1O'_2$ sont orthogonaux à un cercle fixe. Montrer qu'il passe en général un cercle Γ par un point donné du plan. Construction. *(Besançon.)*

● **381.** Soient un cercle Γ de diamètre AA′, de centre O, de rayon R, et Δ la tangente en A′ à ce cercle. M étant un point du plan, la droite AM recoupe Γ en B et la droite A′M recoupe Γ en D; soient N l'intersection de AD et A′B et P la projection orthogonale de M sur AA′.

1° Démontrer que MN est perpendiculaire à AA′ et que le cercle MNDB est orthogonal à Γ.

2° Montrer que si le conjugué harmonique de B par rapport à A et M est sur Δ, N est le milieu de PM et réciproquement. Dans ces conditions établir la relation existant entre $\overline{OP}$ et $\overline{PM}$. *(Dijon.)*

● **382.** On donne deux droites fixes Δ et D parallèles entre elles et un point fixe A sur D. Un cercle variable Γ passe par A et est tangent en K à Δ.

1° Ce cercle recoupe D en P. Montrer que la droite PK passe par un point fixe I. En déduire que la tangente en P à Γ reste tangente à un cercle fixe C de centre I.

2° Un cercle Γ étant donné, montrer qu'il existe deux cercles Γ′ et Γ″ de centres ω′ et ω″ passant par A, tangents à Δ et orthogonaux à Γ.

3° On considère l'un d'eux Γ′. Soit P′ le point autre que A où Γ′ coupe D. Montrer que les tangentes en P et P′ à Γ et Γ′ sont perpendiculaires. Lieu de leur point commun M quand Γ et par suite Γ′ varient. *(Caen.)*

● **383.** On donne un cercle (C), de centre O. Soit AB un diamètre fixe de ce cercle et M un point fixe du cercle. PQ étant un diamètre mobile, l'une des bissectrices des angles formés par les droites MP et MQ coupe PQ en D et AB en E; l'autre bissectrice coupe PQ en D′ et AB en E′.

1° Montrer que le cercle DMD′ est orthogonal au cercle C. Lieu de son centre I lorsque PQ tourne autour de O.

2° Prouver que les cercles Γ et Γ′ circonscrits aux triangles DOE et D′OE′ sont orthogonaux.

3° Établir que D′ appartient à l'axe radical Δ des cercles C et Γ.

4° On suppose maintenant que M est le milieu d'un des arcs AB. Démontrer que les triangles DOE et D′OE′ sont isocèles. Trouver le lieu du centre radical K des trois cercles C, Γ et Γ′ et le lieu de l'intersection, autre que O, des cercles Γ et Γ′ lorsque PQ tourne autour de O. *(Grenoble.)*

● **384.** A et B sont deux points fixes ($AB = 2a$). On étudie les couples de points P et Q tels que le segment PQ ait une longueur donnée $2l$ ($l < a$) et que A, B, P, Q soient sur un même cercle C. Soit I le milieu de PQ, D le support de PQ qui coupe AB en J.

1° Construire Q quand on se donne P. Montrer que le cercle C′ concentrique à C et passant par I passe par deux points fixes A′ et B′ indépendants de P.

2° Construire P et Q quand la droite D est donnée. Lieux des points I, P, Q quand D pivote autour de J.

3° Construire P et Q sachant qu'ils sont sur un cercle S donné.

4° Construire à partir d'un point F donné deux droites D faisant entre elles un angle donné et portant deux couples P, Q situés sur un même cercle C.

(Poitiers.)

● **385.** Construire une sphère ω orthogonale à quatre sphères données ou coupée diamétralement par ces quatre sphères. Cas où une de ces sphères a un rayon nul.

● **386.** Étant données quatre sphères de centres A, B, C, D, démontrer qu'il existe en général une sphère ω pseudo-orthogonale à une, ou plusieurs de ces sphères et orthogonale à chacune des autres.

● **387.** 1° Construire quatre sphères de centres A, B, C, D, deux à deux orthogonales. Quelle est la nature du tétraèdre ABCD?

2° Montrer qu'il existe une sphère de centre E coupée diamétralement par les quatre sphères précédentes. Que représente le point E pour le tétraèdre ABCD?

● **388.** 1° Construire une sphère passant par trois points donnés non alignés A, B, C et tangente à un plan donné P. Discuter.

2° Construire une sphère passant par deux points donnés A et B et tangente à deux plans donnés P et Q ou passant par un point donné A et tangente à trois plans P, Q et R.

● **389.** 1° Construire une sphère passant par trois points donnés A, B, C et tangente à une droite donnée Ox.

2° Construire une sphère passant par deux points donnés A et B et tangente à deux droites Ox et Oy ou passant par un point donné A et tangente à trois droites Ox, Oy et Oz.

● **390.** Démontrer que si $AB + CD = AC + BD = AD + BC$ on peut construire quatre sphères de centres respectifs A, B, C, D deux à deux tangentes extérieurement, puis une sphère ω orthogonale aux quatre sphères précédentes et tangente aux six arêtes du tétraèdre ABCD.

● **391.** 1° Démontrer que, si $AB - CD = AC - BD = AD - BC$, il existe une sphère tangente aux trois côtés du triangle BCD et aux prolongements des arêtes issues de A du tétraèdre ABCD.

2° Établir qu'il existe quatre sphères tangentes aux six arêtes (ou à leurs prolongements) d'un tétraèdre à arêtes opposées égales.

● **392.** On considère sur une sphère donnée S, un cercle fixe γ, deux points fixes A et B et un cercle quelconque μ. Soit M le centre de la sphère orthogonale à S suivant le cercle μ.

1° Déterminer le lieu de M lorsque le cercle μ passe par A, lorsqu'il passe par A et B, lorsqu'il est orthogonal au cercle γ, lorsqu'il est tangent au cercle γ.

2° Construire le point M pour que le cercle μ passe par A et B et qu'il soit de plus orthogonal à γ ou tangent à γ.

● **393.** On donne deux sphères O (R) et O′ (R′) se coupant en M sous l'angle $V = \widehat{OMO'}$. Soient I et J les centres des sections de ces deux sphères par un même plan P.

1° Trouver la relation entre OI, O′J, R, R′ et V pour que les deux sections soient orthogonales.

2° Démontrer que dans ce cas $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{JO}.\overrightarrow{JO'} = \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MO'}$ et en déduire le lieu des points I et J lorsque les deux sections sont orthogonales.

● **394.** Soit (A, B, C, D) une division harmonique et deux plans P et P′ rectangulaires issus de la droite ABCD. On considère le cercle γ de diamètre AB du plan P et le cercle γ' de diamètre CD du plan P′ *(Anneau orthogonal)*.

1° Montrer que toute sphère S contenant le cercle γ est orthogonale au cercle γ' ainsi qu'à toute sphère S' contenant le cercle γ'.

2° Montrer que tout cercle passant par deux points A et B de γ et un point C de γ' coupe à angle droit le cercle γ'. Que peut-on dire des cercles qui coupent le cercle γ en A et B et le cercle γ' en C et D?

● **395.** Soient deux droites orthogonales xx' et yy' admettant le segment IJ pour perpendiculaire commune et deux points fixes A et B de $x'x'$ de part et d'autre de I. Soient C et D deux points variables de $y'y$ tels que la sphère de diamètre CD soit orthogonale à la sphère de diamètre AB.

1° Montrer que les hauteurs issues de C et D du tétraèdre ABCD passent par un point fixe H. Déterminer sa position connaissant A, B et J.

2° Calculer le produit $\overline{JC}.\overline{JD}$ en fonction de IJ, IA et IB. Montrer que la sphère de diamètre CD passe par un cercle fixe.

3° Lieux géométriques des pieds des hauteurs AE, BF et de l'orthocentre K du triangle ABC, ainsi que des pieds des hauteurs AE', BF' et de l'orthocentre K' du triangle ABD.

4° Montrer que les droites EF et E'F' passent par un même point fixe et qu'il en est de même des droites EF' et E'F.

QUATORZIÈME LEÇON

POLARITÉ PAR RAPPORT A UN CERCLE

• **335. Points conjugués par rapport à un cercle.** — ***Deux points* M *et* P *sont dits conjugués par rapport à un cercle* O, *lorsqu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B *où la droite* MP *coupe ce cerle.***

Or, pour que la division (ABMP) soit harmonique (fig. 290), il faut et il suffit (n° 307) que le cercle de diamètre MP soit orthogonal au cercle O. Cette propriété caractéristique permet d'étendre la notion de points conjugués par rapport à un cercle O, lorsque la droite qui les joint ne coupe pas le cercle O. D'où la définition plus générale (fig. 291) :

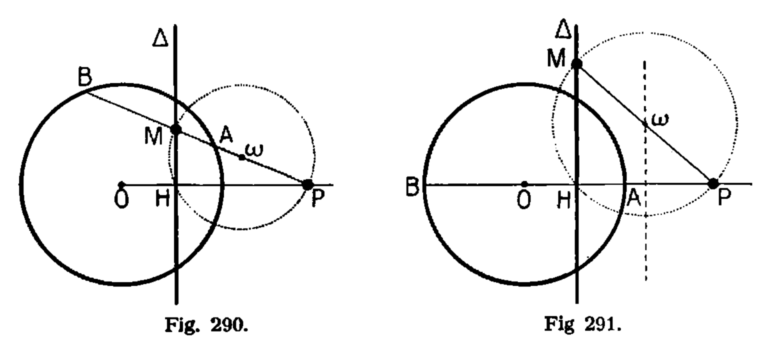


Fig. 290. Fig 291.

• **336. Définition.** — ***On dit que deux points* M *et* P *sont conjugués par rapport au cercle* O *lorsque le cercle de diamètre* MP *est orthogonal au cercle* O.**

La condition d'orthogonalité du cercle O (R) et du cercle ω de diamètre MP s'écrit (n° 306) : $\mathcal{P}_\omega(O) = R^2$. La projection H du point M sur la droite OP étant située sur le cercle ω on obtient la relation : $\boxed{\overline{OH}.\overline{OP} = R^2}$ (1)

Notons que cette condition s'écrit également : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = R^2$ (2)

• **337. Polaire d'un point.** — ***Le lieu des conjugués d'un point* P *par rapport au cercle* O *est une droite* Δ *perpendiculaire à* OP, *appelée polaire du point* P *par rapport au cercle* O.**

Pour qu'un point M soit conjugué du point fixe P il faut et il suffit qu'il se projette sur la droite OP au point fixe H tel que $\overline{OH}.\overline{OP} = R^2$. Le lieu du point M est donc la droite Δ perpendiculaire en H à OP (fig. 290 et 291). Le point H est appelé *pied de la polaire* Δ du point P.

• **338. Pôle d'une droite.** — Réciproquement étant donnée une droite Δ, ne passant pas par O, il existe sur la perpendiculaire OH à Δ, un point P et un seul tel que $\overline{OH}.\overline{OP} = R^2$, c'est-à-dire un point P admettant Δ pour polaire par rapport au cercle O.

***Le point* P *qui admet la droite* Δ *pour polaire est appelé pôle de la droite* Δ.**

Un point P et une droite Δ ainsi associés sont dits *pôle* et *polaire* par rapport au cercle O.

• **339. Positions du pôle et de la polaire.** — Les points P et H sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités du diamètre AB, passant par P et perpendiculaire à Δ (fig. 291). Ces deux points P et H sont donc réciproques.

1° *Si le point* P *est extérieur au cercle* O *sa polaire* Δ *coupe le cercle et réciproquement le pôle d'une sécante au cercle est extérieur à ce cercle* (fig. 292). Lorsque le point P s'éloigne indéfiniment sur Ox la droite Δ devient le diamètre perpendiculaire à Ox. Inversement le pôle d'un diamètre est le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à ce diamètre.

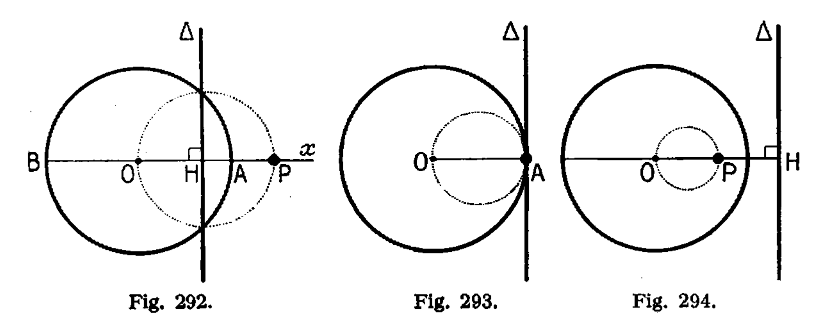


Fig. 292. Fig. 293. Fig. 294.

2° *Si le point* P *est en* A *sur le cercle, sa polaire* Δ *est la tangente en* A (fig. 293). Réciproquement le pôle d'une tangente est son point de contact. Donc :

Tout point d'une tangente au cercle* O *est conjugué du point de contact de cette tangente.

3° *Si le point* P *est intérieur au cercle* O *sa polaire est extérieure à ce cercle* (fig. 294). Lorsque le point P vient en O, sa polaire est rejetée à l'infini. On dit que la polaire du centre d'un cercle est la droite de l'infini du plan de ce cercle.

• **340. Propriétés de la polaire.** — 1° Le cercle de diamètre MP (fig. 291) est orthogonal au cercle O et au cercle point P. Son centre ω appartient à leur axe radical (n° 311). Et puisque $\overrightarrow{PM} = 2\,\overrightarrow{P\omega}$ on en déduit que :

***La polaire d'un point* P *par rapport au cercle* O *est la transformée dans l'homothétie* (P, 2) *de l'axe radical du cercle* O *et du cercle-point* P.**

2° La division (ABHP) étant harmonique et O étant le milieu de AB on a (n° 261) : $\overline{HA}.\overline{HB} = \overline{HO}.\overline{HP}$. Le point H est donc le pied de l'axe radical du cercle O et du cercle de diamètre OP. Par suite :

***La polaire du point* P *est l'axe radical du cercle* O *et du cercle de diamètre* OP.**

3° Lorsque le point P est extérieur au cercle O (fig. 295), il est conjugué de chacun des points de contact E et F des tangentes issues de P. Sa polaire est la droite EF.

La polaire, par rapport à un cercle, d'un point extérieur* P *est donc la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de* P *à ce cercle.

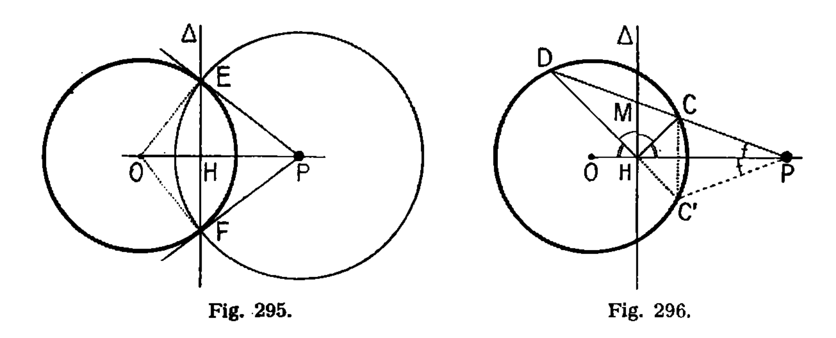


Fig. 295. Fig. 296.

D'autre part, le cercle de centre P orthogonal au cercle O passe par E et F. Donc :

Lorsque deux cercles sont orthogonaux, leur axe radical est la polaire du centre de l'un par rapport à l'autre.

● **341. Propriétés du pôle.** — 1° La réciprocité entre le point P et le pied H de sa polaire Δ montre que le pôle P de Δ est le pied de la polaire de la projection H du point O sur Δ.

2° ***Le pôle d'une sécante* EF *est le point d'intersection des tangentes en* E *et* F** (fig. 295).

3° La droite Δ (fig. 296) coupe une sécante quelconque PCD issue de son pôle P en un point M tel que (CDMP) = — 1. Le faisceau H (CDMP) est harmonique et les rayons rectangulaires HP et HM sont les bissectrices de l'angle CHD. On obtient par suite une sécante CD passant par le pôle P de Δ en prenant C symétrique par rapport à OH, du point C' où la droite HD recoupe le cercle O.

● **342. Construction de la polaire.** — La construction suivante qui n'exige que la règle, est préférable à celle de l'axe radical du cercle O et du cercle de diamètre OP (fig. 297) :

Menons deux sécantes quelconques PAB *et* PCD *au cercle* O *et désignons par* M *le point commun aux droites* AD *et* BC, *par* N *le point commun aux droites* AC *et* BD. *La polaire du point* P *par rapport au cercle* O *est la droite* MN. En effet :

La polaire Δ du point P coupe AB en E et CD en F. Les divisions (PEAB) et (PFCD) étant harmoniques, la droite Δ est également la polaire du point P par rapport aux deux droites AC et BD et (n° 278) passe donc par M et N.

• **343. Corollaires.** — 1° Les points M et P étant les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère inscrit ABCD (fig. 297), on en déduit que :

Les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle sont conjugués par rapport à ce cercle.

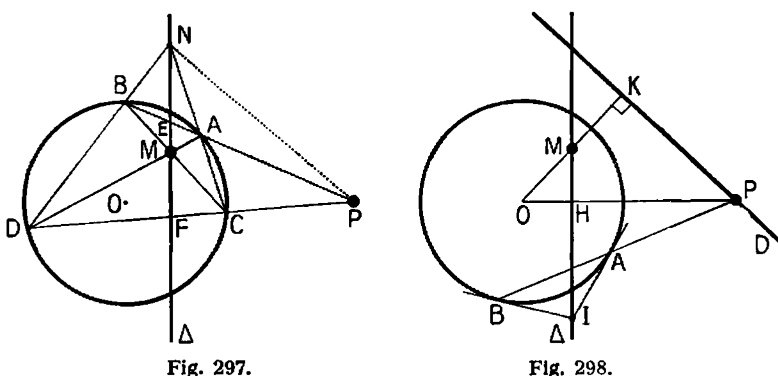


Fig. 297. Fig. 298.

Il en résulte que NP est la polaire de M et que MP est la polaire de N par rapport au cercle O.

2° Réciproquement (fig. 297) étant donnés deux points conjugués M et P menons au cercle O, une sécante arbitraire MAD distincte de la polaire Δ du point P, puis les sécantes PAB et PCD. D'après la construction précédente les droites AD et BC se coupent en un point de Δ, donc en M.

Deux points conjugués par rapport à un cercle sont, d'une infinité de manières, les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans ce cercle.

• **344. Propriété fondamentale des pôles et polaires.** — ***Lorsque la polaire d'un point* P *passe par un point* M, *la polaire du point* M *passe par le point* P.**

Si le point M appartient à la polaire Δ du point P (fig. 298), les points P et M sont conjugués par rapport au cercle O. Donc le point P appartient à la polaire D du point M.

Le point P et sa polaire Δ étant donnés, la polaire d'un point M de Δ est donc la perpendiculaire PK à OM. Le pôle M de la droite D issue de P est l'intersection de Δ et de la perpendiculaire OK à la droite D.

• **345. Corollaires.** — 1° ***Les polaires des points d'une droite* Δ *concourent au pôle* P *de cette droite.***

Le point P étant conjugué de tout point M de Δ appartient à la polaire du point M.

Pour obtenir le pôle P d'une droite Δ il suffit de construire l'intersection des polaires de deux points quelconques de cette droite.

2° ***Les pôles des droites issues d'un point* P *sont alignés sur la polaire* Δ *du point* P.**

Le pôle M d'une droite D issue du point P est conjugué de P et appartient à sa polaire Δ.

3° Le pôle I d'une sécante PAB au cercle O (fig. 298) est le point d'intersection des tangentes en A et B. Il en résulte que :

***La polaire d'un point* P *passe par le point d'intersection des tangentes aux extrémités de toute corde issue de* P.**

On peut déduire cette propriété de la construction du n° 342 lorsque la sécante PCD vient se confondre avec la sécante PAB.

346*. Applications.** — 1° ***Un quadrangle inscrit dans un cercle et le quadrilatère complet formé par les tangentes aux sommets ont même triangle diagonal.

Soit ABCD le quadrangle inscrit (fig. 299) et MNP son triangle diagonal (n° 60) :
La droite MN, polaire de P, passe par les sommets opposés I et K du quadrilatère complet circonscrit HIJGKL. De même MP passe par J et L et NP par G et H.

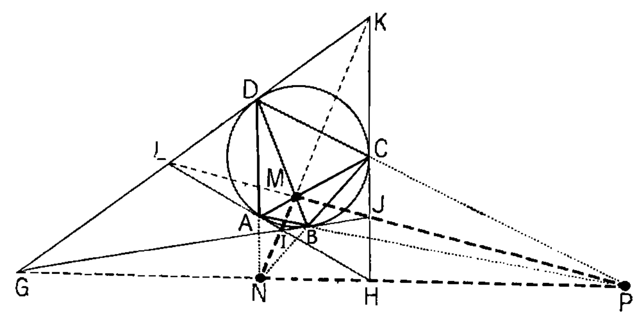


Fig. 299.

Si on considère seulement les quadrilatères ABCD et IJKL on voit que leurs diagonales concourent en M et forment un faisceau harmonique M (ABIJ) :
Les diagonales d'un quadrilatère inscrit ABCD *et celles du quadrilatère circonscrit associé* IJKL *sont concourantes et forment un faisceau harmonique.*

2° ***Pour que quatre points* A, B, C, D *forment une division harmonique, il faut et il suffit que leurs polaires forment un faisceau harmonique.***

Pour que les points A, B, C, D soient alignés il faut et il suffit que leurs polaires soient concourantes au pôle P de la droite ABCD (fig. 300). Soient P*a*, P*b*, Pc et P*d* les polaires des quatre points alignés A, B, C, D. Les droites OA et P*a*, OB et P*b* étant rectangulaires, on a : (OA, OB) = (P*a*, P*b*) et de même (OB, OC) = (P*b*, Pc) et (OC, OD) = (Pc, P*d*). Les deux faisceaux O (ABCD) et P(*abcd*) sont superposables. Si l'un d'eux est harmonique il en est de même de l'autre. Ainsi (fig. 299) le faisceau M (ABIJ) étant harmonique, on a : (HGPN) = — 1.

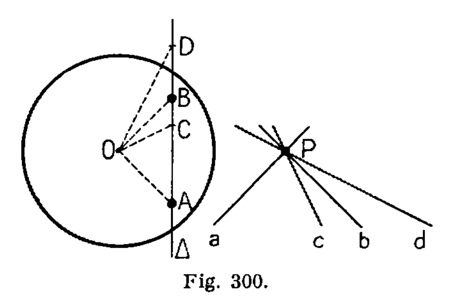


Fig. 300.

• **347. Droites conjuguées par rapport à un cercle.** — Deux droites D et Δ, dont les pôles M et P sont conjugués par rapport au cercle O, sont dites conjuguées par rapport à ce cercle. Pour qu'il en soit ainsi (fig. 301), il faut et il suffit que le pôle de l'une d'elles appartienne à l'autre.

***Les conjuguées d'une droite* Δ *sont les droites issues de son pôle* P.**

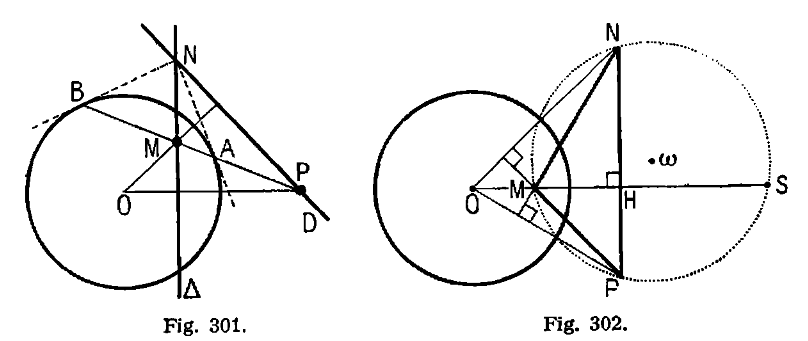


Fig. 301. Fig. 302.

• **348. Triangle conjugué ou autopolaire.** — Le point de rencontre N des polaires de deux points conjugués M et P admet chacun de ces points pour conjugué. Dans le triangle MNP (fig. 302), chaque côté est la polaire du sommet opposé. Deux quelconques de ses sommets sont conjugués et il en est de même de deux quelconques de ses côtés :

***Le triangle* MNP *est dit conjugué ou autopolaire par rapport au cercle* O.**

1° Il résulte du n° 343 et du n° 346, 1° que (fig. 299) :

Le triangle diagonal de tout quadrangle inscrit ou de tout quadrilatère complet circonscrit à un cercle est conjugué par rapport à ce cercle.

Tout triangle autopolaire correspond d'ailleurs ainsi à une infinité de quadrangles inscrits ou de quadrilatères complets circonscrits.

2° *Le centre* O *est l'orthocentre du triangle autopolaire* MNP car (fig. 302) les droites OM, ON et OP sont respectivement perpendiculaires à NP, PM et MN. La relation $\overline{OM}.\overline{OH} = R^2$ montre que O est extérieur au triangle MNP qui admet donc un angle obtus. Réciproquement tout triangle admettant un angle obtus est conjugué par rapport au cercle orthogonal aux trois cercles admettant ses côtés pour diamètres.

3° Le symétrique S du point O par rapport au côté NP appartient (n° 63) au cercle ω circonscrit au triangle MNP. On a : $\mathcal{P}_\omega(O) = \overline{OM}.\overline{OS} = 2\ \overline{OM}.\overline{OH} = 2\ R^2$.

Le cercle circonscrit au triangle MNP *conjugué par rapport au cercle* O (R) *est orthogonal au cercle* O $(R\sqrt{2})$.

Ce cercle O $(R\sqrt{2})$ est appelé *cercle orthoptique* du cercle O (R). C'est le lieu des points d'où l'on peut mener au cercle O (R) deux tangentes rectangulaires.

APPLICATIONS

● **349. Méthode de démonstration.** — L'utilisation d'éléments conjugués, de pôles et de polaires, conduit souvent à d'élégantes démonstrations. Ainsi :

1° ***Pour démontrer que plusieurs points sont alignés*** il suffit de montrer qu'ils sont conjugués d'un même point ou que leurs polaires par rapport à un cercle donné sont concourantes.

2° ***Pour démontrer que plusieurs droites sont concourantes*** il suffit de montrer qu'elles sont conjuguées d'une même droite ou que leurs pôles par rapport à un cercle donné sont alignés.

On utilise, le plus souvent, un cercle convenablement choisi de la figure à étudier. En voici quelques exemples :

● **350. Exemple I.** — *Démontrer que les tangentes en* A, B, C *à un cercle coupent les droites* BC, CA *et* AB *en trois points alignés* α, β *et* γ.

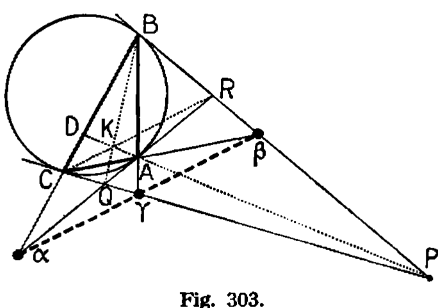


Fig. 303.

Il suffit (fig. 303) de montrer que les polaires des trois points α, β, γ par rapport au cercle ABC, c'est-à-dire les droites AP, BQ et CR, sont concourantes. Cela résulte du n° 97 car les points A, B, C sont les points de contact du cercle donné avec les côtés du triangle PQR.

On peut dire aussi que la division (BC αD) étant harmonique, la droite AP est la polaire de α par rapport aux droites PB et PC. Elle passe donc par le point de rencontre K de BQ et CR (n° 278).

● **351. Exemple II. — Théorème de Brianchon.** — ***Lorsqu'un hexagone*** ABCDEF ***est circonscrit à un cercle, les diagonales*** AD, BE ***et*** CF ***sont concourantes.***

Désignons (fig. 304) par M, N, P, Q, R, S les points de contact, avec le cercle des côtés

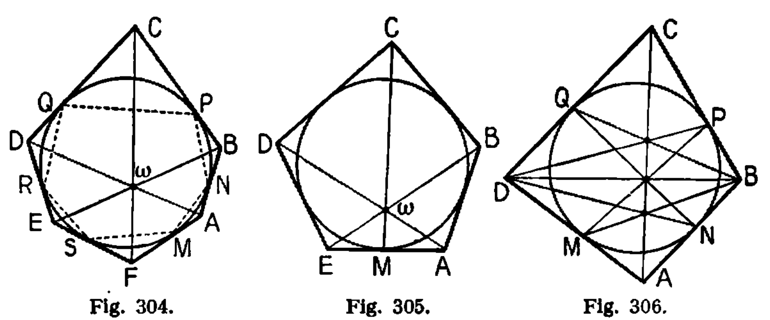


Fig. 304. Fig. 305. Fig. 306.

de l'hexagone circonscrit ABCDEF. La diagonale AD est la polaire du point de rencontre α des côtés opposés MN et QR de l'hexagone inscrit MNPQRS. De même BE est la polaire

du point β commun à NP et RS et CF la polaire du point γ commun à PQ et à SM. D'après le théorème de Pascal (n° 296) les trois points α, γ et β sont alignés. Donc les trois droites AD, BE et CF sont concourantes en ω, pôle de la droite αβγ.

• **352. Corollaires.** — 1° Si le point S vient en M, il en est de même du sommet F et A, M, E deviennent alignés. On peut donc (fig. 305) considérer le pentagone circonscrit ABCDE comme un hexagone de Brianchon ABCDEM, ce qui montre que les droites AD, BE et CM sont concou antes. Il y a ainsi cinq points de Brianchon relatifs à un pentagone circonscrit.

2° De même étant donné un quadrilatère circonscrit ABCD (fig. 306), on peut lui adjoindre les points de contact de deux côtés opposés ou de deux côtés consécutifs On voit ainsi que la diagonale AC passe par les points de rencontre de MP et NQ, de MB et ND ainsi que de QB et PD.

3° Un triangle PQR dont les côtés sont tangents en A, B et C à un cercle (fig. 303) peut être considéré comme un hexagone de Brianchon ARBPCQ. On retrouve ainsi que les droites AP, BQ et CR sont concourantes.

• **353. Quadrangle harmonique.** — ***Un quadrangle inscriptible* ABCD *est dit harmonique lorsque les droites* AB *et* CD *sont conjuguées par rapport au cercle* ABCD.**

Un tel quadrangle (fig. 307) est déterminé par trois de ses sommets A, B, C par exemple car le point D s'obtient en recoupant le cercle ABC par la droite qui joint C au pôle P de AB. De même le pôle Q de CD est situé sur AB et les points P et Q forment avec le point R commun à AB et à CD un triangle PQR autopolaire.

• **354. Propriétés.** — 1° Si M est un point du cercle O circonscrit au quadrangle, le faisceau M (ABCD), égal au faisceau A (PBCD), est harmonique car (PRCD) = — 1. Le cercle de centre Q passant par C et D est orthogonal au cercle O et appartient au faisceau de points limites A et B. On a donc (n° 59 et 316) :

$$(CA, CB) = (DA, DB) \quad \text{et} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

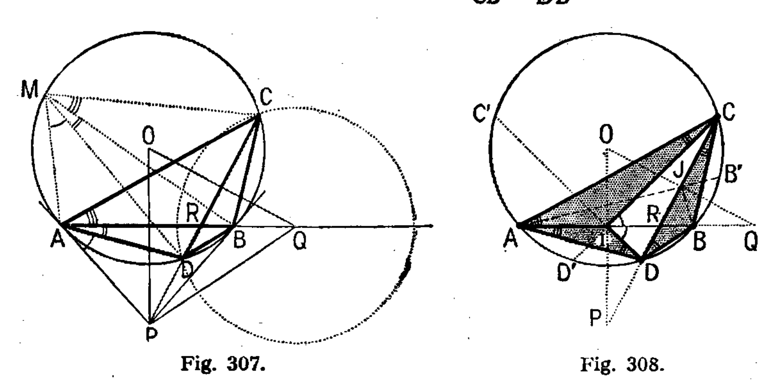


Fig. 307.

Fig. 308.

2° Désignons par I et J les milieux de AB et de CD. La droite AB est bissectrice intérieure de l'angle CID (n° 341) et les droites ID et IC recoupent le cercle O en C' et D' symétriques de C et D par rapport à IP. L'égalité des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{C'A}$ et des arcs $\overset{\frown}{AD'}$ et $\overset{\frown}{DB}$ entraîne :

(AI, AC) = (DI, DA) = (DB, DC) et (CA, CI) = (AD, AI) = (CD, CB). Donc : ***Les trois triangles*** AIC, DIA ***et*** DBC, ***sont directement semblables.***

Il en est de même des triangles BIC, DIB et DAC, des triangles CJA, BJC et BDA et des triangles DJA, BJD et BCA (cf. n° 247). Réciproquement :

La similitude de deux des triangles AIC, DIA ***et*** DBC ***caractérise un quadrangle harmonique lorsque*** I ***est le milieu de*** AB.

Une telle similitude détermine en effet la position du sommet D connaissant les sommets A, B et C.

3° ***Dans un quadrangle harmonique*** ABCD ***les points*** A ***et*** B ***sont les points de la bissectrice intérieure de l'angle*** CID ***tels que*** $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = IC.ID$.

Les relations équivalentes $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA})$ et $\frac{IA}{ID} = \frac{IC}{IA}$ entraînent la similitude des triangles IAC et IDA et réciproquement. On peut donc construire le quadrangle ABCD connaissant les sommets C et D et le milieu I de AB.

4° En considérant les triangles IAC et DBC on voit que:

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \quad \text{et} \quad CA.CB = CD.CI.$$

La droite CD *est antiparallèle à* CI *par rapport à* CA *et* CB.

D'autre part l'égalité des arcs AD', DB et B'C entraîne AB' = CD' et par suite :

$$IC + ID = JA + JB.$$

• **355. Symédianes d'un triangle.** — Dans le triangle ABC (fig. 308) la droite CR est symétrique de la médiane CI par rapport aux bissectrices de l'angle C.

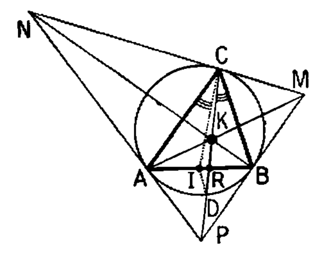


Fig. 309.

La droite CR *est appelée symédiane du triangle* ABC. On voit que la symédiane CR relative au sommet C passe par le pôle P du côté opposé AB par rapport au cercle ABC.

En achevant (fig. 309) le triangle MNP formé par les tangentes en A, B et C au cercle ABC on voit (n° 352, 3°) que :

Les trois symédianes AM, BN *et* CP *du triangle* ABC *sont concourantes.*

Le point de concours K est appelé centre des symédianes ou point de Lemoine du triangle ABC.

POLARITÉ PAR RAPPORT A UNE SPHÈRE

• **356. Points conjugués par rapport à une sphère.** — Deux points M et P d'une sécante AB à la sphère O sont dits conjugués par rapport à cette sphère (fig. 310) si la division (ABMP) est harmonique, c'est dire si la sphère de diamètre MP est orthogonale à la sphère O. On étend comme au n° 335 cette notion de points conjugués :

On dit que deux points M ***et*** P ***sont conjugués par rapport à la sphère*** O (R) ***lorsque la sphère de diamètre*** MP ***est orthogonale à la sphère*** O.

En désignant par H la projection de M sur OP et par (ω) la sphère de diamètre MP on obtient les relations caractéristiques $\mathcal{P}_\omega(O) = R^2, \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = R^2$ ou

$$\boxed{\overline{OH}.\overline{OP} = R^2} \qquad (1)$$

• **357. Théorème.** — ***Pour que deux points* M *et* P *soient conjugués par rapport à une sphère il faut et il suffit qu'ils soient conjugués par rapport à un cercle de cette sphère.***

Tout plan issu de la droite MP (fig. 310) coupant la sphère O suivant un cercle γ, coupe la sphère ω suivant un cercle (C) de diamètre MP. Si les sphères O et ω sont orthogonales il en est de même des cercles (C) et (γ) (n° 329) et réciproquement.

En particulier : *Deux points* M *et* P *sont conjugués par rapport à la sphère* O *lorsqu'ils sont conjugués par rapport au grand cercle* (Γ) *de cette sphère situé dans le plan* OMP.

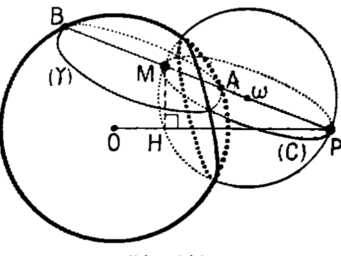


Fig. 310.

• **358. Plan polaire d'un point. Pôle d'un plan.** — Pour qu'un point M soit conjugué du point fixe P il faut et il suffit qu'il se projette sur la droite OP au point fixe H tel que $\overline{OH}.\overline{OP} = R^2$. Donc :

***Le lieu des points* M *conjugués du point* P *par rapport à la sphère* O (R) *est un plan* (π) *perpendiculaire en* H *à* OP, *appelé plan polaire du point* P** (fig. 311 à 313).

Réciproquement, étant donné un plan (π) ne passant pas par O il existe sur la perpendiculaire OH à ce plan, un point P et un seul tel que $\overline{OH}.\overline{OP} = R^2$, c'est-à-dire admettant le plan (π) pour plan polaire.

***Le point* P *qui admet le plan* (π) *pour plan polaire est appelé pôle du plan* (π).**

La réciprocité entre les points P et H, conjugués harmoniques par rapport aux extrémités A et B du diamètre porté par la droite OP, montre que :

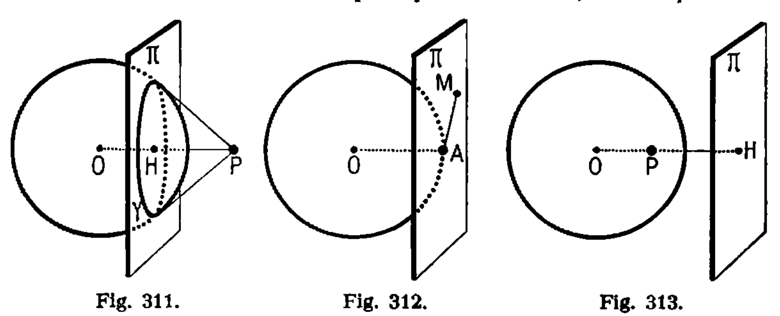


Fig. 311. Fig. 312. Fig. 313.

1° Le plan polaire d'un point extérieur P est un plan sécant à la sphère O (fig. 311) et réciproquement le pôle d'un plan sécant est un point extérieur.

Le pôle d'un plan diamétral est le point à l'infini dans la direction Ox perpendiculaire à ce plan.

2° Le plan polaire d'un point A de la sphère est le plan tangent en A (fig. 312) et le pôle d'un plan tangent est son point de contact. Donc :

Tout point d'une tangente à la sphère* O *est conjugué de son point de contact.

3° Le plan polaire d'un point intérieur est un plan extérieur à la sphère (fig.313) et le pôle d'un plan extérieur est un point intérieur. Les points conjugués du centre O de la sphère étant les points à l'infini de ses diamètres, on dit que le plan polaire du point O est le plan de l'infini.

• **359. Propriétés caractéristiques du plan polaire.** — 1° On établit comme au n° 340 que :

Le plan polaire d'un point P est le transformé dans l'homothétie (P, 2) du plan radical de la sphère O et de la sphère-point P.

***Le plan polaire du point* P *est le plan radical de la sphère* O *et de la sphère de diamètre* OP.**

Ces deux propriétés se déduisent de la relation $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = R^2$ entre deux points conjugués M et P. En désignant par ω le milieu de MP on a en effet :

a) $(\overrightarrow{O\omega} - \overrightarrow{\omega P}).(\overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega P}) = R^2$ soit $\overline{\omega O}^2 - R^2 = \overline{\omega P}^2$ avec $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{P\omega}$.

b) $\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}) = R^2$ soit $\overline{MO}^2 - R^2 = \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MP}$.

2° Lorsque le point P est extérieur à la sphère O (fig. 311), il est conjugué de chacun des points de contact des tangentes issues de P, c'est-à-dire de chacun des points du cercle de contact (γ) du cône de révolution de sommet P circonscrit à la sphère.

Le plan polaire de P *est donc le plan du cercle* γ. *C'est aussi le plan radical de la sphère* O *et de la sphère orthogonale de centre* P.

Réciproquement le pôle d'un plan (π) coupant la sphère O suivant un petit cercle (γ) est le sommet P du cône de révolution circonscrit à la sphère O suivant le cercle (γ). Ce point P est aussi le centre de la sphère orthogonale à la sphère O suivant le cercle (γ).

• **360. Propriété fondamentale des pôles et plans polaires.** — ***Lorsque le plan polaire d'un point* P *passe par un point* M, *le plan polaire de* M *passe par le point* P.**

Si le point M appartient au plan polaire (π) du point P (fig. 314), les points M et P sont conjugués par rapport à la sphère O. Le point P appartient donc au plan polaire (μ) du point M.

Le plan polaire (μ) d'un point M du plan (π) est donc le plan issu de P perpendiculaire à OM. Le pôle M d'un plan (μ) issu de P est l'intersection du plan (π) et de la perpendiculaire OK au plan (μ).

• **361. Corollaires.** — 1° ***Les plans polaires des points d'un plan*** (π) ***concourent au pôle* P *de ce plan.***

Le point P étant conjugué de tout point M du plan (π) appartient au plan polaire de M.

Pour obtenir le pôle P *d'un plan donné* (π), *il suffit de déterminer l'intersection des plans polaires de trois points non alignés du plan* (π).

En effet les plans polaires des points M_1, M_2, M_3 sont respectivement perpendiculaires aux arêtes du trièdre O ($M_1M_2M_3$) et se coupent en un point unique P.

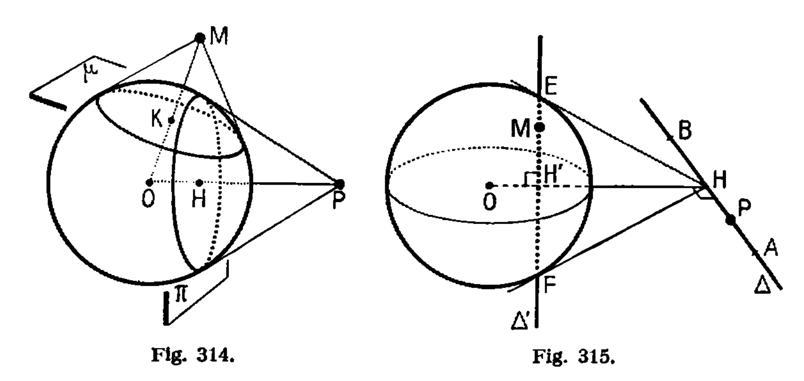


Fig. 314. Fig. 315.

2° ***Les pôles des plans issus d'un point*** P ***sont situés dans le plan polaire*** (π) ***du point*** P.

Le pôle M d'un plan (μ) passant par P est conjugué de P et appartient au plan (π). On obtient donc le plan polaire de P en prenant le plan qui contient les pôles de trois plans quelconques issus de P.

• **362. Plans conjugués par rapport à une sphère.** — Deux plans (μ) et (π) sont dits conjugués par rapport à une sphère O si leurs pôles M et P sont conjugués par rapport à cette sphère (fig. 314). Pour qu'il en soit ainsi il suffit que le pôle de l'un d'eux appartienne à l'autre :

Les plans conjugués d'un plan (π) ***sont les plans issus de son pôle*** P.

Notons que l'un au moins de deux plans conjugués (μ) et (π) est un plan sécant à la sphère O.

• **363. Droites conjuguées ou réciproques par rapport à une sphère.** — ***Les plans polaires des points d'une droite*** Δ ***passent par une droite*** Δ' ***et les plans polaires des points de la droite*** Δ' ***passent par la droite*** Δ.

Les plans polaires de deux points A et B de la droite Δ, respectivement perpendiculaires à OA et OB (fig. 315) se coupent suivant une droite Δ' perpendiculaire au plan OAB. Tout point M de Δ' admet A et B pour conjugués et le plan polaire (μ) de M contient donc A et B et par suite la droite Δ. Tout point P de Δ est par suite conjugué de chacun des points M de Δ'. Le plan polaire (π) de P contient donc Δ'.

Les droites Δ ***et*** Δ' ***sont dites réciproques ou conjuguées par rapport à la sphère*** O.

Notons qu'il n'y a qu'une droite Δ' conjuguée d'une droite Δ donnée contrairement à ce qui se passe pour les points ou les plans conjugués.

● **364. Corollaires.** 1° *Tout point* P *de* Δ *est conjugué de tout point* M *de* Δ'.

2° *Le pôle* M *de tout plan* (μ) *issu de* Δ *appartient à* Δ' car le point M conjugué des deux points A et B de Δ appartient à l'intersection Δ' de leurs plans polaires.

3° *Tout plan* (μ) *issu de* Δ *est conjugué de tout plan* (π) *issu de* Δ' car le plan (π) contenant Δ' contient le pôle M du plan (μ).

● **365. Position de deux droites conjuguées.** — 1° La droite Δ' intersection de deux plans respectivement perpendiculaires à OA et OB (fig. 315) est perpendiculaire au plan OAB c'est-à-dire au plan (O, Δ). Elle est donc orthogonale à Δ. De même la droite Δ est perpendiculaire au plan (O, Δ'). Ces deux plans (O, Δ) et (O, Δ') sont donc perpendiculaires et leur intersection est un diamètre de la sphère perpendiculaire en H à Δ et en H' à Δ'. Les points H et H' appartenant à deux droites conjuguées sont conjugués et on a $\overline{OH} \cdot \overline{OH'} = R^2$ Donc :

Deux droites conjugués par rapport à une sphère sont deux droites orthogonales, perpendiculaires à un même diamètre en deux points conjugués.

Notons que Δ est la polaire du point H' par rapport au grand cercle (Γ) de la sphère O situé dans le plan (O, Δ).

2° Si la droite Δ est extérieure à la sphère, la droite Δ' coupe la sphère aux deux points de contact E et F des plans tangents issus de Δ (n° 358, 2°).

Si la droite Δ est tangente en A à la sphère, la droite Δ' est la tangente en A perpendiculaire à Δ'. Enfin si Δ s'éloigne à l'infini dans le plan (O, Δ), la droite Δ' devient le diamètre perpendiculaire à ce plan.

● **366. Applications.** — 1° Pour démontrer que plusieurs points sont dans un même plan (π), il suffit de montrer qu'ils sont, par rapport à une sphère donnée, conjugués d'un même point A ou que leurs plans polaires par rapport à cette sphère concourent en A (nos 358 et 361).

2° Pour démontrer que plusieurs points sont alignés dans l'espace, il suffit de montrer qu'ils sont conjugués de deux points A et B ou que leurs plans polaires passent par une même droite Δ (nos 363 et 364).

● **367. Tétraèdre conjugué par rapport à une sphère.** — Considérons deux droites Δ et Δ' conjuguées par rapport à une sphère O (fig. 316), puis deux points conjugués A et B sur Δ et deux points C et D conjugués sur Δ' :

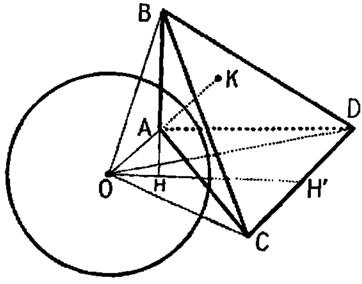


Fig. 316.

Le tétraèdre ABCD *est dit autopolaire ou conjugué par rapport à la sphère.* Dans ce tétraèdre deux sommets quelconques sont conjugués (n° 364, 1°). Donc le plan polaire d'un sommet est le plan de la face opposée. Les plans de deux faces quelconques sont conjugués et deux arêtes opposées sont conjuguées par rapport à la sphère.

La droite qui joint O à un sommet du tétraèdre ABCD est perpendiculaire au plan de la face opposée. Les hauteurs du tétraèdre ABCD concourent donc en O et il en est de même des perpen-

diculaires communes à deux arêtes opposées. *Le tétraèdre* ABCD *est ortho centrique.*

SUJETS D'EXAMEN

— Polaire d'un point par rapport à un cercle. Pôle d'une droite. (*Indochine*, ME.)

— Plan polaire d'un point par rapport à une sphère. (*La Réunion*, ME.)

— Polaire d'un point par rapport à un cercle : définition, nature de cette polaire; sa construction. (*Rennes*, ME et MT.)

EXERCICES

● **396**. Pour que deux points M etP soient conjugués par rapport au cercle O (R), il faut et il suffit :

1° Que la somme de leurs puissances par rapport au cercle O soit égale à $\overline{MP}^2$.

2° Que les cercles de centres M et P orthogonaux au cercle O soient orthogonaux entre eux. Comment faut-il modifier cette condition si le point M est intérieur au cercle O?

● **397**. Démontrer que la polaire d'un point P par rapport au cercle O (R) est :

1° L'homologue, dans l'homothétie (O,2), de l'axe radical des cercles O (R) et P (PO).

2° L'axe radical du cercle P (PO) et du cercle O $(R\sqrt{2})$ orthoptique du cercle O(R).

● **398**. Lorsque les points M et P sont conjugués par rapport au cercle O, les points O et M sont conjugués par rapport au cercle de centre P orthogonal au cercle O.

● **399**. Si ω est le centre radical de trois cercles O_1, O_2 et O_3 orthogonaux deux à deux :

1° Les centres O_1 et O_2 sont conjugués par rapport au cercle O_3.

2° L'axe radical des cercles O_1 et O_3 et celui des cercles O_2 et O_3 sont conjugués par rapport au cercle O_3 et le triangle ωO_1O_2 est autopolaire par rapport à O_3.

● **400**. 1° Deux points donnés A et B sont conjugués par rapport à tout cercle orthogonal au cercle de diamètre AB. Étudier la famille des cercles admettant deux couples de points donnés (A, B) et (C, D) comme couples de points conjugués.

2° Existe-t-il un cercle admettant trois couples donnés (A, B), (C,D) et (E,F) comme couples de points conjugués? Dans quel cas y en a-t-il une infinité?

● **401**. 1° Etudier la famille des cercles admettant un point donné P et une droite donnée Δ comme pôle et polaire.

2° On considère un faisceau de cercles à points limites I et J. Montrer que le point I a même polaire par rapport à tous les cercles du faisceau et qu'il en est de même de J.

● **402**. On donne un cercle O (R) et un point fixe intérieur I. Une sécante variable issue de I coupe le cercle en M et N. Trouver le lieu géométrique de l'intersection P des tangentes en M et N au cercle O.

Étudier le problème lorsque I est extérieur au cercle O.

● **403**. On considère les cercles Γ qui passent par un point donné M et qui admettent deux points donnés A et B comme points conjugués.

1° Montrer que ces cercles passent en général par un second point fixe M' et trouver le lieu de leurs centres.

2° Construire un cercle passant par deux points donnés M et N et admettant un couple donné (A, B) comme points conjugués.

● **404.** On donne dans la plan une droite Δ et deux cercles O et O_1. Construire une droite Δ' qui soit à la fois conjuguée de Δ par rapport au cercle O et au cercle O_1.

● **405.** 1° Démontrer que les polaires d'un point donné M par rapport aux cercles d'un faisceau (F) concourent en un point P, tel que le cercle de diamètre MP soit orthogonal aux différents cercles de ce faisceau.
2° Trouver le lieu de P lorsque M décrit un cercle du faisceau (Φ) conjugué du faisceau (F) ou une parallèle à l'axe radical du faisceau (F).

● **406.** 1° Soient deux points A et B conjugués par rapport à trois cercles O_1, O_2 et O_3. Que représente le milieu I de AB pour ces trois cercles?
2° Déterminer le lieu des points A et B conjugués par rapport aux trois cercles lorsqu'il existe.

● **407.** 1° Démontrer que le cercle qui admet pour diamètre le segment qui joint les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle O est orthogonal au cercle O.
2° Réciproquement si deux cercles sont orthogonaux les extrémités d'un diamètre de l'un sont, d'une infinité de manières, les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans l'autre.

● **408.** On donne un cercle O (R) et sur une droite Δ deux points A et B conjugués par rapport à ce cercle.
1° On joint un point variable M du cercle O aux points A et B. Les droites MA et MB recoupent le cercle O en C et D. Trouver l'enveloppe de la droite CD, et le lieu du point d'intersection S des tangentes en C et D.
2° Soit EF une position particulière de CD. Les droites ME et MF coupent la droite Δ en N et P. Montrer que N et P sont conjugués par rapport au cercle O et que NF et PE se coupent sur ce cercle.
3° En désignant par H la projection de O sur Δ, évaluer en fonction de HO et R les produits $\overline{HN}\cdot\overline{HP}$ et $\overline{HA}\cdot\overline{HB}$.

● **409.** Soit ABC un triangle conjugué par rapport au cercle O.
1° Une sécante variable issue de A coupe le cercle en N et P. Trouver le lieu du point d'intersection M de BN et de CP.
2° Un point R décrit la droite BC. Les tangentes au cercle O issues de R coupent respectivement AB et AC en D et E. Trouver l'enveloppe de la droite DE.

● **410.** On désigne par I le centre d'un cercle inscrit (ou exinscrit) dans le triangle ABC qui touche les côtés BC, CA et AB en D, E et F. La droite BI coupe EF en M et DE en P. La droite CI coupe EF en N et DF en Q.
1° Démontrer que MC et NB sont respectivement les polaires de P et Q par rapport au cercle I.
2° En déduire que le cercle de diamètre BC coupe EF en M et N.

● **411.** On considère le quadrilatère complet formé par les tangentes communes à deux cercles extérieurs O et O'.
1° Les diagonales de ce quadrilatère complet étant deux à deux conjuguées par rapport à chacun des deux cercles O et O' en déduire que la diagonale OO' coupe les deux autres aux points limites I et J du faisceau défini par les cercles O et O'.
2° Montrer que la droite qui joint les points de contact du cercle O avec deux tangentes non symétriques et la droite qui joint les points de contact du cercle O' avec ces tangentes sont perpendiculaires en I ou en J.

● **412.** Dans un triangle ABC on désigne par M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB, par D, E, F les points de contact de ces côtés avec le cercle inscrit I et par D', E', F' les points de contact de ces côtés avec le cercle J exinscrit dans l'angle A. La droite AIJ coupe BC en S.
1° Montrer que la projection H du point C sur AI est située sur les droites MN et DF, puis que la projection K de B sur AI est située sur les droites MP et DE.
2° Démontrer que MD = MD' = MH = MK et que les points H et K sont conjugués par rapport aux deux cercles I et J. Nature de la division (ASHK)?
3° Montrer que DF et D'F' sont perpendiculaires en H et que DE et D'E' sont perpendiculaires en K.

● **413.** Soient deux cercles orthogonaux O (R) et O' (R') tangents en A et A' au segment AA' = a et de diamètres respectifs AB et A'B'.
1° Démontrer que AB' et A'B sont respectivement perpendiculaires à OA' et O'A et en déduire la relation entre a, R et R'.

2° Démontrer que la perpendiculaire OK menée de O à A'B', l'axe radical MN des cercles O et O' et la droite AB' concourent en un point J.

3° Soit I le point de rencontre de MN avec AB. Calculer en fonction de R le produit $\overline{AI}.\overline{OJ}$.

● **414.** 1° Démontrer que si deux couples de sommets opposés A, A' et B, B' d'un quadrilatère complet ABCA'B'C' sont conjugués par rapport à un cercle, il en est de même du couple C, C'.

2° En déduire que si deux couples de côtés opposés d'un quadrangle MNPQ sont conjugués par rapport à un cercle il en est de même du troisième couple.

● **415.** On désigne par I le centre d'homothétie positif des deux cercles O et O' sécants en A et B. La droite IB recoupe les cercles en M et M' et les droites AM et AM' coupent la droite OO' en H et H'.

1° Démontrer que H et H' sont les pieds des polaires de I par rapport aux cercles O et O', que l'angle HAH' est égal à l'angle OAO' = V des deux cercles et que le quadrilatère AHBH' est un losange.

2° Soit TT' une tangente commune aux deux cercles. Comparer les triangles BTT', HTA et H'AT' et montrer que $\overline{HT}.\overline{H'T'} = \overline{HA}^2$.

● **416.** On donne un cercle O de diamètre PQ, une corde fixe AB et un point I de la droite PQ. Les droites IA et IB recoupent le cercle en C et D et les droites AB et CD se coupent en J.

1° La polaire de I par rapport au cercle O coupe AC en E. Nature du faisceau J (ACIE)?

2° La perpendiculaire en I à la droite PQ coupe AB en M et CD en N. Montrer que I est le milieu du segment MN. Retrouver cette propriété en montrant que $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{NC}.\overline{ND}$ à l'aide des transversales IAC et IBD dans le triangle JMN.

3° Lieu du point N lorsque I décrit la droite PQ.

● **417.** *Théorème de Salmon.* — Le rapport des distances de deux points A et B au centre d'un cercle O est égal au rapport des distances AA' et BB' de chacun de ces points à la polaire de l'autre.

(En désignant par H et K les pieds des polaires de A et de B, on peut montrer que les deux trapèzes rectangles AOKA' et BOHB' se correspondent dans une similitude inverse).

● **418.** On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC de hauteurs AA', BB' et CC' et par I et r le centre et le rayon d'un cercle inscrit (ou exinscrit) au triangle. La tangente parallèle à BC coupe CA en D et coupe AB en E. Les droites BD et CE se coupent en J et coupent respectivement en K et L la parallèle à BC menée par A.

1° Démontrer que A est le milieu de KL, que (BDJK) = (CEJL) = — 1 et que le triangle JKL est conjugué par rapport au cercle I (r).

2° Montrer que le cercle JKL est orthogonal aux cercles de diamètres BD et CE ainsi qu'au cercle I ($r\sqrt{2}$), puis que ces trois cercles font partie d'un même faisceau admettant pour axe radical la hauteur AA'.

3° Établir la relation : $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HI}^2 - 2r^2$.

● **419.** Déduire de la formule établie au 3° de l'exercice précédent que :

1° Lorsqu'un triangle ABC est conjugué par rapport à un cercle ω (ρ), ce cercle est orthogonal aux cercles orthoptiques des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC.

2° Lorsqu'un quadrilatère complet ABC A'B'C' est circonscrit à un cercle O, le cercle orthoptique du cercle O fait partie du faisceau des cercles ayant pour diamètres les diagonales AA', BB', et CC' du quadrilatère complet.

3° Le centre O d'un cercle inscrit dans un quadrilatère ABCD est situé sur la droite qui joint les milieux I et J des diagonales AC et BD.

● **420.** On considère deux cercles O(R) et ω (ρ) tels que $\overline{O\omega}^2 = \rho^2 + 2R^2$.

1° Soit A un point quelconque du cercle ω, intérieur au cercle O. La polaire de A par rapport au cercle O coupe le cercle ω en B et C. Démontrer que le triangle ABC est conjugué par rapport au cercle O.

2° On construit un triangle ABC circonscrit au cercle O en se donnant la droite AB tangente à ce cercle, le point C pôle de cette droite par rapport au cercle ω, puis on achève le trapèze BCDE circonscrit au cercle O. En utilisant la propriété établie au 2° de l'exercice n° 418 qui indique que les cercles de diamètres BD, CE et le cercle O (R$\sqrt{2}$) ont pour axe radical commun la hauteur AA' du triangle ABC, démontrer que le triangle ABC est conjugué par rapport au cercle ω.

3° En déduire que si le cercle ω (ρ) est orthogonal au cercle orthoptique du cercle O (R) il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle ω et conjugués par rapport au cercle O et une infinité de triangles circonscrits au cercle O et conjugués par rapport au cercle ω : *Le cercle ω est dit harmoniquement circonscrit au cercle* O *et le cercle* O *harmoniquement inscrit au cercle ω.*

● **421.** On donne deux points fixes A et B d'un cercle de centre ω et un point J variable sur ce cercle.

1° Construire le quadrangle harmonique ABMN tel que J soit le milieu de MN.

2° Lieu géométrique des points M et N lorsque J décrit tout le cercle ω.

● **422.** Trois cercles de centres O, P, Q sont deux à deux orthogonaux. Les cercles O et P se coupent en A et B et coupent respectivement le cercle Q en C et D et en E et F. On désigne par I, J et K les milieux de AB, CD et EF.

1° Démontrer que les quadrangles ABCD, ABEF et CDEF sont harmoniques.

2° Montrer qu'il en est de même des quadrangles ABJK, CDKI et EFIJ.

● **423.** Dans un quadrangle harmonique ABCD inscrit dans un cercle O on désigne par I et J les milieux de AB et CD, par B' le symétrique de B par rapport à OJ et par D' le symétrique de D par rapport à OI.

1° Comparer les arcs $\widehat{AB'}$ et $\widehat{D'C}$, puis les deux sommes IC + ID et JA + JB.

2° Démontrer que les droites JA, JB, IC, ID sont tangentes en A_1, B_1, C_1 et D_1 à un cercle de centre O puis que les quadrangles ABCD et $B_1A_1D_1C_1$ sont inversement semblables.

3° Démontrer que les tangentes au cercle ABCD en A, B, C et D découpent une division harmonique sur toute autre tangente à ce cercle. Que peut on dire des intersections α, β, γ, δ d'une tangente au cercle $A_1B_1C_1D_1$ avec les droites JA, JB, IC et ID?

● **424.** Les sphères qui admettent deux points donnés A et B pour points conjugués sont orthogonales à la sphère de diamètre AB :

1° Trouver le lieu géométrique des centres des sphères admettant deux couples donnés (A, B) et (C, D) comme points conjugués. Même problème pour trois couples donnés (A, B), (C, D) et (E, F)?

2° Déterminer, lorsqu'elle existe, une sphère admettant quatre couples donnés de points conjugués. Peut-il y en avoir une infinité?

● **425.** 1° Trouver le lieu des centres des sphères passant par un point donné A et admettant le couple de points (C, D) comme points conjugués.

2° Construire une sphère passant par deux points donnés A et B et admettant les couples (C, D) et (E, F) comme couples de points conjugués.

● **426.** 1° Déterminer le rayon d'une sphère de centre donné O sachant que le plan polaire du point donné A est un plan donné P perpendiculaire à OA. Discuter.

2° Déterminer le centre O d'une sphère de rayon donné R, admettant un point donné A et un plan donné P pour pôle et plan polaire ou admettant deux droites orthogonales Δ et Δ' pour droites conjuguées.

● **427.** 1° Montrer que si deux droites Δ et D sont dans un même plan π leurs conjuguées par rapport à une sphère O se coupent au pôle P du plan π. Cas où le plan π passe par le centre O de la sphère.

2° Une droite D coupe deux droites conjuguées Δ et Δ' en A et B. Montrer que la droite D' conjuguée de D coupe en général Δ et Δ' en deux points A' et B' et que le tétraèdre ABA'B' est conjugué par rapport à la sphère O.

● **428.** On considère une sphère O (R), une sphère concentrique de rayon a et le cône (Γ) de révolution de sommet S circonscrit à la sphère O (a).

1° Lieu géométrique des pôles, par rapport à la sphère O(R) des plans tangents à (Γ).

2° Enveloppe des droites Δ' conjuguées par rapport à la sphère O (R), des génératrices Δ de (Γ).

● **429.** Deux droites Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à la sphère O (R).

1° Montrer que tout plan issu de Δ' coupe la sphère O suivant un cercle γ et que γ est le cercle de contact d'un cône dont le sommet S appartient à Δ.

2° Montrer que les cercles γ et les cercles γ' dont les plans sont issus de Δ forment sur la sphère O deux familles de cercles orthogonaux. Cas où Δ et Δ' sont tangentes à la sphère.

● **430.** 1° D'un point donné A on construit quatre tangentes AM, AN, AP et AQ à la sphère O (R) et soit BCD le triangle diagonal du quadrangle MNPQ. Démontrer que le tétraèdre ABCD est conjugué par rapport à la sphère O.

2° Démontrer que la sphère ω (ρ) circonscrite au tétraèdre ABCD est orthogonale à la sphère O ($R\sqrt{3}$). Cette sphère O ($R\sqrt{3}$) appelée sphère orthoptique de la sphère O (R) est le lieu des points d'où on peut lui mener trois plans tangents formant un trièdre trirectangle.

3° Montrer qu'il existe une infinité de tétraèdres inscrits dans la sphère ω et conjugués par rapport à la sphère O (R).

● **431.** On donne dans un plan un point fixe F et une droite fixe Δ ne passant pas par F. Sur Δ on prend un point quelconque ω et l'on considère le cercle Γ de centre ω, de rayon $\frac{1}{2}\,\omega F$.

1° Montrer que les cercles Γ sont vus du point F sous un angle constant. K étant le pied de la polaire de F par rapport au cercle Γ, établir que le point K décrit une droite D. Montrer que pour tout point P de Γ on a $PF = 2PK$.

2° Deux cercles Γ et Γ' se coupent en P et P'. Établir que P et P' sont sur la médiatrice de KK'. Le cercle Γ restant fixe, le cercle Γ' se rapprochant indéfiniment de Γ, donner une construction simple des positions limites M et M' des points P et P' connaissant Γ. *(Nancy.)*

● **432.** On désigne par F la famille des cercles d'un plan P qui sont vus d'un point fixe O de ce plan sous un angle constant. Soit C un cercle de la famille F, soient A et B les extrémités du diamètre de C passant par O et I le conjugué de O par rapport à A et B.

1° Montrer que la connaissance de I détermine le cercle C que l'on désignera par C(I).

2° Montrer que l'axe radical des cercles $C(I_1)$ et $C(I_2)$ est la médiatrice du segment I_1I_2

3° Montrer que si C(I) est orthogonal à un cercle fixe (L) de centre L, le point I décrit un cercle de centre L. *(Strasbourg.)*

● **433.** On considère un cercle fixe (O) de centre O, de rayon R et un point fixe I intérieur à ce cercle et distinct de O; on désigne par CD la corde du cercle perpendiculaire à OI. Un rayon lumineux issu d'un point A du cercle se réfléchit en I sur le diamètre OI et recoupe le cercle en B.

1° Montrer que AB passe par un point fixe P lorsque A varie sur le cercle (O). M désignant le milieu de AB, montrer que AB est bissectrice de l'angle CMD.

2° On désigne par γ et δ les intersections du cercle O avec le diamètre OM. Les droites $C\gamma$ et $D\delta$ se coupent en α; les droites $C\delta$ et $D\gamma$ se coupent en β. Montrer que les points α, β, γ, δ sont les centres des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle CMD. Lieux de ces points lorsque A décrit le cercle (O). *(Nancy.)*

● **434.** On donne trois points fixes A, C, B alignés dans cet ordre.

1° Lieu géométrique des points M du plan d'où l'on voit AC et CB sous des angles égaux.

2° Les cercles variables Γ passant par A et B coupent le lieu de M en deux points P et Q. Montrer que la droite PQ passe par un point fixe E quand Γ varie. Lieu géométrique du point E' conjugué harmonique de E par rapport à P et Q.

3° Si H est le milieu de AB déterminer les bissectrices des angles (HP, HQ) et montrer que le produit HP.HQ est constant. *(Grenoble.)*

● **435.** Soient A, B, C trois points alignés, O le milieu de BC, Δ la médiatrice de BC. On pose $OB = OC = R$; $OA = a$ et on suppose $a > R$. Un point M variable décrivant Δ on appelle M' le point où le cercle Γ circonscrit au triangle MBC recoupe Δ.

1° Construire l'orthocentre H du triangle AMM' et montrer que H reste fixe. Calculer OH en fonction de a et R. Construire le lieu C des pieds P et P' des hauteurs du triangle AMM' issues respectivement de M' et M.

2° Montrer que PP' passe par un point fixe D quand M décrit Δ.

3° Construire les points M et M' connaissant l'angle $MAM' = \alpha$. Limites de $\cos\alpha$ pour que le problème soit possible. *(Montréal.)*

● **436.** On donne un triangle ABC et son cercle circonscrit (O). Soient D et D' les pieds respectifs sur BC des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A du triangle, I le milieu de DD' et (I) le cercle de diamètre DD'.

1° Montrer que le cercle (I) est orthogonal au cercle (O). En déduire que AI est tangente au cercle (O).

2° M étant le milieu de BC, la droite symétrique de AM par rapport à AD coupe BC en S et le cercle (O) en S'. Montrer que l'on a :

$$\overline{IS}.\overline{IM} = \overline{IB}.\overline{IC} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\overline{IS}} = \frac{1}{\overline{IB}} + \frac{1}{\overline{IC}}. \text{ Conséquence?}$$

3° Déterminer la polaire de I par rapport au cercle (O). Quelle est la seconde tangente menée de I à ce cercle?

4° Montrer que la droite AS passe par un point fixe H quand B, C et le cercle (O) restant fixes, A varie sur ce cercle.

5° Montrer que les droites MA et MS' sont symétriques par rapport à BC et que l'on a : $MA.MS' = \overline{MB}^2$. *(Clermont.)*

● **437.** On donne un cercle fixe (F) de centre F et de rayon R et un point F' de son plan, non situé sur (F). Soient M un point variable du plan, (μ) sa polaire par rapport à (F), m le centre du cercle (m) qui passe par F' et qui appartient au faisceau défini par le cercle (F) et par la droite (μ). On désigne par (T) la transformation ponctuelle qui transforme M en m et par (T') la transformation inverse qui transforme m en M.

1° *a*) H désignant le point d'intersection de FM et de (μ), construire le deuxième point où HF' coupe le cercle (m). En déduire la construction de m, connaissant M. Discuter.

Montrer que M et m sont alignés avec F. Montrer que le lieu des points M qui n'ont pas de transformés dans (T) est la polaire de F' par rapport au cercle (F).

b) Inversement, connaissant m, indiquer les constructions qui permettent d'obtenir le point M correspondant. Discussion. Trouver le lieu des points m qui n'ont pas de transformés dans la transformation (T').

2° *a*) Montrer que la transformée d'une droite D dans la transformation (T) est une droite d. Examiner :

α) le cas où D passe par F;

β) le cas où D ne passe pas par F. Remarquer, dans ce cas, que lorsque M décrit la droite D, (μ) passe par un point fixe.

b) Quelle est la transformée d'une droite donnée d dans la transformation (T')?

c) Déduire de ce qui précède que, dans chacune des transformations (T) ou (T') : Une division harmonique portée par une droite ne passant pas par F se transforme en une division harmonique; un faisceau harmonique se transforme en un faisceau harmonique, puis, qu'une division harmonique portée par une droite passant par F se transforme en une division harmonique. *(Bordeaux.)*

QUINZIÈME LEÇON

INVERSION

• **368. Définition.** — Etant donnés un point fixe O et un nombre algébrique non nul k :

***On appelle inversion la transformation ponctuelle qui, à tout point* M *du plan ou de l'espace, fait correspondre le point* M' *de la droite* OM *tel que* $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$.**

Le point O est appelé *centre* (ou pôle) de l'inversion (O, k). Le nombre k est le *module* ou la *puissance* de cette inversion qui est dite positive ou négative suivant que k est positif (fig. 317) ou négatif (fig. 318).

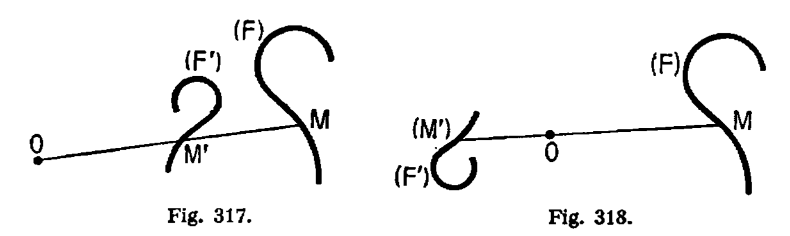


Fig. 317. Fig. 318.

Il est clair que l'homologue de M' est le point M. La transformation est donc réciproque et les deux points M et M' sont dits *inverses* l'un de l'autre. De même deux figures F et F' homologues dans l'inversion sont dites inverses par rapport à O.

Lorsque le point M décrit une droite ou un plan passant par O il en est de même de M' : *Toute droite et tout plan passant par le centre* O *sont globalement invariants.*

Si le point M' s'éloigne indéfiniment sur la droite Ox le point M vient en O. Pour qu'à un point donné ne corresponde qu'un seul transformé nous conviendrons, dans cette étude, de dire que l'inverse du centre O d'une inversion est un point unique appelé point à l'infini.

• **369. Cercle et sphère d'inversion.** — Pour qu'un point P soit invariant dans l'inversion (O, k) il faut et il suffit que $\overline{OP}^2 = k$. Ceci n'est possible que si k est positif et on a alors $OP = \sqrt{k}$. Donc :

1° ***Le lieu des points doubles d'une inversion positive* (O, k) *est le cercle* O ($\sqrt{k}$) *dans le plan, la sphère* O ($\sqrt{k}$) *dans l'espace que l'on nomme respectivement cercle et sphère d'inversion.***

En désignant par R le rayon $\sqrt{k}$ de ce cercle (fig. 319) ou de cette sphère (Γ)

on voit que deux points homologues quelconques M et M' sont tels que $\overline{OM}.\overline{OM'} = R^2$. Les points M et M' divisent harmoniquement un diamètre de (Γ) et l'un d'eux est le pied de la polaire (ou du plan polaire) de l'autre par rapport à (Γ). *On dit que* M *et* M' *sont inverses par rapport à* (Γ).

2° Si l'inversion est négative il n'y a pas de point double.

• **370. Théorème.** — ***Tout cercle passant par deux points homologues distincts* A *et* A' *d'une inversion est globalement invariant dans cette inversion.***

Soit M un point variable sur le cercle ω passant par A et A' (fig. 319 et 320). La droite OM recoupe le cercle ω en un point M' tel que

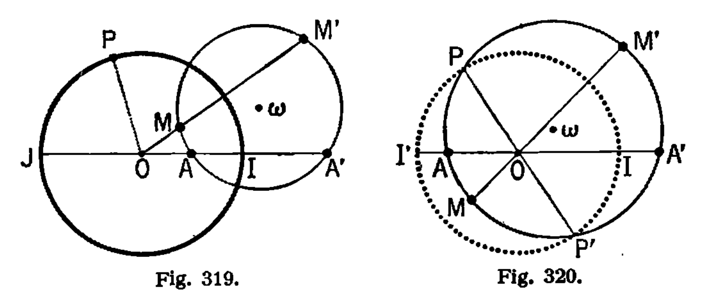


Fig. 319. Fig. 320.

$\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OA}.\overline{OA'} = k$. Le point M' est donc l'homologue de M dans l'inversion envisagée et décrit le cercle ω en même temps que M. On obtient ainsi une construction simple de M' à partir de O, A et A'.

• **371. Remarques.** — 1° Pour qu'un cercle ω soit invariant dans l'inversion (O, k) il suffit que son plan passe par O et que l'on ait $\mathcal{P}_\omega(O) = \overline{OM}.\overline{OM'} = k$. Donc : si $k = R^2$ le cercle ω est orthogonal au cercle (ou à la sphère) d'inversion O (R) (fig. 319). Si $k = -R^2$ le cercle ω coupe diamétralement le cercle (ou la sphère) O (R) (fig. 320).

2° Toute sphère passant par A et A' est de même globalement invariante dans l'inversion O (k) et deux cercles invariants passant par A et A' appartiennent à un même plan invariant ou à une même sphère invariante.

• **372. Propriété fondamentale.** — ***Dans toute inversion deux couples de points homologues distincts non alignés appartiennent à un même cercle.***

Lorsque les points O, A, B ne sont pas alignés (fig. 321), la relation $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = k$ montre que les quatre points A, A', B, B' appartiennent à un même cercle du plan OAB, globalement invariant dans l'inversion considérée O (k). Il en résulte que le transformé M' de tout point M appartient aux deux cercles coplanaires ou cosphériques AA'M et BB'M. C'est donc leur second point commun.

• **373. Réciproque.** — *Toute transformation ponctuelle dans laquelle deux couples quelconques de points homologues distincts appartiennent à une même droite ou à un même cercle est en général une inversion, éventuellement une symétrie-plan dans l'espace ou une symétrie-droite dans le plan.*

Désignons par (A, A′) et (B, B′) deux couples fixes d'un même cercle et par (M, M′) un couple quelconque de points homologues. Les points AA′BB′ sont dans un même

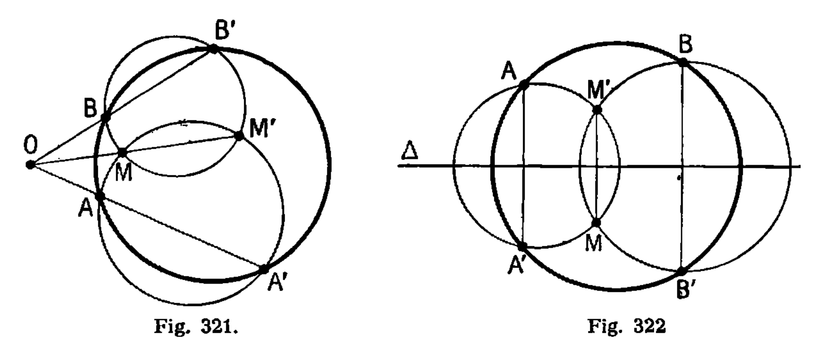


Fig. 321. Fig. 322

plan et par hypothèse les deux cercles AA′M et BB′M se recoupent en M′ (l'un de ces deux cercles pouvant se réduire à une droite).

1° Si les droites AA′ et BB′ sont concourantes en O (fig. 321), on a :

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB'} = k \neq 0.$$

L'inversion O (k) transforme A en A′, B en B′ et transforme M en le second point commun aux cercles AA′M et BB′M, c'est-à-dire en M′. La transformation envisagée est donc l'inversion O (k).

2° Si AA′ et BB′ sont parallèles (fig. 322) les points A et A′, B et B′ sont symétriques par rapport au plan (π) médiateur des segments AA′ et BB′. Il en est de même des cercles AA′M et BB′M, donc de M et M′. La transformation envisagée est alors la symétrie par rapport au plan (π) dans l'espace. Elle se réduit à une symétrie-droite Δ dans le plan AA′BB′.

Nous considérerons cette symétrie comme le cas limite d'une inversion positive dont le centre est rejeté à l'infini. La sphère (ou le cercle) d'inversion ayant pour limite le plan (ou l'axe) de cette symétrie.

• **374. Théorème.** — ***Toute inversion est déterminée par deux couples de points homologues distincts situés sur une même droite ou sur un même cercle.***

Si les deux couples donnés A, A′ et B, B′ appartiennent à un même cercle, le centre O de l'inversion est le point de rencontre de AA′ et BB′ et sa puissance k est égale à $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}$ ou $\overline{OB}\cdot\overline{OB'}$.

Si les deux couples appartiennent à une même droite, le centre O est le point de cette droite tel que $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB'}$. Il se trouve sur l'axe radical de deux cercles sécants l'un passant par A et A′ l'autre par B et B′. C'est d'ailleurs le centre d'homothétie des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'A'}$.

Dans les deux cas si les segments AA′ et BB′ ont même plan médiateur l'inversion dégénère en une symétrie-plan (ou une symétrie droite).

• **375. Inversions de même centre.** — Soient M_1 et M_2 les transformés d'un point M dans les inversions concentriques (O, k_1) et (O, k_2) (fig. 323). Les points O, M, M_1, M_2 sont alignés et on a : $\overline{OM}.\overline{OM_1} = k_1$; $\overline{OM}.\overline{OM_2} = k_2$.

$$\text{Donc :}\quad \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}} = \frac{k_2}{k_1} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OM_2} = \frac{k_2}{k_1}\overrightarrow{OM_1}.$$

1° ***Deux figures*** F_1 ***et*** F_2 ***inverses de la figure*** F ***par rapport au même point*** O ***sont homothétiques par rapport à*** O.

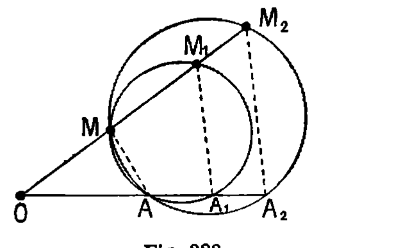


Fig. 323.

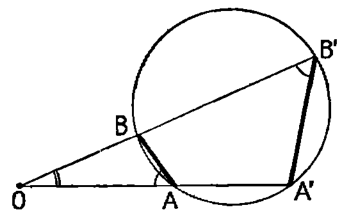


Fig. 324.

2° D'autre part le produit de l'inversion (O, k_1) par l'homothétie $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ transforme M en M_2 :

Toute inversion (O, k_2) ***est le produit de l'inversion*** (O, k_1) ***par l'homothétie*** $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$.

3° En particulier :

Toute inversion négative $(O, -k)$ *est le produit de l'inversion positive* (O, k) *par la symétrie-point de centre* O.

• **376. Relations métriques dans l'inversion.** — 1° Soient (fig. 324) deux couples de points cocycliques A, A' et B, B', homologues dans l'inversion (O, k). Les triangles OAB et OB'A' sont inversement semblables. Donc :

$$\frac{A'B'}{BA} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA.OA'}{OA.OB} = \frac{|k|}{OA.OB} \quad \text{Soit :} \quad \boxed{A'B' = \frac{|k|\,AB}{OA.OB}} \quad (1)$$

2° Cette relation est valable si les points O, A, A', B, B' sont alignés. La relation $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'}$ permet d'écrire :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'} - \overline{OB'}}{\overline{OB} - \overline{OA}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}.\overline{OA'}}{\overline{OA}.\overline{OB}} = \frac{k}{\overline{OA}.\overline{OB}}$$

D'où la relation algébrique plus précise : $$\overline{A'B'} = -\frac{k\,\overline{AB}}{\overline{OA}.\overline{OB}} \quad (2)$$

3° Si M et M' sont homologues dans l'inversion (ω, k) on peut écrire :

$$\frac{\overrightarrow{\omega M'}}{\overrightarrow{\omega M}} = \frac{\overline{\omega M'}}{\overline{\omega M}} = \frac{\overline{\omega M}.\overline{\omega M'}}{\overline{\omega M}^2} = \frac{k}{\overline{\omega M}^2} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\omega M'} = \frac{k}{\overline{\omega M}^2}\,\overrightarrow{\omega M} \quad (3)$$

Cette relation permet de déterminer les coordonnées de M' connaissant celles du centre d'inversion ω et celles du point M.

● **377. Tangentes aux courbes inverses.** — 1° ***Lorsqu'une courbe*** (γ) ***admet une tangente en*** A, ***sa transformée par inversion*** (γ') ***admet une tangente au point*** A' ***homologue de*** A.

2° ***Les tangentes à deux courbes inverses*** (γ) ***et*** (γ') ***en deux points homologues*** A ***et*** A' ***sont symétriques par rapport au plan médiateur du segment*** AA'.

Désignons (fig. 325) par A et M deux points de la courbe (γ), par A' et M' leurs homologues de la courbe (γ') transformée de la courbe (γ) dans l'inversion (O, k). Les quatre points A, A', M, M' sont sur un même cercle du plan OAM et dans ce plan, on a (à $k\pi$ près) : $(AM, AM') = (A'M, A'M')$.

Lorsque le point M, se déplaçant sur la courbe (γ) vient se confondre avec le point A, le point M' se déplace sur la courbe (γ') et vient se confondre avec le point A'. Dans cette opération la droite AM a, par hypothèse, pour position

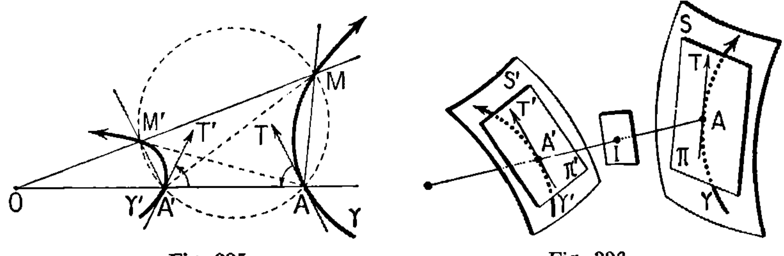


Fig. 325. Fig. 326.

limite la tangente AT à la courbe (γ) et le plan OAM vient se confondre avec le plan OAT. L'angle (AM, AM') a pour limite l'angle (AT, AA'). Son égal $(A'M, A'M')$ a donc dans le plan OAT, une limite $(A'A, A'T')$ égale à (AT, AA'). Ceci montre que la sécante A'M' admet une position limite A'T' qui est, par définition, la tangente en A' à la courbe (γ'). De l'égalité $(AA', A'T') = (AT, AA')$ ou $(AA', A'T') = -(AA', AT)$ il résulte que dans le plan OAT, les tangentes AT et A'T' sont symétriques par rapport à la médiatrice de AA'. Elles sont donc symétriques par rapport au plan médiateur de AA'.

● **378. Plans tangents aux surfaces inverses.** — 1° ***Lorsqu'une surface*** (S) ***admet un plan tangent en*** A, ***sa transformée par inversion*** (S') ***admet un plan tangent au point*** A' ***homologue de*** A.

2° ***Les plans tangents à deux surfaces inverses*** (S) ***et*** (S') ***en deux points homologues*** A ***et*** A' ***sont symétriques par rapport au plan médiateur du segment*** AA'.

Le plan (π) tangent en A à la surface (S) (fig. 326) est le lieu des tangentes AT aux différentes courbes (γ) tracées sur S et passant par A. Les tangentes A'T' aux courbes homologues (γ') de la surface inverse (S') ont pour lieu le plan (π') symétrique de (π) par rapport au plan médiateur de AA'. Ce plan (π') est, par définition, le plan tangent en A' à la surface S'.

● **379. Théorème.** — ***L'angle de deux courbes*** γ ***et*** γ_1, ***en un point commun*** A ***est égal à l'angle de leurs inverses*** γ' ***et*** γ'_1 ***au point*** A' ***homologue de*** A.

Soient AT et AT_1 les tangentes aux courbes γ et γ_1 se coupant en A (fig. 327). Les courbes inverses γ' et γ'_1 admettent au point A′ homologue de A, des tangentes $A'T'$ et $A'T'_1$ respectivement symétriques de AT et AT_1 par rapport au plan médiateur de AA′. Les angles TAT_1 et $T'A'T'_1$ sont donc égaux.

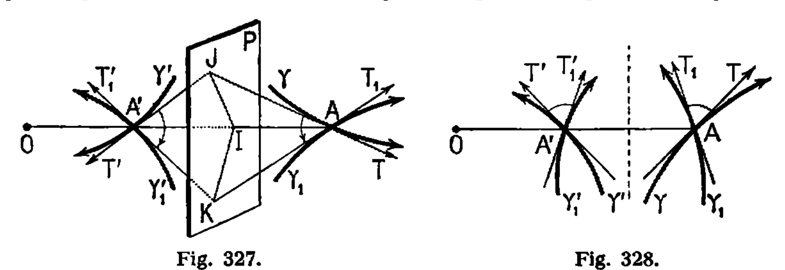


Fig. 327. Fig. 328.

Remarque. — Dans le plan, les angles (AT, AT_1) et $(A'T', A'T'_1)$, symétriques par rapport à la droite Δ médiatrice de AA′, sont opposés.

Si les courbes γ et γ_1 sont orientées (fig. 328) les angles $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT_1})$ et $(\overrightarrow{A'T'}, \overrightarrow{A'T'_1})$ sont également opposés. Ils se correspondent en effet dans la symétrie droite d'axe Δ si l'inversion est positive, dans le produit d'une symétrie-droite et d'une symétrie-point si l'inversion est négative (nº 375 3º).

• **380. Généralisations.** — On démontre comme ci-dessus en utilisant la symétrie par rapport au plan médiateur du segment AA′ que :

***L'angle de deux surfaces ou l'angle d'une courbe et d'une surface en un point commun* A *est égal à l'angle de leurs inverses au point* A′ *homologue de* A.**

On résume les deux théorèmes précédents en disant que :

L'inversion conserve les angles.

• **381. Applications.** — 1º Lorsque deux courbes, deux surfaces, une courbe et une surface sont soit tangentes, soit orthogonales en un point commun A, il en est de même de leurs inverses au point A′ homologue de A.

2º Si A et A′ sont deux points homologues sur deux courbes inverses γ et γ', tout cercle invariant ω passant par A et A′ coupe ces deux courbes sous le même angle. S'il est tangent à l'une, il est tangent à l'autre.

3º Dans une inversion positive le cercle d'inversion Γ fait en un point A des angles égaux avec deux courbes inverses γ et γ' passant par A.

INVERSION DANS LE PLAN

• **382. Inverse d'une droite.** — Si une droite Δ passe par le centre d'inversion O elle est globalement invariante (nº 368). Ce cas écarté montrons que :

L'inverse d'une droite ne passant pas par le centre d'inversion est un cercle passant par ce centre.

Désignons par H la projection du centre d'inversion O sur la droite donnée Δ (fig. 329 et 330) par A son homologue dans l'inversion (O, k) et par M un point

variable de la droite Δ. Pour que le point M′ de la droite OM soit le transformé de M il faut et il suffit (n° 372) que les quatre points A, H, M, M′ soient cocycliques, donc que :

$$(M'A, M'M) = (HA, HM) \quad \text{c'est dire que} \quad (M'A, M'O) = \frac{\pi}{2}.$$

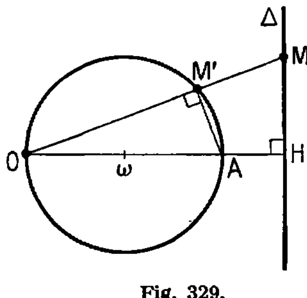


Fig. 329.

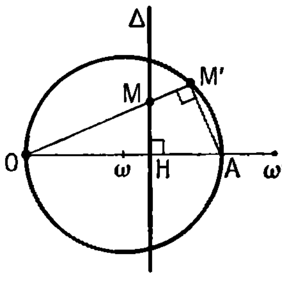


Fig. 330.

Le lieu du point M′ est donc (n° 58) le cercle ω de diamètre OA.

• **383. Inverse d'un cercle passant par le centre d'inversion.** — La transformation étant réciproque, l'inverse du cercle de diamètre OA est la droite Δ perpendiculaire à OA au point H, homologue de A dans l'inversion (O, k) envisagée.

L'inverse d'un cercle passant par le centre d'inversion est une droite perpendiculaire au diamètre issu de ce centre.

L'inverse ω' du centre du cercle ω est le point de la droite OA tel que :

$\overline{O\omega'}.\overline{O\omega} = \overline{OA}.\overline{OH} = 2\,\overline{O\omega}.\overline{OH}$ donc $\overline{O\omega'} = 2\,\overline{OH}$.

Le point ω' est donc le symétrique du centre d'inversion O par rapport à la droite Δ (fig. 330).

• **384. Théorème.** — ***Un cercle et une droite se correspondent en général dans deux inversions, dans une seule lorsque la droite est tangente au cercle.***

Si un cercle de centre O et une droite Δ se correspondent dans une inversion (fig. 331 et 332), le centre de celle-ci ne peut être que l'une des extrémités du

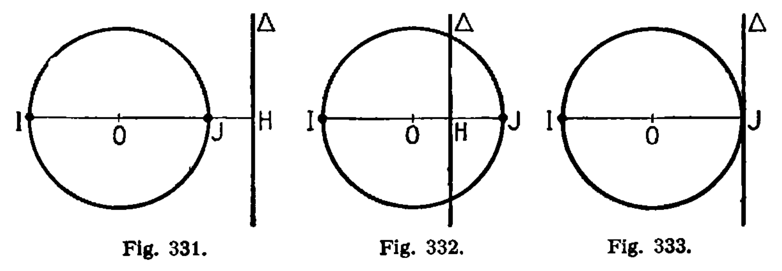


Fig. 331. Fig. 332. Fig. 333.

diamètre IJ de ce cercle, perpendiculaire en H à la droite Δ. Si H est distinct de I et de J, les deux inversions $(I, \overline{IJ}\cdot\overline{IH})$ et $(J, \overline{JI}\cdot\overline{JH})$ échangent effecti-

vement la droite Δ et le cercle de diamètre IJ. Si le point H est en J (fig. 333), c'est dire si Δ est tangente au cercle O, l'inversion de centre J disparaît.

Notons que les deux inversions I et J sont positives si la droite Δ coupe le cercle O, l'une est positive, l'autre négative si Δ est extérieure au cercle O. Enfin l'inversion $(I, \overline{IJ}^2)$ est positive lorsque Δ est tangente en J au cercle O.

• **385. Inverse d'un cercle quelconque.** — Soit à déterminer (fig. 334) le transformé, dans l'inversion (O, k) du cercle ω (R) ne passant pas par O. Désignons par $\mathfrak{T}$ la puissance non nulle du point O par rapport au cercle ω. L'inversion (O, k) est équivalente (n° 375, 2°) au produit de l'inversion $(O, \mathfrak{T})$ qui laisse le cercle ω invariant, par l'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathfrak{T}}\right)$ qui transforme le cercle ω en un cercle ω' de rayon $R' = \left|\frac{k}{\mathfrak{T}}\right| R$:

L'inverse d'un cercle ne passant pas par le centre d'inversion est un cercle analogue. Le centre d'inversion est un centre d'homothétie des deux cercles.

On vérifie d'ailleurs, en désignant par M et M' deux points homologues des cercles ω et ω' et par M_1 le point où la droite OMM' recoupe le cercle ω, que les relations $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = k$ et $\overline{OM}\cdot\overline{OM_1} = \mathfrak{T}$ entraînent :

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}} = \frac{k}{\mathfrak{T}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{\mathfrak{T}}\overrightarrow{OM_1}.$$

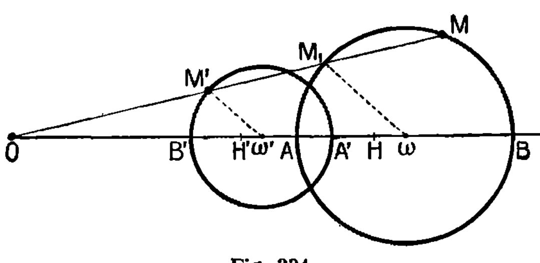


Fig. 334.

Le cercle ω' est donc l'homologue dans l'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathfrak{T}}\right)$ du cercle ω.

Il résulte d'autre part de cette homothétie que $\frac{O\omega}{R} = \frac{O\omega'}{R'} \neq 1$. Le point O est donc soit intérieur, soit extérieur aux deux cercles.

• **386. Remarque.** — Les centres ω et ω' des deux cercles ne sont pas homologues dans l'inversion (O, k). L'inversion $(O, \mathfrak{T})$ transforme le point ω en un point H tel que $\overline{O\omega}\cdot\overline{OH} = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$, c'est-à-dire (n° 261) conjugué harmonique de O par rapport à A et B. L'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathfrak{T}}\right)$ transforme H en H' conjugué de O par rapport à A' et B', donc pied de la polaire de O par rapport au cercle ω'. L'inversion étant réciproque on peut dire que :

Lorsque deux cercles se correspondent dans une inversion l'homologue du centre de l'un est le pied de la polaire du centre d'inversion par rapport à l'autre.

On vérifie cette propriété en remarquant qu'un diamètre quelconque δ du cercle ω est transformé en un cercle γ' passant par O et orthogonal au cercle ω'. Ce cercle γ' recoupe la droite $O\omega$ en un point H', homologue de ω et (n° 306) conjugué harmonique de O par rapport à A' et B'.

• **387. Théorème.** — ***Deux cercles donnés se correspondent dans deux inversions s'ils ne sont pas tangents, dans une seule inversion lorsqu'ils sont tangents.***

Si une inversion fait correspondre deux cercles inégaux donnés O (R) et O' (R') (fig. 335 et 336) elle admet pour centre l'un des points I ou J, centres d'homothétie positif et négatif de ces deux cercles. Désignons par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_1$ les puissances respectives de I et de J par rapport au cercle O, par MM_1 une sécante variable au cercle O issue de I et par M' le point du cercle O' homologue du point M_1 dans l'homothétie de centre I. On a :

$$\overline{IM}\cdot\overline{IM_1} = \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \overline{IM'} = \frac{R'}{R}\overline{IM_1} \quad \text{donc : } \overline{IM}\cdot\overline{IM'} = \mathcal{T}\frac{R'}{R}.$$

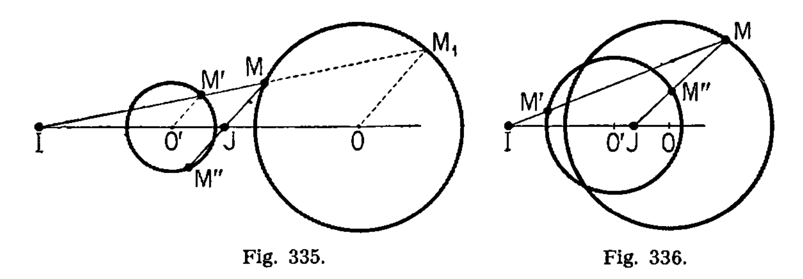


Fig. 335. Fig. 336.

L'inversion de centre I et de puissance $k = \mathcal{T}\frac{R'}{R}$ transforme M en M'. Elle échange donc les cercles O et O'. Il en est de même de l'inversion de centre J et de puissance $k_1 = -\mathcal{T}_1\frac{R'}{R}$. L'une de ces deux inversions disparaît lorsque $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{T}_1$ est nul c'est-à-dire lorsque les cercles O et O' sont tangents. Si les deux cercles O et O' deviennent égaux, l'inversion (I, k) dégénère en la symétrie par rapport à la médiatrice de OO'.

• **388. Remarque.** — Les deux inversions (I, k) et (J, k_1) sont respectivement du signe de $\mathcal{T}$ et de $-\mathcal{T}_1$:

1° Si les cercles O et O' sont extérieurs, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_1$ sont positifs donc k est positif et k_1 est négatif. Lorsque ces deux cercles deviennent tangents extérieurement seule subsiste l'inversion positive (I, k).

2° Si les cercles O et O' sont sécants, $\mathcal{T}$ est positif, $\mathcal{T}_1$ est négatif. Les deux inversions I et J sont toutes deux positives.

3° Si les cercles O et O' sont intérieurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_1$ sont négatifs, donc k_1 est positif et k négatif. Lorsque ces deux cercles deviennent tangents intérieurement seule subsiste l'inversion positive (J, k_1).

Finalement l'une au moins, des inversions I ou J, est positive. Donc :

Deux cercles donnés admettent deux cercles d'inversion s'ils sont sécants, un seul dans les autres cas.

Si les deux cercles donnés O et O′ sont égaux leur axe de symétrie remplace un cercle d'inversion.

• **389. Points inverses sur deux cercles.** — Un point M du cercle O et un point M′ du cercle O′ sont dits inverses sur ces deux cercles s'ils sont homologues dans une inversion échangeant les deux cercles.

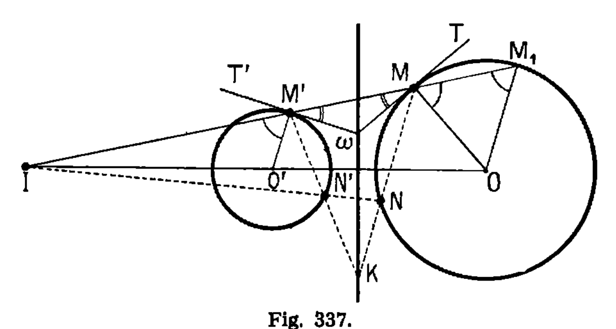


Fig. 337.

Pour qu'il en soit ainsi (fig. 337) il faut et il suffit que la droite MM′ recoupe le cercle O en un point M_1 homologue de M′ dans une homothétie faisant correspondre le cercle O au cercle O′, donc tel que OM_1 et O′M′ soient parallèles. Le triangle OMM_1 étant isocèle, cette condition équivaut à la relation : (MM′, OM) = — (MM′, O′M′) ou, en désignant par ω le point commun aux tangentes MT et M′T′ aux cercles O et O′, à l'une des relations :

$$(MM', MT) = -(MM', M'T') \quad \text{et} \quad \omega M = \omega M'.$$

Cette dernière montre que le point ω doit appartenir à l'axe radical des deux cercles (n° 288) :

Pour que deux points soient inverses sur deux cercles donnés il faut et il suffit que les tangentes en ces deux points se coupent sur l'axe radical de ces deux cercles.

D'autre part si M et M′, N et N′ sont deux couples de points inverses relatifs à la même inversion sur les cercles O et O′, les quatre points M, M′, N, N′, appartiennent à un même cercle (n° 372). Le point K, commun aux droites MN et M′N′ est le centre radical des cercles O, O′ et MNM′N′. Il appartient à l'axe radical des cercles O et O′.

Deux cordes dont les extrémités sont respectivement homologues dans une inversion échangeant deux cercles se coupent sur l'axe radical des deux cercles.

Il en résulte que si deux sécantes issues de deux points inverses M et M′ se coupent sur l'axe radical des deux cercles, elles recoupent respectivement ces deux cercles en deux points N et N′ homologues dans l'inversion qui échange M et M′.

INVERSION DANS L'ESPACE

• **390. Inverse d'un plan.** — Si un plan P passe par le centre d'inversion O, il est globalement invariant (nº 368). Ce cas étant écarté montrons que :

L'inverse d'un plan ne passant pas par le centre d'inversion est une sphère passant par ce centre.

Désignons (fig. 338) par H la projection du point O sur le plan P et par A son homologue dans l'inversion (O, k). Le plan P est engendré par la révolution autour de OH d'une droite Δ perpendiculaire en H à OH. L'inverse de Δ est un cercle Γ de diamètre OA qui par révolution autour de OH engendre la sphère S de diamètre OA.

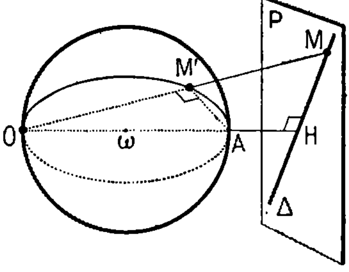


Fig. 338.

• **391. Inverse d'une sphère passant par le centre d'inversion.** — L'inversion étant réciproque l'inverse de la sphère S de diamètre OA est le plan P perpendiculaire à OA au point H homologue de A dans cette inversion (fig. 338) :

L'inverse d'une sphère passant par le centre est un plan perpendiculaire au diamètre issu de ce centre.

On démontre comme au nº 383 que l'homologue ω' du centre ω de la sphère S est le symétrique du centre d'inversion O par rapport au plan P.

• **392. Théorème.** — ***Une sphère et un plan se correspondent en général dans deux inversions, dans une seule lorsque le plan est tangent à la sphère.***

Si IJ est le diamètre de la sphère S perpendiculaire en H au plan P, les deux inversions (I, $\overline{IJ}\cdot\overline{IH}$) et (J, $\overline{JI}\cdot\overline{JH}$) échangent la sphère S et le plan P. L'inversion de centre J disparaît si le plan P est tangent en J à la sphère S.

• **393. Inverse d'une sphère quelconque.** — Désignons par $\mathfrak{T}$ (fig. 339) la

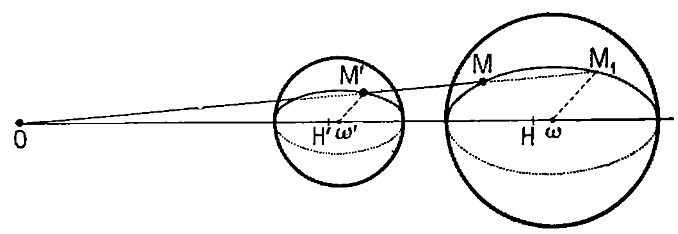


Fig. 339.

puissance du centre d'inversion O par rapport à la sphère donnée ω (R). L'inversion (O, k) est équivalente au produit de l'inversion (O, $\mathfrak{T}$) qui laisse invariante

la sphère ω, par l'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathfrak{P}}\right)$ (n° 375). L'inverse de la sphère ω (R) est donc son homologue ω' (R') dans l'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathfrak{P}}\right)$:

L'inverse d'une sphère ne passant pas par le centre d'inversion est une sphère analogue. Le centre d'inversion est un centre d'homothétie des deux sphères.

Cette inversion (O, k) échange les grands cercles Γ et Γ' des sphères ω et ω' situés dans un même plan issu de Oω. L'inverse du point ω est donc le pied H' de la polaire du point O par rapport à Γ', c'est-à-dire le pied du plan polaire de O par rapport à la sphère ω'.

Lorsque deux sphères se correspondent dans une inversion, l'homologue du centre de l'une est le pied du plan polaire du centre de l'inversion par rapport à l'autre.

D'autre part les inversions qui échangent deux sphères données ω et ω' sont celles qui échangent leurs grands cercles d'intersection Γ et Γ' par un plan issu de ωω'. Donc :

Deux sphères données se correspondent dans deux inversions si elles ne sont pas tangentes, dans une seule lorsqu'elles sont tangentes.

Une au moins de ces inversions est positive. Elles sont toutes deux positives lorsque les sphères sont sécantes.

● **394. Inverse d'un cercle dans l'espace.** — Soit à déterminer, dans l'inversion (O, k), le transformé d'un cercle γ dont le plan P ne passe pas par le point O (fig. 340). Ce cercle γ peut être considéré comme l'intersection du plan P et de la sphère S passant par O et contenant γ. Le plan P a pour inverse une sphère S' passant par O et la sphère S a pour inverse un plan P' parallèle au plan tangent

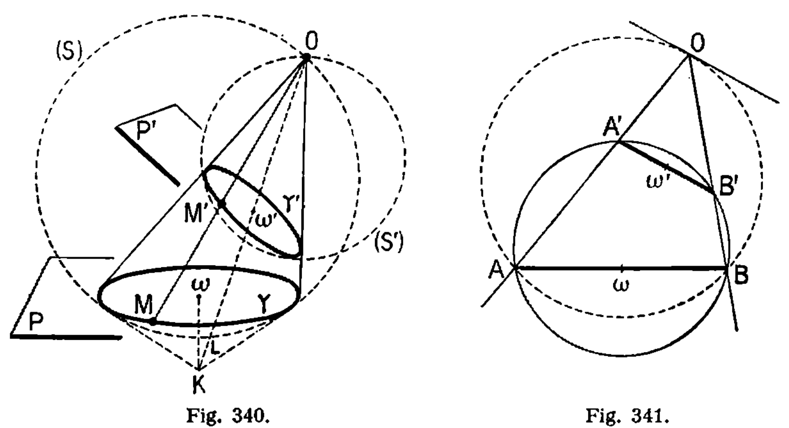


Fig. 340.

Fig. 341.

en O à la sphère S. L'inverse du cercle γ est le cercle γ' intersection du plan et de la sphère S'.

L'inverse d'un cercle γ dont le plan ne passe pas par le centre d'inversion O est un cercle γ′ dont le plan est parallèle au plan tangent en O à la sphère S déterminée par le centre d'inversion O et le cercle donné γ.

L'inversion étant réciproque, le plan P du cercle γ est parallèle au plan tangent en O à la sphère S′ définie par le point O et le cercle γ′.

• **395. Propriétés de deux cercles inverses.** — 1° Toute sphère contenant l'un des deux cercles inverses γ ou γ′ est l'homologue d'une sphère contenant l'autre. En particulier (fig. 342) la sphère Σ qui contient le cercle γ et un point quelconque M′ de γ′ passe par l'homologue M de M′. Elle est donc invariante dans l'inversion (n° 371) et contient par conséquent le cercle γ′ :

Deux cercles inverses dans l'espace appartiennent à une même sphère.

2° Le centre ω′ du cercle γ′ (fig. 340) est le centre de la sphère (*s*′) orthogonale suivant γ′, au plan P′. La sphère (*s*′) est l'inverse de la sphère (*s*) orthogonale à la sphère S suivant γ et dont le centre K est (n° 359) le pôle du plan P de γ par rapport à la sphère S. Les trois points O, K et ω′ sont donc alignés :

Le centre de l'inverse d'un cercle donné est situé sur la droite joignant le centre d'inversion au pôle du plan de ce cercle par rapport à la sphère passant par ce cercle et le centre d'inversion.

Notons que le point ω′ n'est pas l'inverse du centre ω du cercle γ. Il est l'inverse du point L où la droite Oω′K recoupe la sphère S.

• **396. Remarque.** — Le plan π déterminé par le point O et l'axe du cercle γ est un plan invariant dans l'inversion, orthogonal en A et B au cercle γ (fig. 341). Il est donc orthogonal au cercle γ′ en A′ et B′ homologues de A et B. Ce plan (π) qui est un plan de symétrie de la figure est orthogonal à tout plan ou toute sphère contenant γ ou γ′.

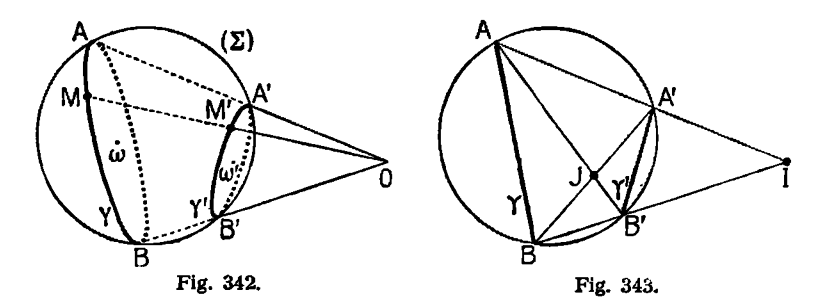


Fig. 342. Fig. 343.

• **397. Théorème.** — ***Deux cercles cosphériques se correspondent en général dans deux inversions.***

Soient γ et γ′ deux cercles inégaux d'une sphère Σ. Le plan (π) qui contient les axes de ces deux cercles (fig. 343) coupe orthogonalement γ en A et B, γ′ en A′ et B′. Désignons par I le point commun à AA′ et BB′, par J le point

commun à AB′ et BA′, et par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_1$ les puissances de I et J par rapport à la sphère Σ.

Si une inversion échange γ et γ′ elle admet (n° 396) pour centre I ou J. Effectivement l'inversion (I, $\mathcal{I}$) échange A et A′, B et B′ et transforme le cercle γ en un cercle orthogonal en A′ et B′ au plan (π), donc confondu avec γ′. De même l'inversion (J, $\mathcal{I}_1$) échange A et B′, B et A′ et transforme également γ en γ′.

Lorsque les cercles γ et γ′ sont tangents en J, l'inversion de centre J disparaît. Si les deux cercles γ et γ′ sont égaux l'inversion positive I fait place à une symétrie-plan.

• **398. Cône à base circulaire.** — Le cercle γ′ (fig. 340) est situé sur le cône Γ de sommet O et de base γ. Par homothétie de centre O on voit qu'il existe sur un tel cône deux familles de cercles dont les plans sont respectivement parallèles aux plans P et P′ de γ et γ′. Les quatre points A, B, A′, B′ étant situés sur un même cercle du plan π (fig. 341), les droites AB et A′B′ sont antiparallèles par rapport à OA et OB. Les plans P et P′ sont dits antiparallèles par rapport au cône Γ :

Sur tout cône oblique à base circulaire, il existe deux familles de cercles dont les plans sont parallèles ou antiparallèles à celui de la base.

Si on fait varier la puissance de l'inversion (O, k) qui transforme γ en γ′ le cercle γ′ engendre une des deux familles. Les cercles de cette famille sont donc les intersections du cône Γ par les sphères contenant γ. Lorsque le cône Γ est de révolution, les deux familles de cercles sont confondues.

SUJETS D'EXAMEN

— Produit d'une inversion et d'une homothétie de même centre. Réciproque. Application à l'inversion plane d'un cercle ne passant pas par le centre d'inversion. (*Bordeaux*, ME et MT.)

— Figure inverse d'un cercle dans le plan. (*Besançon*, ME.)

— Inversions transformant l'un en l'autre deux cercles d'un même plan. (*Nancy*, ME et MT.)

— Étude de la figure inverse C′ d'un cercle C dont le plan ne passe pas par le centre d'inversion S. Sa nature; sa disposition précise en utilisant le plan de symétrie de la figure formée par C et S. (*Paris*, ME.)

— C étant une courbe quelconque et C′ sa transformée dans une inversion de centre O, montrer que si C possède une tangente en M, la courbe C′ possède une tangente en M′ transformé de M. Étudier la position de ces tangentes par rapport à la droite OMM′. (*Clermont*, ME et MT.)

EXERCICES

● **438.** Démontrer que la polaire du point P par rapport au cercle O (R) est l'homologue du cercle de diamètre OP dans l'inversion (O, R^2) ou dans l'inversion $(P, \overline{PO}^2 - R^2)$. C'est aussi l'homologue du cercle de centre P, passant par O, dans l'inversion $(O, 2R^2)$.

● **439.** On donne un cercle O (R) et un point M. Le cercle de centre M passant par O coupe le cercle O en A et B. Les cercles de centres A et B passant par O se recoupent en M'. Démontrer que M' est l'homologue de M dans l'inversion (O, R^2).

● **440.** Soient A', B', M' les homologues des points A, B, M du plan dans l'inversion (O, k) :

1° Démontrer que $(\overrightarrow{M'A'}, \overrightarrow{M'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. En déduire le lieu de M' lorsque M décrit la droite AB, le cercle OAB ou un arc de cercle d'extrémités A et B.

2° Démontrer que $\dfrac{M'A'}{M'B'} = \dfrac{MA}{MB} : \dfrac{OA}{OB}$. En déduire le lieu de M' lorsque M décrit la médiatrice de AB ou un cercle du faisceau de points limites A et B.

● **441.** 1° Déterminer le lieu des centres d'inversion O transformant dans le plan trois points A, B, C en trois points A', B', C' tels que le triangle A'B'C' soit rectangle en A' ou isocèle de sommet A'.

2° Montrer qu'on peut déterminer le point O d'une façon unique de telle sorte que le triangle A'B'C' soit directement semblable à un triangle donné.

● **442.** On considère quatre points A, B, C, D du plan et leurs homologues A', B', C', D' dans l'inversion (O, k). Démontrer que :

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

$$\text{et } (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}) - (\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{D'B'}) = -\left[(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\right].$$

(On pourra comparer $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ à l'angle en A des arcs $\overset{\frown}{ACB}$ et $\overset{\frown}{ADB}$).

● **443.** Montrer, par inversion, que l'angle aigu des deux cercles ABC et ABD est égal à l'angle aigu des cercles ACD et BCD.

Préciser la relation entre l'angle en A des arcs $\overset{\frown}{ABC}$ et $\overset{\frown}{ABD}$ et l'angle en C des arcs $\overset{\frown}{CDA}$ et $\overset{\frown}{CDB}$.

● **444.** Soient trois points fixes A, B, C et un point M mobile sur un cercle O passant par B et C. Démontrer que l'angle en A, des cercles AMB et AMC est constant. Comparer sa valeur à celle de l'angle en B des cercles ABC et MBC.

● **445.** Un cercle variable ω passe par les points fixes B et C et coupe la médiatrice de BC en M et N. Soit A un point fixe de la droite BC. Les droites AM et AN recoupent le cercle ω en M' et N'. Trouver le lieu géométrique de M' et N'.

● **446.** On mène d'un point fixe P deux sécantes variables PAB et PCD à un cercle O.

1° Démontrer que le lieu du point de rencontre M des cercles PAC et PBD et du point de rencontre N des cercles PAD et PBC est le cercle de diamètre OP.

2° Etablir que la droite MN passe par un point fixe I de la droite OP.

● **447.** On donne un cercle fixe O (R), un point fixe A et un point variable M sur une droite fixe Δ. Le cercle OAM coupe le cercle O en B et C. La droite BC coupe OM en M'.

Démontrer que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = R^2$ et déterminer le lieu du point M'.

● **448.** Deux cercles orthogonaux O(R) et O'(R') se coupent en A et B. Soient P et Q les transformés d'un point M de la droite AB dans les inversions $(O, R^2$ et (O', R'^2).

1° Déterminer le lieu géométrique des points P et Q.

2° Montrer que OQ et O'P se coupent en un point N de la droite AB et que la division (ABMN est harmonique.

● **449.** Deux cercles orthogonaux variables ω et ω' se coupant en M et M' sont respectivement tangents aux points fixes A et B à la droite AB.

1° Trouver les lieux de P et P' homologues de M et M' dans l'inversion $(A, \overline{AB}^2)$.

2° En déduire les lieux de M et de M'.

● **450.** Soit un angle xOy, un point fixe A de Ox et un point fixe B de Oy. Deux cercles orthogonaux variables ω et ω' sont respectivement tangents en A à Ox, en B à Oy et se coupent en M et M'. Soient P et P' les homologues de M et M' dans l'inversion $(A, \overline{AB}^2)$.

1° Déterminer les lieux de P et P' et en déduire ceux de M et M'.

2° Etudier le cas où l'angle xOy est droit.

● **451.** On considère les tangentes fixes AP et AQ au cercle I (R) et une tangente variable qui coupe AP en B et AQ en C.

1° Montrer que, dans l'inversion (I, R^2), les transformés de AB, BC, CA et du cercle ABC sont quatre cercles égaux.

2° En déduire l'enveloppe du cercle ABC lorsque BC varie.

● **452.** Un cercle variable ω passe par deux points fixes O et P et coupe en A et B un cercle fixe de centre I. Trouver le lieu du point M du cercle ω tel que le faisceau O (ABPM) soit harmonique. Cas où le point P est sur le cercle de diamètre OI.

● **453.** On donne un cercle O (R) et un point fixe A. Soit B le pied de la polaire de A par rapport au cercle O. Un cercle variable ω passant par A, tangent en M au cercle O, recoupe MB en P et le cercle OMB en Q. Trouver les lieux géométriques des points P et Q.

● **454.** On donne une droite Δ et deux points A et B. Soient M et M' les points de contact avec Δ des cercles ω et ω' tangents à Δ et passant par A et B. En construit les symétriques C et D de A par rapport à Δ et par rapport au point I commun à Δ et à AB.

1° Montrer, par une inversion de centre A, que M et M' appartiennent au cercle BCD.

2° Justifier cette propriété par des considérations angulaires ou autres.

● **455.** On désigne par M et M' les points de contact, avec un cercle O donné, des cercles ω et ω' passant par deux points donnés A et B. Le polaire de A par rapport au cercle O coupe AO en C et AB en D.

1° Démontrer par une inversion de centre A que M et M' appartiennent au cercle BCD.

2° Montrer que les droites CM et CM' recoupent respectivement les cercles ω et ω' en deux points N et N' alignés avec A, sur la polaire de C par rapport au cercle O.

● **456.** On considère un cercle fixe O et un point fixe A extérieur. Une sécante variable BC à ce cercle passe par le point fixe I.

1° Démontrer que le cercle ABC passe par un second point fixe P.

2° Les droites AB et AC recoupent le cercle O en D et E. Démontrer que la droite DE et le cercle ADE passent respectivement par deux points fixes J et Q.

3° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre M des droites BC et DE ainsi que du point de rencontre N des cercles ABC et ADE.

● **457.** On donne un cercle fixe O et un point F intérieur. Un cercle variable de centre M, passant par F, est tangent en I au cercle O et la droite FI recoupe ce cercle O en J.

1° Montrer que la tangente en J au cercle O est perpendiculaire en K à la droite MF et que : $2\,\overline{FK}.\overline{FM} = \overline{FI}.\overline{FJ}$.

2° Soit ω le pôle de la droite FI par rapport au cercle M. Montrer que le cercle de centre ω passant par F engendre un faisceau de cercles.

3° Le cercle de centre J passant par F, recoupe le cercle ω en D et les droites Mω et OJ se coupent en E. Démontrer que les points D, E, F sont alignés et que les points ω, I, J, D, E appartiennent à un même cercle.

● **458.** Soient B et D les points de contact avec un cercle fixe (C) des tangentes à (C) issues d'un point fixe A ; M étant un point de la droite BD, on effectue l'inversion de centre M et de puissance $\overline{MB}.\overline{MD}$.

1° Quels sont les transformés C_1 et C_2 des droites AB et AD ? Trouver le lieu du point P commun à C_1 et C_2, et autre que M, lorsque M décrit la droite BD.

2° Soit (I) le cercle inscrit au triangle ABD. Construire son transformé Γ dans l'inversion considérée. Lieu des points de contact du cercle Γ avec C_1 et C_2 quand M décrit la droite BD. *(Lille.)*

● **459.** On considère dans un plan deux points M et M' variables sur une droite D et un cercle C non tangent à cette droite. Soit SS' le diamètre du cercle C perpendiculaire à D. Les droites SM et SM' recoupent C en m et m'.

1° A étant un point fixe de D, on suppose que $\overline{AM}.\overline{AM'} = k$, où k est une constante donnée. Montrer que le cercle SMM' passe par un second point fixe I et que la droite mm' passe par un point fixe K situé sur SA et extérieur ou intérieur à C selon que k est positif ou négatif. Qu'arrive-t-il si $k = 0$? Montrer que, réciproquement, si la droite mm' passe par un point fixe, non situé sur la tangente en S à C, il existe un point A de D tel que $\overline{AM}.\overline{AM'} = k$, où k est constant.

2° On suppose maintenant que M et M' sont symétriques par rapport à un point O de D. Montrer que le cercle SMM' passe encore par un point fixe I et que la droite mm' passe par un point fixe K situé sur la tangente en S à C. Montrer que réciproquement, si la droite mm' passe par un point fixe situé sur la tangente en S à C, les points M et M' sont symétriques par rapport à un point fixe de D.

(Clermont.)

● **460.** On considère une sphère S et deux points extérieurs A et B. On mène par A une tangente AM à la sphère S et on trace BM qui recoupe la sphère en N.

1° Lieu de N quand la tangente AM varie. Déterminer les points où M et N peuvent être confondus.

2° On suppose que la sphère S varie en passant par un cercle fixe C dont le plan contient A et B. Lieu de N dans ces conditions. Quel est le lieu de B pour que le lieu de N soit un plan?

3° Montrer que lorsque B décrit le lieu trouvé le plan correspondant tourne autour d'une droite fixe. *(Alger.)*

● **461.** On donne dans le plan deux points fixes A et A', O le milieu de AA', D la médiatrice de AA' et l'on pose OA = a. A tout point M du plan on fait correspondre son symétrique M_1 par rapport à la droite AA' puis l'inverse M' de M_1 dans l'inversion de pôle O, de puissance a^2.

1° Montrer qu'on peut aussi passer de M à M' par une symétrie par rapport à la droite D suivie d'une inversion de pôle O dont on déterminera la puissance. Montrer que les points M, M', A, A' sont en général sur un même cercle.

2° Quels sont les points M qui coïncident avec leurs homologues M'? Quelles sont les droites telles que si M décrit l'une d'elles, M' décrit la même droite?

3° Montrer qu'il existe une double infinité de cercles tels que si M décrit l'un d'eux, M' décrit le même cercle.

4° Montrer que MA.M'A' = MA'.M'A. *(Lyon.)*

● **462.** On donne un diamètre A'D d'un cercle (A) de centre A, de rayon R et un point I du segment AD tel que $AI = \frac{R}{3}$. Une droite variable passant par I coupe le cercle (A) en M et N.

1° Les tangentes en M et N au cercle (A) se coupent en E. Lieu du point E.

2° Dans l'inversion (I) de pôle I, de puissance $\overline{IA}.\overline{IA'}$ les homologues de M et N sont M' et N'. Trouver le lieu (B) de ces points. Quel est le centre de (B)?

3° Les tangentes en M' et N' au cercle (B) se coupent en F. Montrer que E, I, F sont alignés. Lieu de F.

4° Montrer qu'il existe un cercle tangent en M au cercle (A) en en M' au cercle (B) et que ce cercle reste orthogonal à un cercle fixe lorsque M varie.

(Besançon.)

● **463.** Soit un triangle ABC dont le côté BC est porté par une droite fixe D, dont l'angle A a une valeur constante $\alpha < 1^D$ et dont l'orthocentre H est fixe. On désigne par $2k$ la distance de H à D et on considère l'inversion (I) de pôle H, de puissance $4k^2$.

1° Montrer que le cercle ABC passe par un point fixe. Si B' et C' sont les homologues de B et C dans l'inversion (I), déterminer l'enveloppe de la droite B'C' et montrer que le cercle HBC reste tangent à un cercle fixe dont on calculera le diamètre en fonction de k et α.

2° Montrer que le cercle ABC reste tangent à un cercle fixe.

3° Montrer que le cercle de diamètre BC reste tangent à deux cercles fixes symétriques par rapport à BC. *(Strasbourg.)*

● **464.** On donne dans un plan le cercle C (O,R).

1° M étant un point quelconque du plan et D une droite quelconque passant en M dans le plan, construire les cercles α et β passant par M et tangents à la droite D et au cercle C (On pourra utiliser une inversion de pôle M). A et B, étant les points de contact avec C, montrer que le cercle ABM est orthogonal à la droite D et au cercle C.

2° Soit M′ le point diamétralement opposé à M sur le cercle ABM. Montrer que le lieu de M′ quand la droite D tourne autour de M supposé fixe est une droite m. Quel est dans les mêmes conditions, le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B au cercle C? *(Paris.)*

● **465.** Soient C et C′ des cercles de rayons R et R′, de centres O et O′ tangents extérieurement en S. Ces cercles coupent la droite OO′ en S et respectivement en A et A′. Une tangente commune autre que la tangente D au point S coupe D en P et la ligne des centres en S′. Les points de contact sont M et M′ et T est le milieu de OO′.

1° Montrer que le cercle de diamètre OO′ est tangent en P à MM′. Evaluer SS′ et ST en fonction des rayons.

2° Montrer que A, A′, M, M′ sont sur un même cercle Γ dont le centre ω est diamétralement opposé à P sur le cercle de diamètre OO′ et que les droites AM et A′M′ se coupent en P′ sur D. Soient α et β les projections de ω sur OO′ et sur D. Montrer que les quatre points S′PTβ sont sur un même cercle ainsi que les quatre points S′P′$\alpha\beta$.

3° Les droites SM et SM′ recoupent Γ en N et N′. Montrer que la droite NN′ est perpendiculaire à D et que sa distance à S vaut 2 SP. Montrer que S′P′ est l'axe radical de Γ et du cercle-point S.

4° En supposant la droite OO′ et le point S fixes et les rayons variant de manière que $R - R' = d$, longueur donnée, déterminer le lieu de ω. *(Dijon.)*

SEIZIÈME LEÇON

APPLICATIONS DE L'INVERSION

• **399. Méthode de résolution par inversion.** — L'inversion constitue un moyen remarquable de démonstration. Outre les relations géométriques qu'elle entraîne entre les éléments de deux figures homologues :

L'inversion permet de déduire de toute proposition relative à une figure donnée une proposition correspondante relative à la figure transformée.

Ainsi pour démontrer une proposition A de la figure F, on peut transformer cette figure par une inversion convenablement choisie ramenant la proposition A à une proposition A′ de la figure transformée F′, évidente ou plus facile à établir.

Donnons quelques applications de ce *procédé de démonstration par inversion.*

• **400. Théorème de Ptolémée.** — Pour qu'un quadrilatère convexe ABCD soit inscriptible dans un cercle (fig. 344) il faut et il suffit que l'inversion positive (D, k) transforme les trois points A, B, C, en trois points A′, B′, C′ alignés dans cet ordre, donc tels que :

$$A'C' = A'B' + B'C'. \qquad (1)$$

Or (n° 376) : $A'C' = \dfrac{k\,AC}{DA.DC}$,

$$A'B' = \frac{k\,AB}{DA.DB} \quad \text{et} \quad B'C' = \frac{k\,BC}{DB.DC}$$

Fig. 344.

La relation (1) est donc équivalente à :

$$\frac{k\,AC}{DA.DC} = \frac{k\,AB}{DA.DB} + \frac{k\,BC}{DB.DC}$$

Soit à : $$\boxed{AC.BD = AB.CD + AD.BC} \qquad (2)$$

Pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible dans un cercle il faut et il suffit que le produit de ses diagonales soit égal à la somme des produits de ses côtés opposés.

La relation (2) est la transformée de la relation (1) relative aux trois points alignés A′, B′, C′ dans une inversion de centre D.

• **401. Anneau orthogonal.** — Considérons (fig. 345) une division harmonique ABCD et deux cercles Γ et Γ_1 de diamètres respectifs AB et CD situés dans deux plans perpendiculaires. La figure formée par Γ et Γ_1 est appelée *anneau orthogonal.*

Soit O le milieu de AB. Comme $\overline{DA}.\overline{DB} = \overline{DC}.\overline{DO}$ l'inversion $(D, \overline{DA}.\overline{DB})$ conserve le cercle Γ et transforme Γ_1, en l'axe Δ du cercle Γ (fig. 346). La figure formée par Γ et Δ possède les propriétés évidentes suivantes :

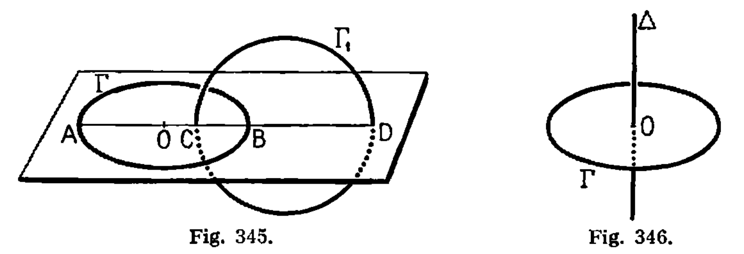


Fig. 345. Fig. 346.

La droite Δ est orthogonale à toute sphère S passant par Γ. Le cercle Γ est orthogonal à tout plan P issu de Δ. Toute sphère S est orthogonale à tout plan P et leur intersection γ est un cercle à la fois orthogonal à Γ et Δ.

On en déduit les propriétés suivantes de l'anneau orthogonal (Γ, Γ_1).

Le cercle Γ_1 est orthogonal à toute sphère S passant par Γ et le cercle Γ est orthogonal à toute sphère S_1 passant par Γ_1. Toute sphère S est orthogonale à toute sphère S_1 et leur intersection γ_1 est un cercle à la fois orthogonal à Γ et Γ_1.

D'autre part pour qu'une droite Δ soit l'axe du cercle Γ il faut et il suffit que le cercle Γ soit orthogonal à deux plans distincts P_1 et P_2 issus de Δ. Donc :

Pour que deux cercles Γ et Γ_1 forment un anneau orthogonal il faut et il suffit que l'un d'eux soit orthogonal à deux sphères passant par l'autre.

Cette propriété se conservant par inversion on en déduit que :

L'inverse d'un anneau orthogonal est un anneau orthogonal ou un cercle et son axe.

• **402. Théorème de Feuerbach.** — ***Le cercle d'Euler d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits à ce triangle.***

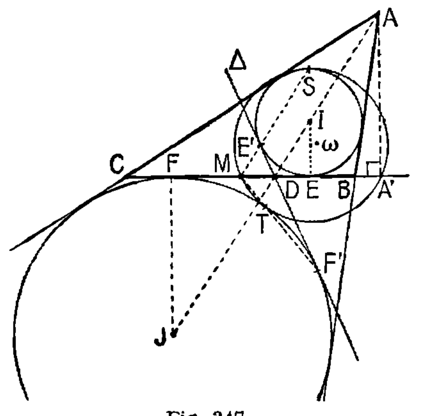


Fig. 347.

Dans un triangle ABC (fig. 347) désignons par M, D et A' les pieds de la médiane, de la bissectrice intérieure et de la hauteur issues de A, par G le centre de gravité, par I le centre du cercle inscrit, par J le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle A et enfin par E et F les points de contacts des cercles I et J avec le côté BC. On sait (n° 259) que la division ADIJ est harmonique et que le milieu de IJ est sur la médiatrice de BC. Par projection sur BC, on voit que la division A'DEF est harmonique et que M est le milieu de EF; c'est-à-dire (n° 261) que : $\overline{ME}^2 = \overline{MF}^2 = \overline{MD}.\overline{MA'}$.

L'inversion $(M, \overline{ME}^2)$ laisse invariants le cercle I et le cercle J, et transforme A' en D. Le cercle d'Euler ω du triangle ABC passant par M et A' est transformé en une droite Δ passant par D et parallèle à la tangente en M au cercle ω. Or dans l'homothétie (G, ½) le cercle ω est l'homologue du cercle ABC et le point M est l'homologue du point A. La tangente en M au cercle ω est donc parallèle à la tangente en A au cercle ABC et par suite antiparallèle à BC par rapport aux droites AB et AC (n° 62). Il en est de même de la droite Δ qui est par conséquent symétrique de BC par rapport à la bissectrice AD. La droite Δ est donc la deuxième tangente commune intérieure E'F' aux cercles I et J.

Il en résulte que le cercle ω est tangent aux cercles I et J aux points S et T où ME' et MF' recoupent ces cercles.

• **403. Inverse d'un faisceau de cercles.** — ***Dans le plan, l'inverse d'un faisceau de cercles est en général un faisceau de cercles de même nature.***

Dans une inversion de centre O :

1° Un faisceau de cercles sécants en A et B se transforme en un faisceau de cercles sécants en A' et B' respectivement inverses de A et B. Toutefois si le centre de l'inversion est en A, on obtient le faisceau des droites issues de B' et réciproquement le faisceau des droites issues de B' a pour inverse un faisceau de cercles sécants.

2° Un faisceau de cercles tangents en A, se transforme en un faisceau de cercles tangents en A' inverse de A. Cependant si le centre d'inversion est en A on obtient une famille de droites parallèles à l'axe radical du faisceau. Réciproquement une famille de droites parallèles a pour inverse un faisceau de cercles tangents.

3° Un faisceau F à points limites I et J est orthogonal au faisceau Φ des cercles sécants en I et J. Ce dernier se transforme par inversion, en un faisceau Φ' de cercles sécants en I' et J' inverses respectifs de I et J. Le faisceau F', transformé de F, est orthogonal au faisceau Φ' et admet donc I' et J' pour points limites.

Si le centre d'inversion est en I, le faisceau Φ' est celui des droites issues de J' et le faisceau F' celui des cercles de centre J'. Réciproquement un faisceau de cercles concentriques a pour inverse un faisceau à points limites.

Remarque. — Notons que lorsque le faisceau transformé est effectivement un faisceau de cercles :

L'axe radical du faisceau transformé est l'homologue du cercle du faisceau donné, passant par le centre d'inversion.

• **404. Théorème.** — ***L'inverse, par rapport à un point de son support Δ, d'une division harmonique*** ABCD ***est une division harmonique*** A'B'C'D'.

En effet les cercles de diamètres AB et CD (fig. 348) sont orthogonaux (n° 306) et ils se transforment en deux cercles orthogonaux de diamètres A'B' et C'D'. Donc (A'B'C'D') = — 1. Si le centre O de l'inversion est en D, le point D' est rejeté à l'infini et le point C' est le milieu de A'B'.

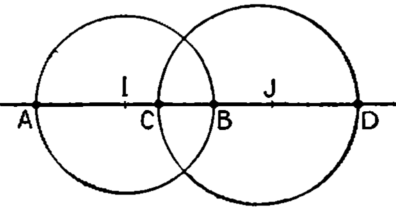


Fig. 348.

Si le centre O de l'inversion est extérieur au support Δ de la division harmonique on pourra montrer que son inverse est un quadrangle harmonique A'B'C'D' (n° 354). Réciproquement l'inverse d'un quadrangle harmonique par rapport à un point O du cercle circonscrit à ce quadrangle est une division harmonique car le faisceau O(A'B'C'D') est harmonique.

• 405. Cercles orthogonaux à deux cercles du plan. — Soit ω le centre d'un cercle orthogonal en M et N au cercle O, en M' et N' au cercle O' (fig. 349). Les droites ωM et ωN sont tangentes au cercle O, les droites ωM' et ωN' sont tangentes au cercle O' et le point ω appartient à l'axe radical des deux cercles. Il en résulte (n° 389) que les couples (M, M'), (M, N'), (N, M') et (N, N') sont des couples de points inverses sur les deux cercles. Les droites MM' et NN'

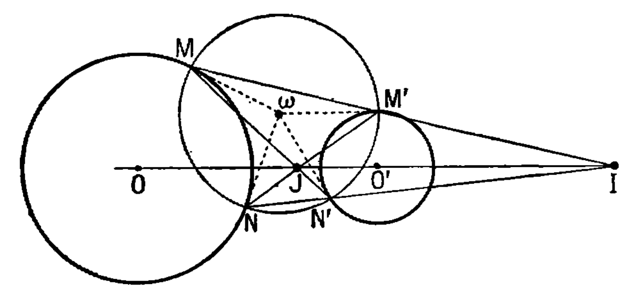


Fig. 349.

concourent au centre d'inversion I tandis que MN' et NM' concourent au centre d'inversion J. Donc (n° 370) :

Tout cercle orthogonal à deux cercles donnés est invariant dans chacune des inversions qui échangent les deux cercles.

Remarques. — 1° Le cercle ω est donc orthogonal à tout cercle d'inversion Γ des cercles donnés (n° 371). Ce cercle Γ fait donc partie du faisceau (O) (O') conjugué de celui des cercles ω :

Tout cercle d'inversion de deux cercles donnés appartient au faisceau défini par ces deux cercles.

2° Si les cercles O et O' sont sécants en A et B, il y a deux cercles d'inversion Γ_I et Γ_J. Chacun d'eux fait en A (ou en B) des angles opposés avec les cercles O et O' (n° 381) :

Les cercles d'inversion de deux cercles sécants sont appelés leurs cercles bissecteurs.

On voit d'ailleurs (n° 220) que AI et AJ sont les bissectrices de l'angle (AO, AO').

• 406. Cercles tangents à deux cercles du plan. — Soit ω le centre d'un cercle tangent en M au cercle O, et en M' au cercle O' (fig. 350 et 351). Les tangentes communes en M et M' se coupent en K tel que KM = KM'. Le point K est un point de l'axe radical des deux cercles et (n°s 389 et 370) :

Lorsqu'un cercle ω est tangent à deux cercles donnés les points de contact sont inverses sur les deux cercles et le cercle ω est invariant dans l'inversion correspondante.

Réciproquement le cercle qui passe par deux points inverses M et M' et qui est tangent en M au cercle O est un cercle invariant. Il est donc (n° 381) tangent en M' au cercle O' :

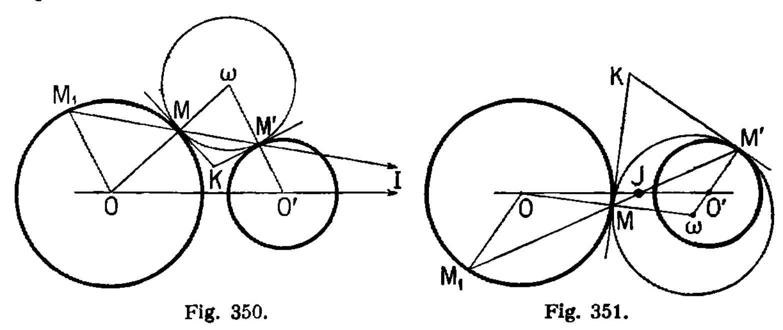


Fig. 350. Fig. 351.

Il existe donc deux familles de cercles tangents à deux cercles donnés selon que les points de contact sont homologues dans l'inversion I *ou dans l'inversion* J.

Si les cercles O et O' sont tangents l'une des familles est constituée par le faisceau défini par ces deux cercles.

REMARQUE. — Si I est le centre d'homothétie positif des cercles O et O', tout cercle ω de la famille correspondante est tangent soit intérieurement soit extérieurement aux deux cercles O et O', car les homothéties de centres M et M' qui transforment ω en O et en O' sont de même signe (n° 215). On dit que *les contacts sont de même nature.*

Si J est le centre d'homothétie négatif, tout cercle ω' de la famille correspondante est tangent intérieurement à l'un des cercles O et O', extérieurement à l'autre car les homothéties M et M' sont alors de signes contraires. *Les contacts sont de natures différentes.*

● **407. Cercles tangents à un cercle et à une droite.** — Soit ω le centre d'un cercle tangent en M au cercle donné O et en M' à la droite donnée Δ (fig. 352 et 353). Le point M étant un centre d'homothétie des deux cercles O

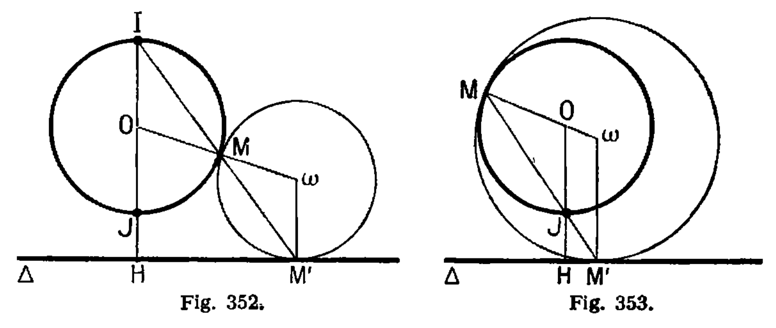


Fig. 352. Fig. 353.

et ω, la droite MM' passe par l'une des extrémités du diamètre IJ du cercle O perpendiculaire à Δ, c'est-à-dire par l'un des centres d'inversion du cercle O et de la droite Δ :

Lorsqu'un cercle ω est tangent à une droite et à un cercle, les points de contact sont inverses sur la droite et sur le cercle.

Réciproquement le cercle ω qui passe par deux points M et M′ homologues dans l'une des inversions qui échangent la droite et le cercle et qui est tangent en M au cercle O est un cercle invariant dans cette inversion. Il est donc tangent en M′ à la droite Δ (n° 381, 2°). Il en résulte l'existence de deux familles de cercles tangents à un cercle et à une droite.

• **408. Propriétés invariantes par inversion.** — Les propriétés signalées aux n°s 380, 401, 404 en donnent des exemples. Démontrons le théorème suivant :

***Lorsque deux figures* F *et* F′ *sont inverses par rapport à un point* I, *toute inversion de centre* O *les transforme en deux figures f et f′ inverses par rapport à un point* J *de la droite* OI.**

L'inversion I est définie par deux couples de points homologues A, A′ et B, B′ aligné ou sur un cercle (fig. 354). L'inversion O les transforme en deux couples a, a' et b, b alignés ou sur un cercle qui définissent une inversion de centre J. Deux points M et M homologues de F et F′ sont communs à deux cercles AA′MM′ et BB′MM′ (n° 372) Leurs transformés m et m' dans l'inversion O sont communs aux cercles $aa'mm'$ et $bb'mm$

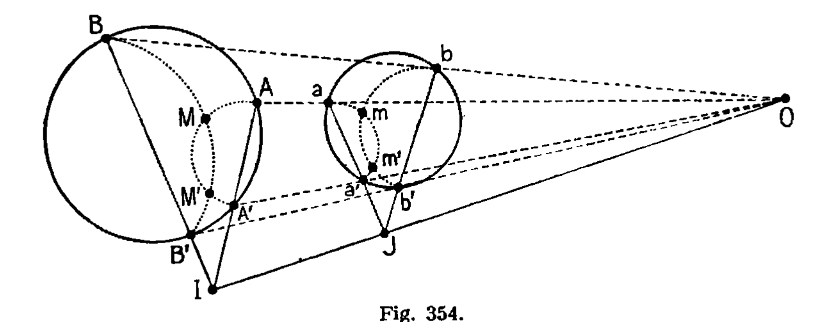


Fig. 354.

transformés des précédents. Donc m et m' sont homologues dans l'inversion J. Si le point M appartient à la droite OI, il en est de même de M′, m et m'. Comme mm' passe par J, le point J appartient à la droite OI (invariante dans les trois inversions).

Les inversions I et J sont de même signe car à tout point double de l'une correspond un point double de l'autre. Il en résulte que les cercles (ou sphères) d'inversion I et J, lorsqu'ils existent, sont homologues dans l'inversion O.

• **409. Corollaire.** — ***Deux figures* F *et* F′ *homologues dans une inversion positive peuvent, par inversion, être transformées en deux figures symétriques.***

Si on prend le point O sur le cercle (ou la sphère) d'inversion Γ de l'inversion I qui échange F et F′, les figures f et f' sont alors symétriques par rapport à la droite (ou au plan) homologue de Γ dans l'inversion O.

Ainsi deux cercles donnés ω et ω′ d'un même plan admettent toujours au moins un cercle d'inversion Γ (n° 388). En les transformant par une inversion dont le centre O appartient à Γ, on obtient deux cercles symétriques par rapport à la droite Δ, inverse de Γ.

On peut, par inversion, transformer deux cercles quelconques du plan en deux cercles égaux.

• **410. Inverseurs de Peaucellier et de Hart.** — 1° L'inverseur de Peaucellier (fig. 355) est composé d'un losange articulé AMBM′ de côté a auquel sont articulées deux tiges OA et OB de même longueur d. Les points O, M, M′ sont alignés sur la médiatrice de AB et le produit $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$, puissance de O par rapport au cercle A (a), est égal à $d^2 - a^2$.

Si le point O est fixe, les points M et M′ restent homologues dans l'inversion (O, $d^2 - a^2$) et la pointe traçante M′ décrit la figure inverse de la figure que l'on fait décrire à la pointe sèche M.

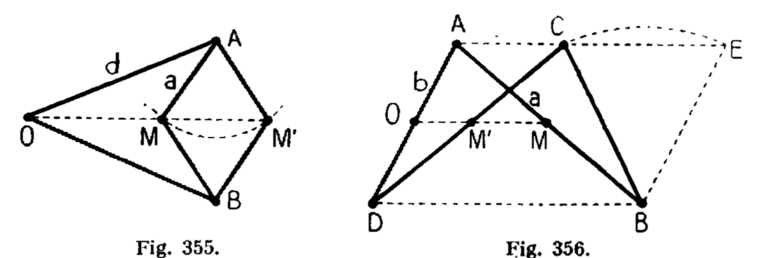


Fig. 355. Fig. 356.

2° L'inverseur de Hart (fig. 356) est un quadrilatère croisé articulé ABCD tel que AB = CD = a et AD = BC = $b \neq a$. Les triangles ABC et CDA étant égaux le quadrilatère ACBD reste un trapèze isocèle. Les points O, M et M′ milieux respectifs de AD, AB et CD restent alignés sur la base moyenne de ce trapèze et $\overline{OM}.\overline{OM'}$ est le quart de $\overline{AC}.\overline{DB}$. Achevons le parallélogramme ADBE. On a : $\overline{AC}.\overline{DB} = \overline{AC}.\overline{AE} = a^2 - b^2$, puissance de A par rapport au cercle B (b). Le produit $\overline{OM}.\overline{OM'}$ est donc constant. Si le point O est fixe, les points M et M′ décrivent deux figures inverses.

• 411. Lieux géométriques et enveloppes. — L'inversion permet parfois de ramener la recherche d'un lieu géométrique ou d'une enveloppe à un problème plus simple.

EXEMPLE I. — *On considère trois points fixes* A, B *et* C. *Trouver le lieu géométrique du point* M *commun à deux cercles orthogonaux variables* ABM *et* ACM.

Une inversion de centre A transforme B et C en B′ et C′ et les deux cercles ABM et ACM en deux droites rectangulaires B′M′ et C′M′. Le lieu de M′ étant le cercle de diamètre B′C′, on en déduit que le lieu de M est le cercle orthogonal en B et C au cercle ABC.

Lorsque l'angle BAC est droit, ce lieu devient la droite BC.

EXEMPLE II. — *On donne un cercle fixe* Γ *et un point fixe* A *non situé sur le cercle. Trouver l'enveloppe des cercles* μ *passant par* A *et coupant le cercle* Γ *sous un angle donné* α.

Une inversion de centre A transforme le cercle Γ en un cercle Γ′ et les cercles μ en droites μ' coupant Γ′ sous l'angle α. L'enveloppe des droites μ' étant un cercle C′ concentrique à Γ′, l'enveloppe des cercles μ est un cercle du faisceau défini par le cercle point A et le cercle Γ (n° 403).

• 412. Problèmes de construction.

EXEMPLE I. — *Construire les cercles passant par deux points donnés* A *et* B *et tangents à un cercle donné* O.

Ce problème a déjà été étudié (n° 326). En voici une solution par inversion :

Transformons la figure dans l'inversion de centre A qui conserve le cercle O (fig. 357). Nous sommes ramenés à construire les tangentes au cercle O issues du point B′ homologue de B. Soient φ et φ' les points de contact de ces tangentes. Les droites Aφ et Aφ' recoupent le cercle O en M et M′, points de contact des cercles ABM et ABM′ avec le cercle donné.

On peut traiter d'une façon analogue la construction des cercles passant par A et B et tangents à une droite Δ en utilisant l'inversion (A, $\overline{AB}^2$).

Exemple II. — *Construire les cercles passant par un point donné* A *et tangent à deux cercles donnés* O *et* O'.

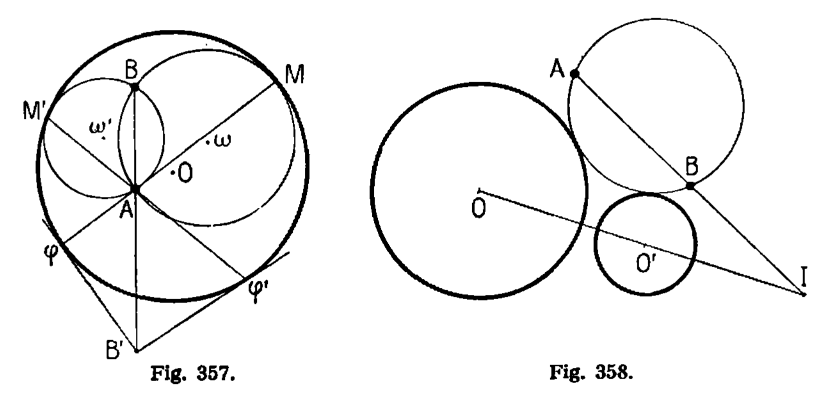


Fig. 357. Fig. 358.

1° Tout cercle ω tangent aux cercles O et O' (fig. 358) est invariant dans l'une des inversions I ou J qui échangent les deux cercles (n° 406). Le cercle ω qui passe par A passe donc par le point B ou le point C homologues de A dans les inversions I et J. Réciproquement tout cercle passant par A et B par exemple et tangent au cercle O, est tangent au cercle O'. Nous sommes donc ramenés à la construction des cercles passant par A et B (ou A et C) et tangents au cercle O. Au plus 4 solutions.

2° En transformant la figure dans une inversion de centre A on se ramène à la construction des tangentes communes à deux cercles. On peut aussi prendre pour centre d'inversion un point commun ou un point limite du faisceau (O, O') et se ramener à un problème plus simple.

Exemple III. — *Construire les cercles tangents à trois cercles donnés.*

1° Si deux des trois cercles O_1 et O_2 par exemple ont un point commun A, une inversion de centre A nous ramène à la construction des cercles tangents à deux droites et à un cercle donnés (n° 234). Au plus huit solutions.

2° Si les cercles O_1, O_2 et O_3 n'ont, deux à deux, aucun point commun on peut par inversion transformer O_1 et O_2 en deux cercles concentriques O'_1 et O'_2. Comme tout cercle tangent à O'_1 et O'_2 a pour diamètre $R'_1 + R'_2$ ou $|R'_1 - R'_2|$ on est ramené à la construction d'un cercle de rayon connu tangent à O'_1 et à O'_3. Huit solutions ou zéro suivant le cas de figure.

● **413. Conseil pratique.** — Les exemples précédents donnent un aperçu de l'efficacité de la méthode de résolution par inversion. C'est pourquoi :

Lorsque la solution d'un problème n'est pas immédiate, on peut essayer de le transformer par inversion en un problème plus simple.

Ce procédé est surtout utile dans le cas d'une figure composée de cercles et de droites se coupant sous des angles donnés. Il y a souvent avantage à choisir pour centre d'inversion un point commun à deux ou plusieurs cercles de la figure. Il est bon de savoir que l'on peut :

1° Transformer deux cercles sécants ou tangents en A en deux droites concourantes ou parallèles par une inversion de centre A.

2° Transformer deux cercles intérieurs ou extérieurs en deux cercles concentriques par une inversion ayant pour centre un point limite du faisceau défini par ces deux cercles.

3° Transformer deux cercles quelconques (ou un cercle et une droite) en deux cercles égaux par une inversion ayant pour centre un point d'un cercle d'inversion des deux cercles donnés.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

•414. Définition. — Considérons (fig. 359) une sphère Σ de centre O et de rayon R, un point P de cette sphère et le plan diamétral π perpendiculaire en O à OP. La droite PM qui joint le point P à un point quelconque M de la sphère Σ coupe le plan π en m :

Le point m *est appelé projection stéréographique du point* M *de la sphère* Σ *sur le plan* π *avec le point* P *comme point de vue.*

Or le plan π est le transformé de la sphère Σ dans l'inversion (P, $2R^2$) et le point m est l'homologue de M dans cette inversion :

La projection stéréographique de la sphère Σ ***sur le plan*** π ***coïncide avec la transformation de cette sphère dans l'inversion*** (P, $2R^2$).

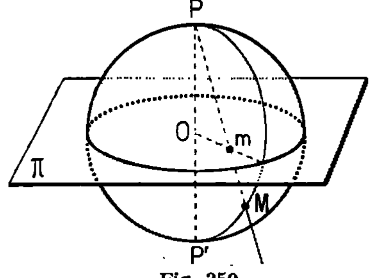


Fig. 359.

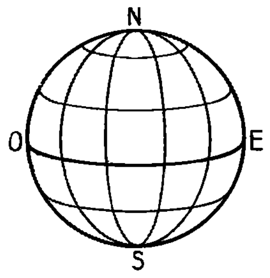


Fig. 360.

Pratiquement on peut remplacer le plan π par tout autre plan perpendiculaire en H à OP. Cela revient à changer le module de l'inversion précédente, c'est-à-dire à remplacer la projection ci-dessus par une projection homothétique (n° 375). On utilise fréquemment le plan tangent en P' diamétralement opposé à P.

Cette transformation fait correspondre à toute figure F tracée sur la sphère Σ une figure f du plan π. En particulier tout cercle Γ de la sphère est transformé en un cercle γ du plan π si Γ ne passe pas par P, en une droite δ du plan π si Γ passe par P. Comme l'inversion conserve les angles il en est de même de la projection stéréographique.

• 415. Application aux cartes géographiques. — Le problème de la cartographie consiste à représenter sur un plan une portion de la surface terrestre supposée sphérique. La projection stéréographique en constitue une solution correcte (ou conforme) car, ne déformant pas les angles, elle conserve au voisinage de chaque point la forme des contours représentés.

Désignons par N et S les pôles Nord et Sud du globe terrestre (fig. 360). Les méridiens sont les grands cercles passant par N et S et les parallèles sont

les cercles d'axe NS. Méridiens et parallèles constituent, sur la sphère terrestre, deux familles de cercles orthogonaux. La projection stéréographique transforme les méridiens en un faisceau de cercles du plan π ayant pour points de bases

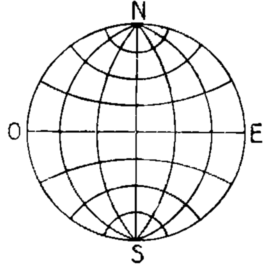


Fig. 361.

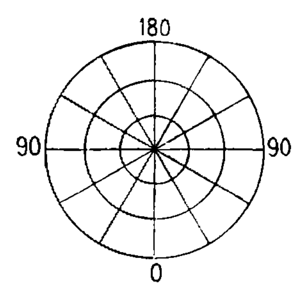


Fig. 362.

les homologues n et s de N et S. Elle transforme les parallèles en une famille de cercles orthogonaux aux précédents, c'est-à-dire en un faisceau de points limites n et s. Ainsi :

1° Si le point P est un point de l'équateur terrestre, celui-ci est transformé en la médiatrice de ns et on obtient la disposition de la figure 361.

2° Si le point P est en S les méridiens forment alors un faisceau de droites issues de n et les parallèles sont représentés par des cercles de centre n. On obtient la disposition de la figure 362, généralement utilisée dans les cartes du pôle Nord ou du pôle Sud.

SUJETS D'EXAMEN

— Projection stéréographique. (*Espagne*, ME)

— Représentation d'un hémisphère terrestre en projection stéréographique. (*Egypte*, ME)

EXERCICES

● **466.** Soient quatre points A, B, C, D sur un axe. A partir des relations de Chasles et de Stewart, déduire par inversion les relations suivantes :

1° $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0.$

2° $\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} - \overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB} + \overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC} - \overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD} = 0.$

● **467.** Dans un quadrilatère convexe inscriptible ABCD on pose AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, AC $= x$ et BD $= y$. Démontrer par inversion que :

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

et calculer x et y en fonction de a, b, c et d.

● **468.** Dans un triangle ABC, on désigne par O(R) le cercle circonscrit, par I (r) le cercle inscrit et on pose OI $= d$.

1° Démontrer que l'inversion (I, $d^2 - R^2$) transforme les trois côtés du triangle ABC en trois cercles de rayon R.

2° En déduire la relation d'Euler : $d^2 = R^2 - 2Rr$.

● **469.** 1° Transformer par inversion les sommets d'un quadrilatère convexe inscriptible ABCD donné en ceux d'un rectangle A'B'C'D' du même plan ou non.

2° Démontrer que si quatre points A, B, C, D du plan vérifient la relation AB.CD = AD.BC leurs inverses A', B', C', D' vérifient la relation analogue A'B'.C'D' = A'D'.B'C'. Déterminer le centre d'inversion pour que le quadrilatère A'B'C'D' soit un losange.

● **470.** 1° Démontrer que toute inversion du plan ou de l'espace transforme en général les sommets du quadrangle harmonique ABCD en ceux d'un quadrangle harmonique A'B'C'D'. En déduire que les cordes A'B' et C'D' sont conjuguées par rapport au cercle A'B'C'D'.

2° Lieu des centres d'inversion ω pour lesquels le quadrilatère A'C'D'B' est un carré.

● **471.** Soit O le centre de la similitude plane directe qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$ et soient I et J les points de la bissectrice intérieure de l'angle AOC tels que : $\overline{OI}^2 = \overline{OJ}^2 = OA.OC$.

1° Nature des quadrangles IJAC et IJBD? Montrer que les cercles IAB et ICD sont tangents et qu'il en est de même des cercles IAD et IBC.

2° Montrer que, dans une inversion de centre I ou J, les homologues de A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme A'B'C'D'.

● **472.** On considère sur une sphère (S) deux cercles non sécants C et C' et soient P et P' les pôles de leurs plans par rapport à (S).

1° Démontrer que la droite PP' coupe (S) en deux points I et J et que tout plan issu de PP' coupe (S) suivant un cercle orthogonal à C et à C'.

2° En déduire que toute inversion de pôle I ou J transforme C et C' en deux cercles coplanaires concentriques.

● **473.** 1° Démontrer que le lieu d'un cercle variable γ orthogonal en deux points donnés A et B à un cercle C est une sphère Σ et que le lieu du centre de γ est un cercle C' formant avec C un anneau orthogonal.

2° Démontrer que tout point ω de l'espace est le centre d'un cercle orthogonal à (C) en deux points. Construire ce cercle.

● **474.** 1° Par un cercle (C) on peut, en général, faire passer une sphère et une seule Σ orthogonale à une sphère donnée (S). Cas d'exception.

2° Etudier les cercles γ orthogonaux à (C) et à (S). Lieu de leurs centres.

● **475.** 1° Montrer que le lieu des points de contact M, avec la sphère Σ de centre O, des sphères S de centre ω passant par A et B et tangentes à Σ, est un cercle (C).

2° Montrer que (C) est aussi le lieu des points de contact des cercles γ passant par A et B et tangents à Σ.

● **476.** Reprendre l'exercice prédédent en supposant que les sphères S et les cercles γ sont tangents en A à une droite donnée Ax.

● **477.** Construire dans le plan, en utilisant une inversion de centre A :

1° Les cercles passant par A orthogonaux ou tangents à ceux cercles donnés C_1 et C_2 (ou à un cercle C et une droite D).

2° Les cercles passant par A, coupant C_1 sous l'angle aigu α_1 et coupant C_2 sous l'angle aigu β.

● **478.** 1° Construire les sphères passant par trois points A, B, C, orthogonales (ou tangentes) à une sphère S donnée.

2° Construire les sphères passant par A et B orthogonales (ou tangentes) à deux sphères données S_1 et S_2.

3° Construire, les sphères passant par A orthogonales (ou tangentes) à trois sphères données S_1, S_2, S_3.

● **479.** On considère sur une sphère Σ deux cercles C_1 et C_2 et on désigne par P_1 et P_2 les pôles de leurs plans par rapport à Σ et par I et J leurs centres d'inversion.

1° Démontrer que les quatre points P_1, P_2, I et J sont alignés et que tout cercle γ de Σ orthogonal à C_1 et C_2 est invariant dans chaque inversion I ou J.

2° En déduire que tout cercle ω tangent à C_1 et à C_2 est invariant dans l'une des inversions I ou J. Enveloppe des plans des cercles ω.

3° Construire les cercles tangents à trois cercles C_1, C_2, C_3 de la sphère Σ.

● **480.** Un cercle ω est dit *isogonal* à plusieurs cercles d'un même plan s'il les coupe sous le même angle aigu.

1° Démontrer que les cercles isogonaux à deux cercles donnés sont les cercles invariants dans une des inversions qui échangent les deux cercles.

2° Les cercles isogonaux à trois cercles donnés forment quatre faisceaux dont les axes radicaux sont les axes d'homothétie des trois cercles et dont les droites des centres passent par le centre radical des trois cercles.

3° Etudier le cas où un des trois cercles précédents est remplacé par une droite.

● **481.** *Cercles tangents à trois cercles donnés.* — On donne dans le plan trois cercles O, O_1 et O_2. A tout point M du cercle O on associe son homologue M_1 dans l'inversion de centre I, qui échange les cercles O et O_1 et son homologue M_2 dans l'inversion de centre J qui échange les cercles O et O_2. Le cercle MM_1M_2 recoupe le cercle O en M′ et la droite MM′ coupe la droite IJ en K.

1° Démontrer que le cercle MM_1M_2 appartient à un faisceau de cercles d'axe radical IJ et que le point K reste fixe lorsque M décrit le cercle O.

2° Soient A et B les points de contact des tangentes au cercle O issues de K. Démontrer que les cercles AA_1A_2 et BB_1B_2 sont tangents aux trois cercles O, O_1 et O_2.

3° Démontrer que les droites AB, A_1B_1 et A_2B_2 sont concourantes en ω centre radical des cercles O, O_1 et O_2. En déduire une autre construction des cercles précédents en montrant que AB passe par le pôle de la droite IJ par rapport au cercle O.

● **482.** Etendre les constructions de l'exercice prédécent à la construction des cercles tangents à deux cercles et à une droite donnés.

● **483.** On donne un cercle fixe O et un point fixe extérieur P. Soit AB un diamètre variable du cercle O. Les droites PA et PB recoupent le cercle O en A′ et B′.

1° Montrer que le cercle PAB passe par un deuxième point fixe I et que la droite A′B′ passe par un point fixe J.

2° Montrer que le cercle PA′B′ est orthogonal au cercle O et qu'il passe par un second point fixe K. Montrer que IO = OK et que (PKOJ) = — 1.

3° Trouver le lieu de l'orthocentre H du triangle PAB et celui du second point d'intersection L des cercles PAB et PA′B′. Montrer que le cercle d'Euler du triangle PAB passe par deux points fixes.

● **484.** On donne un cercle de centre O et de diamètre AB. Un point M décrit la droite D perpendiculaire en H à AB. Les droites MA et MB recoupent le cercle O en P et Q.

1° Montrer que le cercle MPQ est orthogonal au cercle O et à la droite D et qu'il engendre un faisceau de cercles lorsque M varie.

2° Démontrer que la droite PQ passe par un point fixe K et trouver le lieu du point N commun aux cercles MAB et MPQ.

● **485.** On considère un segment fixe AB de milieu J et sa médiatrice Δ :

1° Construire un cercle γ passant par A et tangent à Δ, puis les deux cercles γ_1 et γ_2 orthogonaux en A à γ et tangents à Δ. Le cercle γ recoupe γ_1 en M et γ_2 en P. Démontrer que lorsque γ varie le lieu de M et de P est un cercle du faisceau de points limites A et B.

2° Soit γ_3 le cercle tangent en A à γ et tangent à Δ. Il coupe γ_1 en Q et γ_2 en N. Démontrer que les quadrangles ABMN et ABPQ sont inscriptibles dans deux cercles orthogonaux, puis que le point I est le centre de similitude directe de MP et de QN.

3° Montrer que MN et PQ passent par un même point fixe K lorsque γ varie.

● **486.** On considère une sphère S de centre O, de rayon R, un diamètre fixe AB de cette sphère et le plan P tangent en A à cette sphère.

1° Dans l'inversion de pôle A, de puissance $4R^2$, quelles sont les transformées des sphères Σ tangentes à la sphère S et au plan P?

2° On considère trois sphères Σ tangentes entre elles deux à deux et telles que leurs points de contact avec S soient dans un plan Q passant par B. Montrer que l'angle des plans P et Q est constant et en déduire que le plan Q reste tangent à un cône de révolution.

● **487.** On donne une sphère S de centre O, de rayon R, et un plan diamétral π perpendiculaire au diamètre PP'. On effectue de P la projection stéréographique de S sur π.

1° Soient m et m' deux points du plan π inverses par rapport à la sphère S et images respectives de deux points M et M' de S dans la projection stéréographique. Montrer que les droites MM' et mm' sont perpendiculaires.

2° Soient M et M' deux points de S tels que MM' soit parallèle à PP'. Les projections stéréographiques m et m' de M et M' sont-elles inverses l'une de l'autre par rapport à la sphère S.

● **488.** On considère un cercle fixe O(R) et un diamètre fixe AB de ce cercle. Un point M décrit la droite D perpendiculaire en C à AB. Les tangentes MP' et MQ' au cercle O coupent la tangente Δ en A respectivement en P et Q. Les droites BP' et BQ' coupent la droite Δ en P'' et Q''.

1° Montrer que la droite P'Q' passe par un point fixe et que les points P et Q sont respectivement les milieux des segments AP'' et AQ''.

2° On considère l'inversion (B, $4R^2$). Montrer que le cercle transformé de la droite P'Q' passe par deux points fixes et que le produit $\overline{AP}.\overline{AQ}$ est constant.

3° La droite MO coupe le cercle Γ circonscrit au triangle MPQ au point L et O' désigne le centre du cercle exinscrit au triangle MPQ dans l'angle M. Trouver les lieux géométriques des points O' et L.

4° Montrer que le cercle MPQ reste tangent à une droite fixe, qu'il est invariant dans une inversion de pôle A et en déduire qu'il reste aussi tangent à un cercle fixe.

● **489.** On donne un cercle O et une droite D ni sécants, ni tangents. Soit I l'un des pôles d'inversion transformant O en D, A le point diamétralement opposé à I sur le cercle O, M et M' deux points inverses, M étant sur le cercle O.

1° Montrer qu'il existe un cercle Γ tangent en M à O et en M' à D.

2° La tangente en A au cercle O coupe Γ en P et Q. Montrer que les droites MP et MQ sont conjuguées harmoniques par rapport à MI et MA. En déduire que les droites M'P et M'Q coupent IA en deux points fixes et que le rapport $\frac{AP}{AQ}$ est constant. *(Nancy.)*

● **490.** On considère un cercle fixe C tangent à une droite fixe Δ en un point donné O de cette droite. On étudie les cercles Γ tangents au cercle C en M et à la droite Δ en N.

1° Montrer que la droite MN passe par un point fixe I. En déduire que les cercles Γ restent orthogonaux à un cercle fixe.

2° On effectue l'inversion de pôle O, de puissance $\overline{OI}^2$. Quels sont les transformés de la droite Δ, du cercle C, des cercles Γ?

3° Utiliser cette inversion pour résoudre les questions suivantes :

a) Lieux géométriques des points d'intersection de deux cercles Γ orthogonaux.

b) On considère une droite D passant par O; montrer qu'il existe deux cercles Γ, soient Γ_1 et Γ_2 tangents à la droite D. Les construire. P_1 et P_2 désignant leurs points de contact avec D, montrer que le produit $\overline{OP_1}\,.\,\overline{OP_2}$ est indépendant de la position de D.

c) Les cercles Γ_1 et Γ_2 sont ainsi tangents à trois lignes passant par O : les droites Δ et D et le cercle C. Montrer qu'il existe encore un cercle passant par O et tangent à Γ_1 et Γ_2. Lieu de son centre quand la droite D varie en passant par O. *(Dakar.)*

● **491.** On donne deux cercles Γ et Γ' de rayons R et R', dont la distance des centres est d. Soit γ l'inverse de Γ dans l'inversion (O', R'^2) et γ' l'inverse de Γ' dans l'inversion (O, R^2).

1° Calculer les rayons r et r' des cercles γ et γ' en fonction de R, R' et d. Soient ω et ω' les centres des cercles γ et γ'. Calculer $\overline{O\omega}$ et $\overline{O'\omega'}$ (sens positif de O vers O').

2° Montrer que si $R \neq R'$, la relation $r = r'$ entraîne soit : $d^2 = R^2 + R'^2 - RR'$ (1), soit $d^2 = R^2 + R'^2 + RR'$ (2). Réciproque? Montrer que dans chacune de ces hypothèses les cercles Γ et Γ' se coupent et calculer l'angle OAO' (A étant un de leurs points communs).

2° Montrer que dans chacune des hypothèses (1) ou (2) les cercles γ et γ' sont confondus. Calculer alors le rapport $\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}$, et dire quelle position remarquable occupe le point ω. *(Paris.)*

● **492.** On considère dans un plan un cercle de centre I et un point A non situé sur le cercle. L'inversion de pôle A et de puissance k transforme le cercle I en un cercle de centre M et de rayon r. Montrer que si AM $= d$, le rayon du cercle I est égal à la valeur absolue de $\frac{kr}{d^2 - r^2}$.

2° On donne deux points A et B et sur AB un point C entre A et B. On appelle O, O', O'' les centres des cercles de diamètres respectifs AB, AC et CB. Donner une construction simple d'un cercle I tangent aux trois cercles précédents (on pourra utiliser une inversion de pôle A). On pose AB $= 2a$ et AO' $= x$. Calculer le rayon du cercle I en fonction de a et de x.

3° On suppose dans tout ce qui suit que les cercles O et O' sont fixes et on envisage les cercles Γ qui sont tangents à ces deux cercles. Montrer que les cercles Γ sont orthogonaux à un cercle fixe. Quel est le lieu des points de contact de deux cercles Γ tangents entre eux? Montrer que la corde des contacts d'un cercle Γ avec les cercles O et O' passe par un point fixe. *(Alger.)*

● **493.** On considère dans le plan un cercle C et une droite D. On appelle F le faisceau de cercles dont D est l'axe radical et dont C fait partie. Soit Γ la famille des cercles tangents à D et coupant C sous un angle constant α. En désignant par M le point de contact d'un cercle Γ avec D, on utilisera l'inversion de pôle variable M et dont la puissance est égale à la puissance de M par rapport au cercle C.

1° Construire Γ connaissant M et α. Discuter. Nombre de solutions.

2° Montrer que l'inversion considérée transforme chaque cercle Γ en l'une ou l'autre de deux droites fixes parallèles à D.

3° Montrer que si un cercle Γ coupe un cercle C_1 du faisceau F sous un angle α_1 tous les cercles Γ coupent C_1 sous un angle constant. En déduire les enveloppes, autres que D, des cercles Γ.

4° On considère maintenant une droite fixe Δ parallèle à D et qui coupe C en deux points A et B. On appelle A' et B' les seconds points d'intersection des sécantes MA et MB avec le cercle C, M étant toujours un point variable de D. Trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle MA'B'. *(Grenoble.)*

● **494.** Dans un plan on considère les points A, C, B, D alignés dans cet ordre sur une droite Δ. On envisage les couples de cercles (AD) et (BC); (AC) et (BD); (AB) et (CD), la notation (AB) désignant le cercle de diamètre AB. Soient I, J, K les pieds respectifs sur Δ des axes radicaux des cercles des trois couples.

1° Montrer que I, J, K fournissent les centres d'homothétie des couples de cercles. Indiquer la nature de chaque homothétie.

2° Soient O et O' les centres de (AB) et (CD), P un point commun à ces deux cercles. Placer les droites PI, PJ, PK par rapport au triangle POO'.

3° On suppose dans la suite que (AB) et (CD) sont orthogonaux. On étudie les cercles Γ tangents à (AC) et (BD) passant par P et les cercles Γ' tangents à (AD) et (BC) passant par P, ces cercles étant distincts de (AB) et (CD). Quelles sont les tangentes en P aux cercles Γ et Γ'? Montrer que ces cercles sont tangents à Δ et que les points A_1, B_1, C_1, D_1 communs à ces cercles, autres que P, sont les points de rencontre de (AB) et (CD) avec un cercle Σ orthogonal à (AB) et (CD).

4° Trouver l'enveloppe des cercles Γ et Γ' lorsque, A et B restant fixes, le couple CD varie. *(Egypte.)*

● **495.** Dans un plan on donne un cercle (Γ) de centre O et de rayon R. On désigne par AB un diamètre fixe de ce cercle et par (Δ) la tangente en B à (Γ).

1° M étant un point donné sur (Γ), montrer que, parmi tous les cercles tangents en M à (Γ), il en existe un et un seul (γ) qui soit tangent à (Δ). Déterminer son point de contact P avec (Δ). Montrer que la droite MP passe par un point fixe lorsque M décrit (Γ); en déduire une construction simple du cercle (γ). Montrer que tous les cercles (γ) sont orthogonaux à un cercle fixe (Ω) que l'on caractérisera.

2° Montrer qu'il existe un centre d'inversion tranformant tous les cercles (γ) en cercles égaux. Retrouver à l'aide de cette inversion la construction du cercle (γ) tangent en M à (Γ).

Construire les cercles (γ) passant par un point donné N du plan. Discuter suivant la position de N dans le plan.

Trouver le lieu géométrique du point N pour que les cercles (γ) passant par N soient tangents entre eux en N.

Lieu géométrique des centres des inversions tranformant le cercle (Γ) et la droite (Δ) en cercles égaux. *(Nancy.)*

● **496.** *Invariant relatif à deux cercles du plan.* Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les puissances du centre d'inversion O par rapport aux cercles donnés $\omega(R)$ et $\omega(R')$ tels que $\omega\omega' = d$.

1° Démontrer que $R^2 + R'^2 - d^2 = 2\,\overrightarrow{O\omega}.\overrightarrow{O\omega'} - \mathcal{P} - \mathcal{P}'$ puis que l'expression $\lambda = \frac{[R^2 + R'^2 - d^2]}{2RR'}$ reste invariante dans l'inversion (O, k) si on a $\mathcal{P}.\mathcal{P}' \neq 0$.

Que représente λ lorsque les cercles sont sécants?

2° Si $\mathcal{P} \neq 0$ et $\mathcal{P}' = 0$, les cercles ω et ω' sont transformés en un cercle ω_1 (R_1) et en une droite Δ. Soit H_1 la projection de ω_1 sur Δ. Démontrer que $\frac{\omega_1 H_1}{R_1} = \lambda$.

● **497.** On désigne par $\mathcal{P}(O)$, $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ les puissances des points O, A, B, par rapport au cercle donné $\omega(R)$.

1° Démontrer que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(O) + \overline{OA}^2 - 2\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{O\omega}$ et calculer ce que devient *la puissance réduite* $\frac{\mathcal{P}(A)}{2R}$ dans l'inversion (O, k).

2° Démontrer que lorsque $\mathcal{P}$ (O) n'est pas nul, l'expression $\lambda = \frac{\mathcal{P}(A).\mathcal{P}(B)}{AB^2.R^2}$ reste invariante dans l'inversion précédente.

3° Etudier ce que deviennent la puissance réduite et l'expression λ lorsque O est sur le cercle ω (R).

● **498.** On considère dans le plan le produit (T) de l'inversion (O, k) qui tranforme M en M_1 par l'inversion (O', k') qui tranforme M_1 en M'.

1° Montrer que le cercle ω passant par M, M_1 et M' est invariant dans (T) et appartient à un faisceau de cercles (Φ) d'axe radical OO' dont on déterminera la droite des centres Δ. Démontrer que (T) admet deux points doubles, points de base ou points limites du faisceau (Φ).

2° Soient MN' et M'N les cordes du cercle ω parallèles à OO'. Les droites MN et M'N' coupent OO' en I et J'. Montrer que les quadrangles $MM_1O'I$ et $M'M_1OJ'$ sont inscriptibles et que les points I et J' sont fixes. Comparer les triangles IOM et J'M'O'.

3° Soit $\mathcal{P}$ la puissance de I et de J' par rapport aux cercles ω. Démontrer que (T) est le produit de l'inversion (I, $\mathcal{P}$) par la symétrie-droite Δ ou le produit de la symétrie-droite Δ par l'inversion (J', $\mathcal{P}$).

● **499.** Déduire de l'exercice précédent (3°) que dans le plan

1° Un produit d'inversions en nombre impair est équivalent au produit d'un déplacement par une inversion ou à une similitude inverse.

2° Un produit d'inversions en nombre pair est équivalent au produit d'un anti-déplacement par une inversion ou à une similitude directe.

● **500.** 1° Etudier comme au n° 498 le produit de deux inversions dans l'espace et montrer qu'il est équivalent au produit d'une symétrie plan par une inversion.

2° En déduire que dans l'espace un produit d'inversions est toujours équivalent au produit d'un déplacement par une inversion positive ou négative, à moins qu'il se réduise à une similitude directe ou inverse.

● **501.** On appelle *transposition circulaire* de points doubles A et B et de centre I milieu de AB le produit commutatif ($\mathcal{T}$) de l'inversion (I, $\overline{IA}^2$) par la symétrie-droite d'axe AB.

1° Montrer que ($\mathcal{T}$) est réciproque, que deux points homologues M et M' forment avec A et B un quadrangle harmonique. Etudier les cercles invariants.

2° Soient P et P' deux points homologues. Montrer que les triangles IP'M' et IMP sont directement semblables. Construire I connaissant M, P, M' et P'.

3° Montrer que pour construire A et B connaissant I, M et M', il suffit de couper la bissectrice intérieure de l'angle MIM' par le cercle passant par M et M' et centré sur la bissectrice extérieure de MIM'. En déduire par analogie la construction des points M et M' connaissant A et B et le milieu J de MM'.

● **502.** Déterminer les transpositions circulaires échangeant deux cercles ou un cercle et une droite donnés. Enveloppe de leurs axes et lieu de leurs points doubles.

2° Soit A' B' C' une transversale au triangle ABC. Montrer qu'il existe une transposition circulaire échangeant A,B,C avec A',B',C'.

3° Démontrer que si $\overline{OO'}^2 = k + k'$ le produit des inversions (O, k) et (O', k') est une transposition circulaire. Déterminer ses points doubles (deux cas).

● **503.** Une *transformation circulaire directe* ($\mathcal{H}$) dans le plan est le produit d'une transposition circulaire de centre I par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ'}$. Les points I et J' sont les points limites et le milieu O de IJ' est le point central.

1° Etudier les tranformés par ($\mathcal{H}$) d'une droite et d'un cercle. Soient A' et M' les homologues de A et M. Montrer que les triangles IAM et J'M'A' sont directement semblables.

2° La tranformation ($\mathcal{H}$) est aussi le produit de la symétrie-point de centre O par une transposition circulaire de centre J'. En déduire d'existence de deux points doubles E et F dans la transformation ($\mathcal{H}$).On construit le triangle AA'S directement semblable au triangle AOJ'. Démontrer que le quadrangle ASEF est harmonique et en déduire une construction de E et F. Ces points peuvent ils être confondus?

3° Démontrer (cf. exercice 442) que les arcs de cercle $\overset{\frown}{EMF}$ et $\overset{\frown}{EM'F}$ font un angle constant et que le birapport $\frac{M'E}{M'F} : \frac{ME}{MF}$ est constant.

● **504.** On appelle *transmuée par l'inversion* (I) d'une transformation donnée (T) le produit des trois tranformations (I) × (T) × (I). Démontrer que dans le plan :

1° La transmuée d'une inversion est une inversion ou une symétrie-droite.

2° La transmuée d'une symétrie-point est une transposition circulaire.

3° La transmuée d'une similitude plane directe est une tranformation circulaire directe (cf. exercice n° 503). Etudier le cas où cette similitude est une homothétie, une rotation ou une translation.

● **505.** *Une droite focale d'un cercle* Γ de centre O et de rayon R est une droite Δ perpendiculaire en A à un diamètre de ce cercle et faisant avec le plan P de ce cercle un angle aigu α tel que OA = R cos α.

Désignons par M un point quelconque de Δ, par H sa projection sur le plan P, par B et B' les extrémités du diamètre de Γ passant par H, par K la projection de A sur BB' et par N et N' les intersections de OA avec les tangentes en B et B' au cercle Γ.

1° Démontrer que AM = BN, que BM = AN et que le tétraèdre ABMN admet pour axe de symétrie la droite IJ qui joint les milieux de AB et de MN. En déduire que tout plan (π) issu de Δ coupe Γ sous l'angle α et coupe le plan P suivant une droite δ faisant des angles égaux avec Δ et Γ. Démontrer que MB + MB' = NN', |MB — MB'| = 2 OA et que le trièdre MABB' admet le plan MAK pour plan de symétrie.

2° Montrer que le produit de l'inversion (M, MB.MB') par la symétrie par rapport au plan MAK laisse Γ et Δ invariants. En déduire que toute sphère S passant par Γ coupe Δ sous l'angle α et que l'intersection γ d'une sphère S et d'un plan (π) issu de Δ est un cercle coupant Δ et Γ sous un même angle. Etablir l'existence d'une infinité de cercles γ coupant orthogonalement Γ et Δ en deux points chacun.

3° Démontrer que la somme des distances de B et B' à Δ est égale à 2R et que le rapport des distances de B à Δ et à la polaire de A par rapport à Γ est égal à cos α.

4° Soit ω le point de MB homologue de O dans la symétrie d'axe IJ. Démontrer que ωA = R, ωB = OA et que l'angle MAω est droit. Le cercle de centre ω et de rayon OA, situé dans le plan MAB, engendre lorsque M varie sur Δ, une surface de révolution d'axe Δ, appelée *tore*. Démontrer qu'il existe sur ce tore deux familles de cercles égaux à Γ.

● **506.** On tranforme par inversion un cercle et une de ses droites focales. On obtient une figure formée de deux cercles Γ et Γ' qui sont dits *paratactiques*.

1° Démontrer que toute sphère passant par l'un de ces cercles coupe l'autre sous un angle aigu constant (angle de parataxie).

2° Montrer que l'intersection d'une sphère S passant par Γ et d'une sphère S' passant par Γ' est un cercle γ coupant Γ et Γ' sous un même angle.

3° Etablir qu'il existe une infinité de cercles γ à la fois orthogonaux à Γ et à Γ' en deux points chacun.

TROISIÈME PARTIE

CONIQUES

INTRODUCTION(1)

● **416. Définition générale des coniques.** — ***On appelle « section conique » ou plus simplement « conique » toute section plane d'un cône de révolution.***

Les coniques constituent une famille de courbes qui comprend le *cercle* ainsi que la *parabole* et l'*hyperbole équilatère* rencontrées en Algèbre comme courbes représentatives des fonctions $y = ax^2$ et $y = \frac{a}{x}$.

L'étude des coniques peut s'effectuer, dans l'espace, sur le cône générateur. C'est ainsi que leur étude fut entreprise par les géomètres grecs de l'école de Platon et en particulier par Apollonius (IIIe siècle av. J.-C.). Depuis la Hire (1685) on préfère effectuer leur étude directe dans le plan.

Bien que la méthode utilisée par la Hire fasse appel à des définitions différentes suivant le genre de la conique étudiée, elle reste à bien des égards préférable pour des débutants et c'est par elle que nous commencerons notre étude. Nous allons d'abord montrer, comment on peut déduire de la définition ci-dessus, les différentes définitions dans le plan que nous utiliserons.

● **417. Propriété des sections planes d'un cône de révolution.** — Soit à étudier la section Γ d'un cône de révolution de sommet S par un plan P ne passant pas par le sommet S

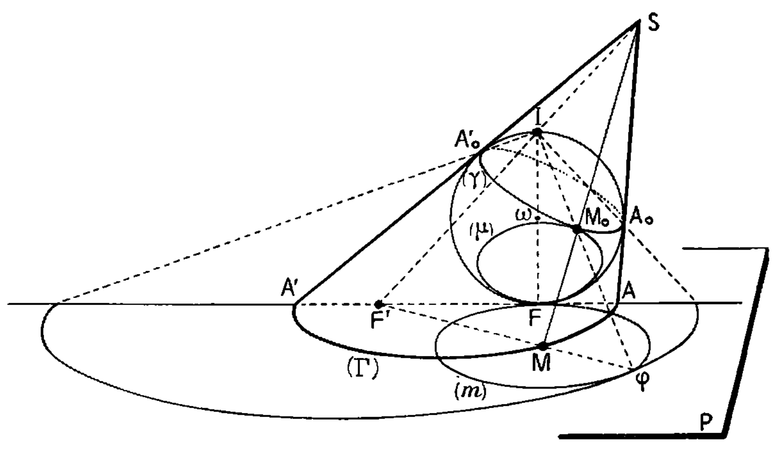


Fig. 363.

(fig. 363). Il existe au moins une sphère, inscrite dans le cône S et tangente au plan P. En effet si ff' désigne le diamètre perpendiculaire au plan P d'une sphère quelconque inscrite

(1) L'étude de cette introduction n'est pas nécessaire pour la suite du cours.

dans le cône S, l'une au moins f des extrémités de ce diamètre n'est pas située sur S. La droite Sf coupe le plan P en F et l'homothétie de centre S, qui transforme f en F, transforme la sphère de diamètre ff' en une sphère ω tangente en F au plan P. Désignons par γ le cercle de contact du cône S et de la sphère ω et par I le point diamétralement opposé à F sur la sphère ω.

Le plan P est le lieu des centres des sphères orthogonales à la sphère ω suivant un cercle passant par F. Le cône S est le lieu des centres des sphères orthogonales à la sphère ω suivant un cercle tangent au cercle γ. Il en résulte que :

La conique Γ, *intersection du plan* P *et du cône* S, *est le lieu géométrique des centres* M *des sphères* (M) *orthogonales à la sphère* ω *suivant un cercle* μ *passant par* F *et tangent à* γ.

Transformons dans l'inversion (I, $\overline{IF}^2$), qui laisse invariante toute sphère (M), les conditions imposées à cette sphère. Dans cette inversion l'homologue de la sphère ω est le plan P; l'homologue du cercle γ est un cercle (F') ou une droite (D) du plan P, ne passant pas par F. L'homologue du cercle μ est le grand cercle (m), situé dans le plan P, de la sphère (M) correspondante. Les sphères (M) sont donc les sphères admettant pour grands cercles, les cercles (m) du plan P, passant par F et tangents au cercle (F') ou à la droite (D) :

***La conique* Γ, *intersection du cône* S *et du plan* P, *est le lieu des centres des cercles passant par* F *et tangents au cercle* (F') *ou à la droite* (D).**

● **418. Réciproque.** — Considérons dans un plan P le lieu Γ des centres M des cercles (m) passant par un point donné F et tangents à un cercle donné (F') ou à une droite donnée (D) ne passant pas par F. Soit IF un segment quelconque perpendiculaire en F au plan P. L'inversion (I, $\overline{IF}^2$) transforme le plan P en une sphère ω de diamètre IF. Elle transforme le cercle (F') ou la droite (D) en un cercle γ de la sphère ω ne passant pas par F. Elle transforme enfin la famille des cercles (m) en la famille des cercles (μ) de la sphère ω, passant par F et tangents au cercle γ.

Or l'inversion conserve toute sphère (M) de grand cercle (m). La famille des sphères (M) est donc celle des sphères orthogonales à la sphère ω suivant les cercles (μ) de cette sphère passant par F et tangents au cercle γ. Les centres de ces sphères sont donc les points communs au plan P tangent en F à la sphère ω et au cône de révolution S circonscrit à la sphère ω suivant le cercle γ. Autrement dit :

***La courbe* Γ *est la conique intersection du plan* P *et du cône de révolution* S.**

La longueur FI étant arbitraire on peut ainsi déterminer une infinité de cônes S.

● **419. Genre des coniques.** — Une conique (Γ) du plan P est donc définie par la donnée du point fixe F et d'un cercle F' ($2a$) ou d'une droite D ne passant pas par F.

1° Supposons (fig. 364) le point fixe F intérieur au cercle F' ($2a$). Pour qu'un point M soit le centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle F' il faut et il suffit que le point M soit situé sur un rayon F'φ de ce cercle et que l'on ait :

$$MF = M\varphi = F'\varphi - F'M = 2a - MF'.$$

Donc que : $$\boxed{MF + MF' = 2a}$$

Dans ce cas la conique est appelée *ellipse* et se trouve tout entière à l'intérieur du cercle F' :

L'ellipse est le lieu géométrique des points d'un plan dont la somme des distances à deux points fixes de ce plan est constante.

Notons que si F est confondu avec le centre du cercle F', l'ellipse dégénère en un cercle de centre F. Cela correspond au cas où le plan P est perpendiculaire à l'axe du cône S.

2° Supposons (fig. 365) le point fixe F extérieur au cercle F' ($2a$). Pour qu'un point M soit le centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle F', il faut et il suffit que M soit situé sur un des prolongements d'un rayon F'φ de ce cercle et que l'on ait $MF = M\varphi = MF' \pm F'\varphi = MF' \pm 2a$, donc que :

$$MF' - MF = 2a \quad \text{ou} \quad MF - MF' = 2a.$$

La courbe qui se compose de deux branches distinctes correspondant à l'une ou à l'autre de ces deux relations est appelée *hyperbole*. Comme on a :

$$|MF - MF'| = 2a.$$

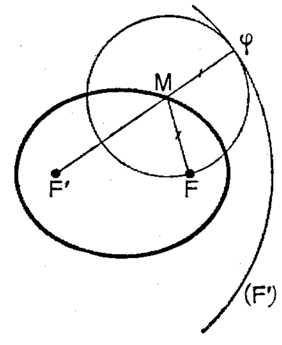


Fig. 364.

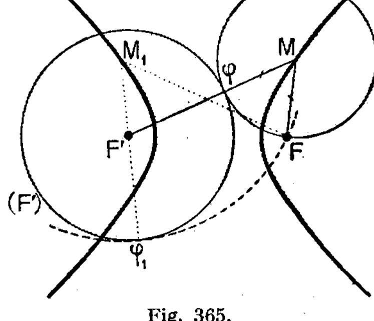


Fig. 365.

L'hyperbole est le lieu géométrique des points d'un plan dont la différence des distances à deux points fixes de ce plan est constante.

3° Supposons (fig. 366) que la conique Γ soit définie par une droite D et un point fixe extérieur F (c'est le cas où le centre du cercle F' est rejeté à l'infini). Pour qu'un point M soit le centre d'un cercle passant par F et tangent en φ à la droite D il faut et il suffit que

$$MF = M\varphi$$

La courbe obtenue est appelée *parabole* :

La parabole est le lieu géométrique des points d'un plan équidistants d'un point fixe* F *et d'une droite fixe* D *de ce plan.

C'est en partant des trois définitions ci-dessus que nous aborderons l'étude des trois coniques : ellipse, hyperbole et parabole.

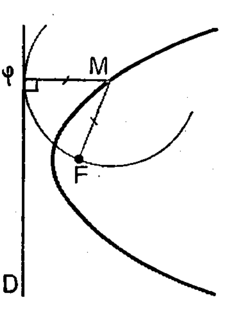


Fig. 366

DIX-SEPTIÈME LEÇON

ELLIPSE

• **420. Définition.** — ***L'ellipse est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes* F *et* F′ *est constante et égale à une longueur* 2*a*.**

Les points F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse (fig. 367). Les segments MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M de cette ellipse. Ils vérifient la relation :

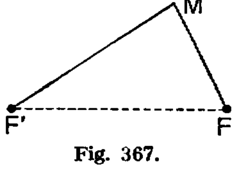


Fig. 367.

$$MF + MF' = 2a$$

La distance $FF' = 2c$ est la *distance focale.* L'inégalité $MF + MF' > FF'$ entraîne $a > c$. Le rapport $\frac{c}{a} = e$, inférieur à l'unité est l'*excentricité* de l'ellipse. Si $c = 0$, les foyers F et F′ sont confondus et l'ellipse est un cercle de rayon a. Si $c = a$ l'ellipse se réduit au segment FF′. Toute homothétie positive de rapport k transforme le triangle MFF′ en un triangle semblable $M_1F_1F_1'$ tel que : $M_1F_1 + M_1F'_1 = 2ka$ et $F_1 F'_1 = 2kc$. Le lieu du point M_1 est donc une ellipse d'excentricité e :

Toute courbe semblable à une ellipse est une ellipse de même excentricité.

• **421. Tracé continu de l'ellipse.** — Fabriquons un anneau de fil fin et inextensible de longueur l, entourant deux épingles (ou les pointes sèches d'un compas) piquées en F et F′ (fig. 368). Si nous maintenons tendu le fil de l'anneau, à l'aide de la pointe du crayon placée en M, cette pointe en se déplaçant décrit d'un trait continu une ellipse de foyers F et F′ telle que $MF + MF' = l - FF'$.

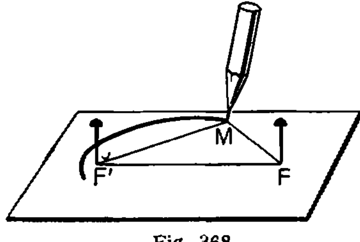


Fig. 368.

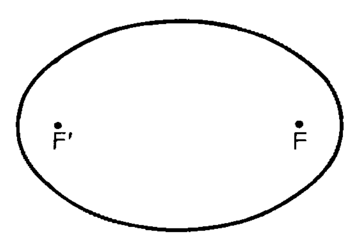


Fig. 369.

En répétant ce tracé avec différentes valeurs pour FF′, on voit que l'ellipse est une courbe de forme ovale (fig. 369) qui ressemble à un cercle d'autant plus aplati que l'excentricité est voisine de 1.

• **422. Construction par points d'une ellipse.** — Pour construire géométriquement des points appartenant à une ellipse de foyers F et F' il suffit de prendre (fig. 370) les intersections M et M' de deux cercles de centres F et F' et de rayons respectifs ρ et ρ' tels que : $\rho + \rho' = 2a$. Ces cercles se coupent effectivement si $|\rho - \rho'| \leq FF' = 2c$, c'est-à-dire si ρ et ρ' sont compris entre $a - c$ et $a + c$. En faisant varier ρ entre ces deux limites, on obtient autant de points de l'ellipse qu'on le juge désirable. Il suffit de les joindre par une courbe continue que l'on tracera avec le plus de soin possible.

• **423. Symétries de l'ellipse.** — Désignons (fig. 371) par $x'x$ la droite FF', par $y'y$ la médiatrice du segment FF' et par O le milieu de FF'. Si un point M appartient à l'ellipse, il en est de même des points M', M_1 et M'_1 respectivement symétriques de M par rapport à $x'x$, à $y'y$ et au point O. L'ellipse admet donc les droites $x'x$ et $y'y$ pour axes de symétrie et le point O pour centre de symétrie :

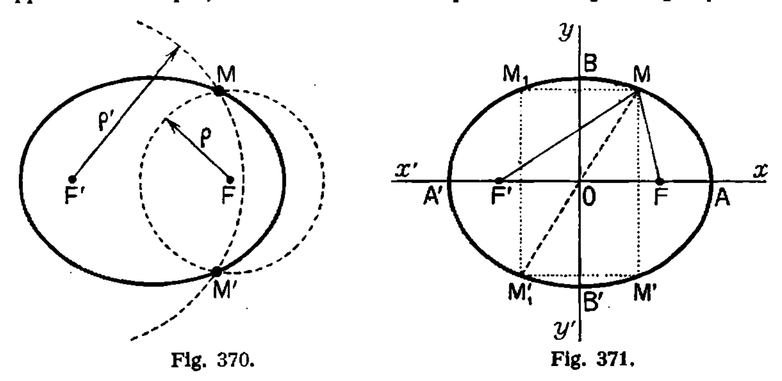


Fig. 370. Fig. 371.

L'axe de symétrie $x'x$ est appelé axe focal, l'axe de symétrie $y'y$ axe non focal et le point O centre de l'ellipse.

Deux points tels que M et M'_1, symétriques par rapport à O, sont dits *diamétralement opposés sur l'ellipse* et le segment MM'_1 est appelé *diamètre* de l'ellipse.

• **424. Sommets et longueurs des axes.** — Les sommets d'une ellipse sont les points situés sur les axes de symétrie.

Si un point M de la droite $x'x$ appartient à l'ellipse (fig. 372), il ne peut être situé entre F et F' car on aurait : $MF + MF' = FF' = 2c < 2a$.

Il appartient donc à l'un des prolongements du segment FF' et on a :

$$MF + MF' = 2\,MO = 2a.$$

L'ellipse admet donc pour sommets les points A et A' de l'axe $x'x$ tels que $OA = OA' = a$.

Tout point de l'axe $y'y$ étant équidistant de F et de F', les intersections B et B' de cet axe avec le cercle de centre F et de rayon a sont des sommets de l'ellipse. Posons $OB = OB' = b$. La relation $\overline{OB}^2 = \overline{FB}^2 - \overline{OF}^2$ donne :

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

La longueur AA′ = $2a$ *est le grand axe de l'ellipse et la longueur* BB′ = $2b$ *est le petit axe de l'ellipse.*

Une ellipse est définie par ses quatre sommets **A, A′, B *et* B′.**

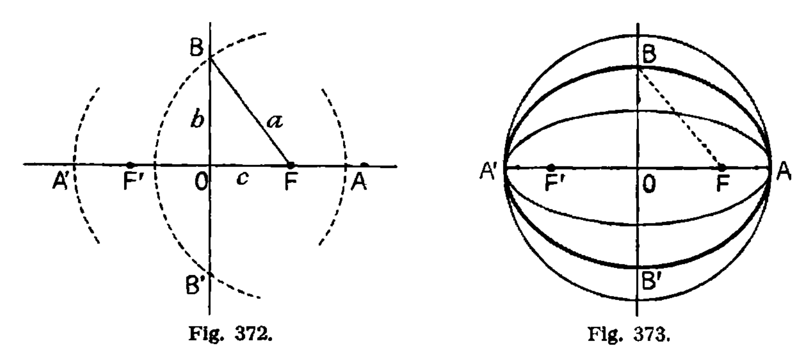


Fig. 372. Fig. 373.

La longueur $2a$ est la longueur AA′ et les foyers F et F′ sont les intersections de l'axe focal AA′ par le cercle de centre B et de rayon a.

• **425. Etude de la forme de l'ellipse.** — Donnons nous (fig. 373) le grand axe AA′ = $2a$ d'une ellipse et faisons varier OF = c de 0 à a. La longueur OB = b varie de a à 0. L'ellipse initialement confondue avec le cercle de diamètre AA′, s'aplatit de plus en plus tandis que ses foyers F et F′ décrivent les segments OA et OA′. Finalement lorsque F et F′ viennent se confondre avec A et A′, l'ellipse se réduit au segment AA′.

Notons que le rapport $\frac{a-b}{a}$, qui varie de 0 à 1, est parfois appelé *aplatissement de l'ellipse.*

• **426. Intérieur et extérieur de l'ellipse.** — Lorsqu'un point M (fig. 374) parcourt une demi-droite F′λ issue du foyer F′, la somme MF + MF′ croît depuis la valeur $2c$ jusqu'à une valeur infiniment grande. En effet l'inégalité $M_1F < M_1M_2 + M_2F$ entraîne $M_1F + M_1F' < M_2F + M_2F'$. Cette somme prend une fois et une seule la valeur $2a$. Il existe donc sur la demi-droite F′λ un point M et un seul appartenant à l'ellipse. Il en résulte que :

L'ellipse est une courbe fermée qui partage le plan en deux régions.

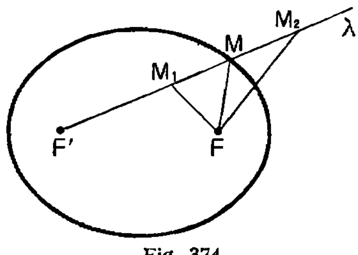


Fig. 374.

La région qui contient les foyers est l'*intérieur de l'ellipse*, et l'autre l'*extérieur de l'ellipse*. Tout point M_1 situé sur le segment F′M est intérieur à l'ellipse. D'après ce qui précède on a :

$$M_1F + M_1F' < MF + MF' = 2a.$$

Donc : $\boxed{M_1F + M_1F' < 2a.}$

Tout point M_2 situé sur le prolon-

gement Mλ de F'M est extérieur et on a : $M_2F + M_2F' > MF + MF'$.

Donc : $\boxed{M_2F + M_2F' > 2a.}$

Réciproquement, si $M_1F + M_1F' < 2a$ le point M_1 ne peut être ni extérieur ni situé sur l'ellipse ce qui entraînerait $M_1F + M_1F' \geqq 2a$. C'est donc un point intérieur. De même la relation $M_2F + M_2F' > 2a$ caractérise les points extérieurs. Donc :

Un point donné est intérieur ou extérieur à une ellipse donnée suivant que la somme de ses distances aux foyers de cette ellipse est inférieure ou supérieure au grand axe de l'ellipse.

• **427. Théorème fondamental.** — ***L'ellipse est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à un cercle fixe et passant par un point fixe intérieur à ce cercle.***

1° Considérons un point M d'une ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$ (fig. 375) et prolongeons le rayon vecteur F'M d'une longueur $M\varphi = MF$. Nous obtenons : $F'\varphi = MF + MF' = 2a$.

Le point φ est donc sur le cercle de centre F' et de rayon $2a$ qui admet le foyer F pour point intérieur. Le cercle de centre M passant par F est tangent en φ au cercle précédent.

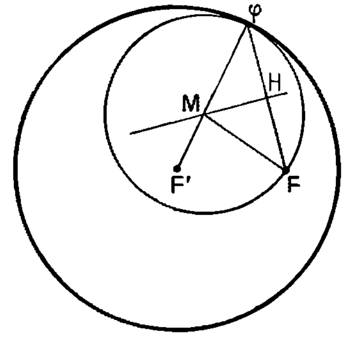


Fig. 375.

2° Réciproquement considérons un cercle de centre F' et de rayon $2a$, un point fixe intérieur F et un cercle quelconque de centre M, passant par F et tangent en φ au cercle F'. Les points F', M et φ sont alignés dans cet ordre et comme $MF = M\varphi$ on a :

$$MF + MF' = M\varphi + MF' = F'\varphi = 2a.$$

Le point M appartient donc à l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$.

• **428. Cercles directeurs.** — ***On appelle cercles directeurs d'une ellipse de foyers* F *et* F' *et de grand axe* $2a$ *les cercles de centres respectifs* F *et* F' *et de rayon* $2a$.**

D'après le théorème précédent on voit que :

L'ellipse est le lieu des centres des cercles passant par un foyer et tangents au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

On appelle *cercle principal de l'ellipse* le cercle ayant pour diamètre le grand axe AA' de cette ellipse (fig. 373). C'est le cercle de centre O et de rayon a. Comme O est le milieu de FF' on voit que :

***Le cercle principal est l'homologue du cercle directeur* F' ($2a$) *dans l'homothétie* (F, $^1/_2$).**

Notons que cette homothétie transforme le cercle de centre M tangent en φ au cercle F' en un cercle de diamètre MF tangent au cercle principal.

● **429. Deuxième construction par points de l'ellipse.** — L'intersection M d'un rayon quelconque F'φ du cercle directeur F' et de la médiatrice HM du segment Fφ, est le centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle F' (fig. 375). Le point M est donc un point de l'ellipse. En répétant cette construction on obtient un nouveau tracé par points de l'ellipse.

● **430. Intersection de l'ellipse et d'une droite.** — Les points communs à l'ellipse de foyers F et F' et à une droite donnée Δ (fig. 376) sont les centres des cercles tangents au cercle directeur F', passant par F et par le point F_1 symétrique de F par rapport à Δ. Nous sommes donc ramenés à construire les cercles passant par F et F_1 et tangents au cercle directeur F'. Cette construction a été étudiée au paragraphe n° 326. On mène par F et F_1 un cercle auxiliaire

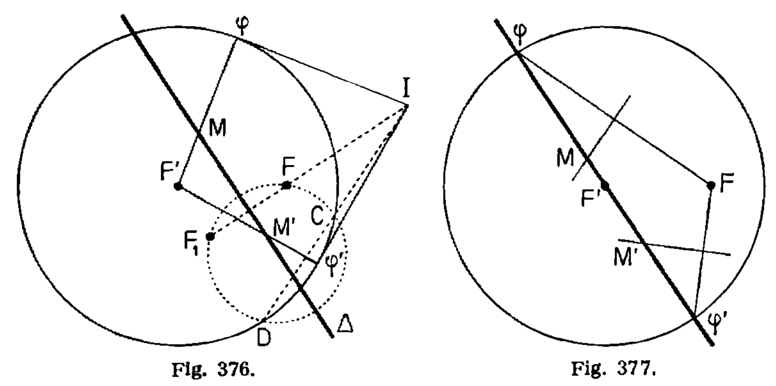


Fig. 376. Fig. 377.

coupant le cercle F' en C et D, puis par le point I commun à FF_1 et à CD les tangentes Iφ et Iφ' au cercle F'. Les points cherchés sont les intersections M et M' de Δ avec F'φ et F'φ'.

Si la droite Δ passe par F', les points φ et φ' sont les intersections de Δ et du cercle F' (fig. 377). Les points M et M' sont les intersections de Δ avec les médiatrices de Fφ et Fφ'.

Discussion. — Les points M et M' existent si F_1 est intérieur au cercle F' (n° 326). Ils sont confondus si F_1 est sur le cercle F' et n'existent pas si F_1 est extérieur au cercle F'. L'homothétie (F, ½) qui transforme F_1 en la projection H de F sur Δ et qui transforme le cercle F' en le cercle principal, montre que :

Une ellipse et une droite Δ ont deux points communs distincts si la projection H *du foyer* F *sur* Δ *est intérieure au cercle principal, un seul point commun si le point* H *appartient au cercle principal et pas de point commun si le point* H *est extérieur au cercle principal.*

TANGENTES A L'ELLIPSE

● **431. Existence de la tangente à l'ellipse.** — Soient M un point donné et M' un point quelconque de l'ellipse de foyers F et F' (fig. 378). Les points M et M' sont les centres de deux cercles passant par F et respectivement tangents en φ et φ' au cercle directeur F'. Ces cercles se recoupent en un point F_1 symé-

trique de F par rapport à la sécante MM'. La droite FF_1 et les tangentes en φ et φ' au cercle F' sont concourantes au point I centre radical des cercles M, M' et F'. Lorsque le point M', se déplaçant sur l'ellipse vient se confondre avec le point M, le point φ' vient en φ. Il en est de même de I, pôle de φφ' par rapport au cercle directeur F'. La relation $\overline{IF} \cdot \overline{IF_1} = \overline{I\varphi}^2$ montre que IF_1 tend vers zéro

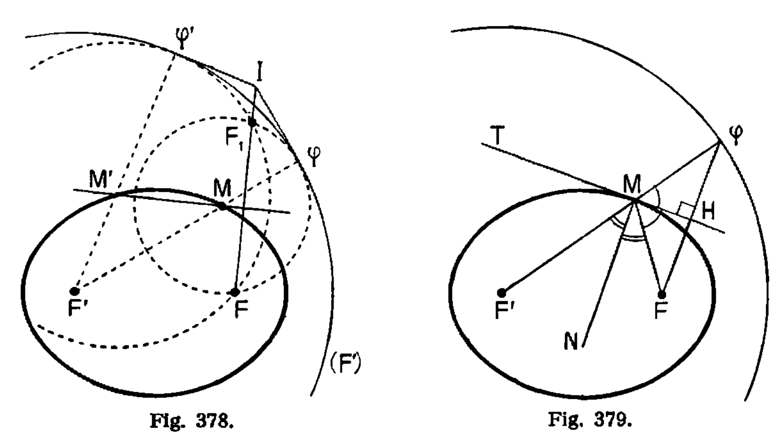


Fig. 378. Fig. 379.

et que le point F_1 vient également en φ. La droite MM' médiatrice du segment FF_1, pivote autour de M et admet une position limite MT, médiatrice du segment Fφ (fig. 379). *Cette médiatrice de* Fφ *est la tangente en* M *à l'ellipse.* Le triangle MFφ étant isocèle cette tangente est bissectrice intérieure de l'angle FMφ et par suite bissectrice extérieure de l'angle FMF' :

En tout point d'une ellipse il existe une tangente qui est bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs de ce point.

En particulier la tangente en un sommet de l'ellipse est la perpendiculaire à l'axe de l'ellipse qui passe par ce sommet.

La droite MN perpendiculaire en M à la tangente MT est la *normale* en M à l'ellipse :

La normale en un point d'une ellipse est la bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs.

● **432. Corollaire.** — Soit φ un point quelconque du cercle directeur F'. La médiatrice du segment Fφ coupe le rayon F'φ en un point M de l'ellipse (nº 429). D'après ce qui précède la tangente en M est précisément la médiatrice de Fφ. La construction du nº 429 donne donc simultanément un point de l'ellipse et la tangente en ce point. Notons que :

Le symétrique d'un foyer par rapport à une tangente à l'ellipse, le point de contact de cette tangente et l'autre foyer sont trois points alignés.

● **433. Propriétés de la tangente.** — 1º Il résulte des paragraphes précédents que, pour qu'une droite Δ soit tangente à l'ellipse (fig. 380), il faut et il suffit qu'elle soit médiatrice d'un segment Fφ joignant le foyer F à un point φ du cercle directeur F'. Autrement dit :

Pour qu'une droite soit tangente à une ellipse, il faut et il suffit que le symétrique d'un foyer par rapport à cette droite appartienne au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

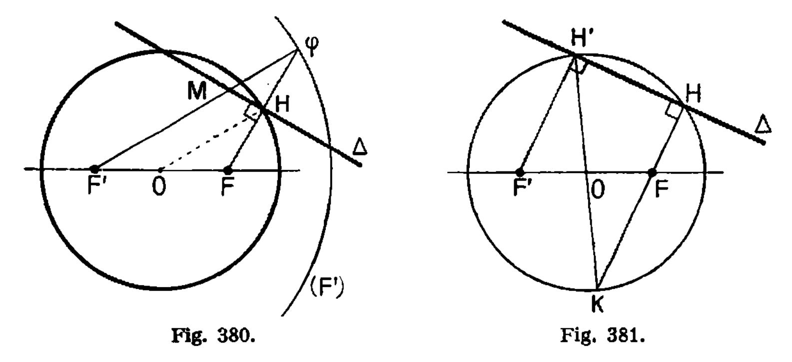


Fig. 380. Fig. 381.

2° Le lieu de φ étant le cercle directeur F', l'homothétie (F, ½) montre que le lieu du milieu H de Fφ est le cercle principal (n° 428). Donc :

Le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes à une ellipse est le cercle principal de cette ellipse.

De la discussion du n° 430 il résulte qu'une tangente à l'ellipse n'a pas, en dehors de son point de contact, d'autre point commun avec l'ellipse et que :

Une droite donnée est tangente, sécante ou extérieure à une ellipse suivant que la projection d'un foyer sur cette droite est située sur le cercle principal, à l'intérieur ou à l'extérieur de ce cercle.

3° Désignons par H et H' les projections des foyers F et F' de l'ellipse sur une droite donnée Δ (fig. 381). Le milieu O de FF' appartient à la médiatrice de HH' et comme l'angle H'HF est droit, le cercle de centre O, passant par H et H', recoupe FH en un point K diamétralement opposé à H'. La puissance de F par rapport à ce cercle permet d'écrire $\overline{FH} \cdot \overline{FK} = \overline{OF}^2 - \overline{OH}^2$ et puisque les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{F'H'}$ sont symétriques par rapport à O, on a :

$$\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} = - \overline{FH} \cdot \overline{FK} = \overline{OH}^2 - c^2.$$

Pour que la droite Δ soit tangente à l'ellipse il faut et il suffit que le point H appartienne au cercle principal O (*a*) donc que l'on ait $OH = a$.

C'est-à-dire, d'après la relation précédente : $\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} = a^2 - c^2$ ou :

$$\boxed{\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} = b^2}$$

Pour qu'une droite soit tangente à une ellipse, il faut et il suffit que le produit algébrique des distances des foyers à cette droite soit égal au carré du demi petit-axe de cette ellipse.

• **434. Générations tangentielles de l'ellipse.** — Chacune des trois propriétés caractéristiques précédentes permet de reconnaître que l'enveloppe d'une droite variable est une ellipse :

1° *L'enveloppe de la médiatrice d'un segment joignant un point variable d'un cercle donné* F' *à un point fixe intérieur* F *est une ellipse.*

Le point F est un foyer de cette ellipse et le cercle F′ le cercle directeur relatif à l'autre foyer (fig. 380).

2° ***Lorsque le sommet d'un angle droit décrit un cercle* O, *l'un de ses côtés passant par un point fixe* F *intérieur à ce cercle, le second côté enveloppe une ellipse.***

Cette ellipse admet le point F pour foyer et le cercle O pour cercle principal (fig. 380). Si F est en O, l'ellipse est confondue avec son cercle principal.

3° ***L'enveloppe d'une droite dont le produit algébrique des distances à deux points fixes* F *et* F′ *est égal à une constante positive* b^2 *est une ellipse.***

Les points F et F′ sont les foyers de cette ellipse et son petit axe a pour longueur $2b$ ce qui suffit à la déterminer (fig. 381).

● **435. Remarques.** — 1° Le lieu des projections d'un point fixe O sur les tangentes à une courbe (Γ) est une courbe (Γ′) appelée *podaire* de (Γ) par rapport au point O.

Inversement la courbe (Γ) est *l'antipodaire* de (Γ′) par rapport au point O. On peut donc dire que :

La podaire d'une ellipse par rapport à un de ses foyers est son cercle principal. L'antipodaire d'un cercle par rapport à un point intérieur F *est l'ellipse de foyer* F *admettant le cercle pour cercle principal.*

2° L'énoncé du 2° du n° 434 se généralise pour un angle de droites constant quelconque (MF, Mx) dont le sommet M décrit un cercle O et dont le premier côté MF passe par un point fixe intérieur F (fig. 382).

En effet si H désigne la projection de F sur Mx, le triangle rectangle FMH reste directement semblable à lui-même et le lieu de H est le cercle ω (ρ) homologue du cercle O (R) dans la similitude qui transforme $\overrightarrow{FM}$ en $\overrightarrow{FH}$. Comme $\frac{\omega F}{\rho} = \frac{OF}{R} < 1$ le point F est inté-

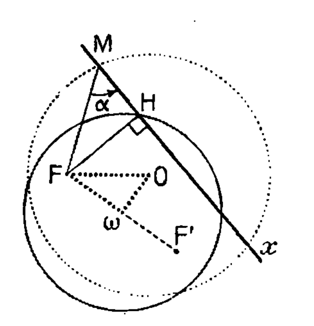


Fig. 382.

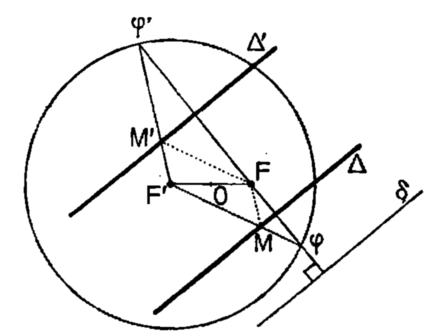


Fig. 383.

rieur au cercle ω et l'enveloppe de Mx est donc une ellipse de foyer F admettant le cercle ω pour cercle principal.

Si le sommet d'un angle de droites constant (MF, Mx) *décrit un cercle* O *admettant le point* F *pour point intérieur, l'enveloppe de la droite* Mx *est une ellipse de foyer* F.

● **436. Tangentes parallèles à une direction donnée.** — Considérons une ellipse définie par son foyer F et son cercle directeur F′ ($2a$) et soit δ une direction donnée (fig. 383).

Le symétrique φ du foyer F par rapport à une tangente parallèle à δ se trouve sur le cercle F' et sur la perpendiculaire menée du point F à δ. Cette perpendiculaire coupe toujours le cercle F' en deux points φ et φ'. Les médiatrices Δ et Δ' des segments $F\varphi$ et $F\varphi'$ sont les tangentes cherchées :

Il existe deux tangentes à une ellipse, parallèles à une direction donnée.

Les points de contact respectifs M et M' de ces deux tangentes sont les intersections de Δ avec $F'\varphi$ et de Δ' avec $F'\varphi'$. Les trois triangles isocèles $F'\varphi\varphi'$, $M\varphi F$ et $M'F\varphi'$ étant directement semblables le quadrilatère FMF'M' est un parallélogramme de centre O. Autrement dit : *Les points de contact* M *et* M' *de deux tangentes parallèles à une ellipse sont diamétralement opposés sur cette ellipse.*

Cette propriété résulte aussi du fait que O est un centre de symétrie de l'ellipse.

● **437. Tangentes issues d'un point donné.** — Le symétrique φ du foyer F par rapport à une tangente PM à l'ellipse issue du point donné P (fig. 384) doit se trouver sur le cercle directeur F' (2a) et, puisque PF = Pφ, sur le cercle de centre P passant par F. A tout point φ commun à ces deux cercles correspond une tangente issue de P, médiatrice du segment $F\varphi$ et dont le point de contact M est son intersection avec $F'\varphi$.

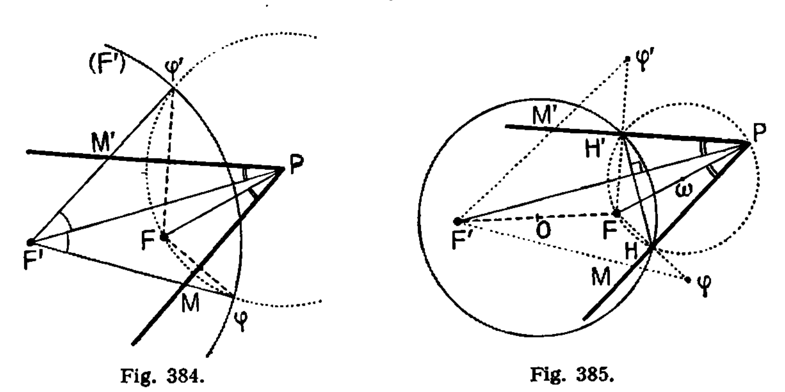


Fig. 384. Fig. 385.

DISCUSSION. — Pour qu'un point φ existe il faut et il suffit que l'on puisse construire un triangle (véritable ou aplati) $PF'\varphi$ dont les côtés sont respectivement égaux aux longueurs PF', PF et 2a, donc que l'on ait :

$$|PF - PF'| \leqq 2a \quad \text{et} \quad PF + PF' \geqq 2a.$$

La première condition est toujours satisfaite car dans le triangle PFF' on a $|PF - PF'| \leqq FF' < 2a$. Pour que la seconde soit satisfaite, il faut et il suffit que le point P soit extérieur ou situé sur l'ellipse.

1° Si le point P est extérieur, on a $PF + PF' > 2a$, le triangle $PF'\varphi$ est un triangle véritable et les cercles F' (2a) et P (PF) se coupent en deux points φ et φ' symétriques par rapport à PF' : *Deux solutions distinctes.*

2° Si le point P est sur l'ellipse les deux cercles précédents sont tangents en un point φ unique : *Une seule solution, la tangente en* P *à l'ellipse.*

Par un point extérieur à une ellipse on peut lui mener deux tangentes distinctes.

Notons (fig. 385) que les projections H et H′ du foyer F sur les tangentes issues de P sont les intersections du cercle principal O et du cercle ω de diamètre PF. D'où une autre construction de ces tangentes. Mais pour obtenir leurs points de contact M et M′ il faut construire les symétriques φ et φ' du foyer F par rapport à H et H′ et mener les droites $F'\varphi$ et $F'\varphi'$.

• **438. Théorèmes de Poncelet.** — 1° Les deux points φ et φ' (fig. 384) sont symétriques par rapport à la droite des centres F′P des cercles (F′) et (P). La droite F′P est donc bissectrice intérieure de l'angle $\varphi F'\varphi'$ c'est-à-dire de l'angle MF′M′ puisque M et M′ appartiennent respectivement aux segments $F'\varphi$ et $F'\varphi'$. En utilisant le cercle directeur (F) on verrait de même que la droite FP est bissectrice intérieure de l'angle MFM′.

***La droite qui joint un foyer* F *au point* P *commun aux tangentes en* M *et* M′ *à une ellipse, est bissectrice intérieure de l'angle* MFM′.**

Autrement dit les portions de tangentes PM et PM′ sont vues d'un foyer sous des angles égaux.

2° Les droites PM′ et PF′ (fig. 384), médiatrices des segments $\varphi' F$ et $\varphi'\varphi$ sont les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{P\varphi'}, \overrightarrow{PF})$ et $(\overrightarrow{P\varphi'}, \overrightarrow{P\varphi})$. Leur angle (PM′, PF′) est donc (n° 50) égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi})$, c'est-à-dire à l'angle (PF, PM) car la droite PM, médiatrice de $F\varphi$ est bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi})$. On a donc:

$$(PF, PM) = -(PF', PM').$$

Les tangentes menées d'un point* P *à une ellipse sont antiparallèles par rapport aux droites joignant le point* P *aux foyers* F *et* F′ *de l'ellipse.

On voit d'ailleurs (fig. 385) que la droite PF′, médiatrice de $\varphi\varphi'$, est perpendiculaire à la droite HH′ qui joint les milieux H et H′ de $F\varphi$ et $F\varphi'$. La droite PF′, hauteur du triangle PHH′, est antiparallèle au diamètre PF du cercle circonscrit par rapport aux côtés PH et PH′ de ce triangle (n° 62). Les angles MPM′ et FPF′ ont donc mêmes bissectrices. Comme les points F et F′ sont à l'intérieur de l'angle MPM′, on peut même dire que les angles $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PM})$ et $(\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{PM'})$ sont opposés.

• **439. Corollaire.** — ***La portion d'une tangente mobile à une ellipse comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer sous un angle de droites constant.***

Soient P et Q les intersections de la tangente en un point variable M avec les tangentes Ax et By aux points fixes A et B de l'ellipse (fig. 386). Les droites FP et FQ étant les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FA})$ et $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FB})$

on a (n° 50) : $$(FP, FQ) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$$

L'angle (FP, PQ) est donc constant. Si les tangentes Ax et By se coupent en R on a : (FP, FQ) = (FA, FR) = (FR, FB). Si les tangentes Ax et By sont parallèles à une même direction Fλ on a : (FP, FQ) = (FA, Fλ) = (Fλ, FB).

En échangeant Q et R, on voit que (FP, FR) = (FM, FQ) = (FQ, FB). La droite FM est donc antiparallèle à FR par rapport à FP et FQ ce qui détermine la position du point de contact M de la tangente PQ.

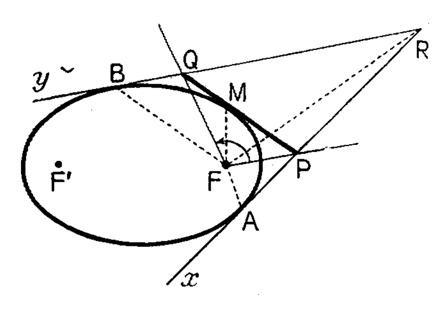


Fig. 386.

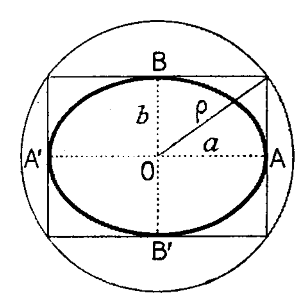


Fig. 387.

• 440. Angle des tangentes. — Les tangentes PM et PM′ (fig. 384) étant les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi})$ et $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi'})$, leur angle (PM, PM′) est égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{P\varphi'})$ c'est-à-dire à l'angle (Pφ, PF′). Les points M, M′ et F′ appartiennent à une même région du plan limitée par l'angle φPφ′. Il en résulte que l'angle saillant MPM′ est égal à l'angle saillant φPF′ = V. Or dans le triangle φPF′ on a :

$$\overline{\varphi F'}^2 = \overline{P\varphi}^2 + \overline{PF'}^2 - 2P\varphi.PF' \cos \varphi PF'.$$

Et puisque Pφ = PF et φF′ = $2a$, on obtient :

$$\boxed{4a^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 2PF.PF' \cos V.}$$

Relation qui détermine cos V en fonction de PF et PF′.

• 441. Cercle orthoptique. — Pour que l'angle MPM′ soit droit il faut et il suffit que cos V = 0 donc que : $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2$

Soit que (n° 88) : $2\overline{PO}^2 + 2\overline{OF}^2 = 4a^2$ ou $\overline{PO}^2 = 2a^2 - c^2$

C'est-à-dire que : $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2$.

Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à une ellipse est un cercle de centre* O *appelé cercle orthoptique de l'ellipse.

C'est le cercle circonscrit au rectangle déterminé par les tangentes aux sommets de l'ellipse (fig. 387). Son rayon ρ vérifie la relation : $\rho^2 = a^2 + b^2$.

SUJETS D'EXAMEN

— Intersection d'une ellipse et d'une droite. Existence et construction de la tangente. (*Bordeaux* ME et MT.)

— Tangentes à l'ellipse issues d'un point donné. Discussion. (*Lyon* ME et MT.)

— On mène d'un point à une ellipse deux tangentes et on joint ce point aux foyers. Relations entre ces quatre droites. (*Aix* ME.)

EXERCICES

Construire une ellipse (on se bornera à déterminer les foyers et la longueur $2a$ de l'axe focal) connaissant :

● **507.** Les foyers et un point de la courbe.

● **508.** Les foyers et une tangente à la courbe.

● **509.** Les foyers et l'excentricité ou le rapport des axes.

● **510.** Un foyer, deux points et la longueur $2a$.

● **511.** Un foyer, une tangente et un sommet (deux cas).

● **512.** Le cercle principal et deux tangentes.

● **513.** Construire une ellipse de foyer F donné connaissant en outre :
1° Trois tangentes. 2° Deux tangentes et un point.
3° Une tangente et deux points. 4° Trois points.

● **514.** 1° Trouver le lieu du foyer F′ d'une ellipse variable E dont on connaît le foyer F et deux tangentes (ou une tangente et son point de contact).
2° Construire l'ellipse E connaissant en outre une longueur $2a$, $2c$ ou $2b$, ou encore l'excentricité de la courbe.

● **515.** 1° Montrer que les intersections de l'axe non focal d'une ellipse de foyers F et F′, avec la tangente et la normale en un point M appartiennent au cercle MFF′.
2° Construire une ellipse connaissant son centre O, le support Ox de l'axe focal, un point M de la courbe et la tangente en ce point.

● **516.** 1° Démontrer que le point de contact M d'une tangente à l'ellipse et son intersection T avec l'axe focal sont conjugués par rapport au cercle principal de cette ellipse.
2° Construire une ellipse connaissant les sommets du grand axe et un point ou une tangente à la courbe.

● **517.** Une ellipse E admet un cercle principal donné O et passe par un point fixe P intérieur au cercle O.
1° Montrer que l'ellipse E passe par un second point fixe Q et trouver le lieu des foyers F et F′ de cette ellipse.
2° Construire les ellipses E tangentes à une droite donnée Δ.

● **518.** Soient T′ et N′ les intersections de la tangente et de la normale en un point M d'une ellipse de foyers F et F′ et de centre O avec l'axe non focal. On désigne par H et H′ les projections de N′ sur MF et MF′, par K et K′ les projections de T′ sur ces deux droites.
1° Montrer que les droites HH′ et KK′ sont perpendiculaires en O.
2° Démontrer que l'on a : $MH = FK = a$ (demi-grand axe.)

● **519.** 1° Un point M décrit une ellipse de foyers F et F′. Déterminer l'enveloppe du cercle de diamètre MF et celle du cercle de diamètre MF′.
2° Un cercle variable ω reste tangent à un cercle fixe O et passe par un point fixe F intérieur à ce cercle. Lieu du point M diamétralement opposé au point F sur le cercle ω? Construire la tangente en M à ce lieu.

● **520.** Soient H et H′ les projections des foyers F et F′ d'une ellipse sur la tangente en M à cette ellipse. Démontrer que le point de rencontre I de FH′ et de F′H est le milieu de la normale MN limitée à l'axe focal.

● **521.** Enveloppe de la droite qui joint les projections du foyer F d'une ellipse sur la tangente et la normale en un point variable M de l'ellipse?

● **522.** La perpendiculaire menée du centre O d'une ellipse à la tangente en un point variable M de l'ellipse coupe les rayons vecteurs MF et MF′ en P et P′. Montrer que les lieux de P et P′ sont deux cercles égaux et qu'il existe un cercle de centre M tangent à ces deux cercles. Evaluer le produit $\overline{OP}.\overline{OP'}$.

● **523.** On donne un cercle O, un point fixe intérieur F et une corde mobile de longueur constante MN. La droite NF recoupe le cercle en P. Enveloppe de la droite MP. Cas où MN est un diamètre?

● **524.** On considère deux points fixes F et F′ d'un même côté d'une droite D. Par un point variable M de D on mène la droite Δ antiparallèle à D par rapport à MF et MF′. Soient f et φ les symétriques de F par rapport à D et à Δ. Montrer que les points f et φ sont symétriques par rapport à MF′. En déduire le lieu de φ et l'enveloppe de Δ.

● **525.** Soit M un point variable sur une droite Δ et deux points fixes A et B d'un même côté de Δ. Le cercle MAB recoupe Δ en N et recoupe en P la parallèle à AB menée par N. Déterminer l'enveloppe de la droite MP.

● **526.** On donne un segment fixe AB et un cercle variable ω tangent à la droite AB en un point fixe K extérieur au segment AB. Trouver le lieu du point M commun aux tangentes AT et BU, distinctes de AB, au cercle ω, ainsi que l'enveloppe de la droite Mω.

● **527.** 1° Montrer qu'il existe une infinité de triangles ABC inscrits dans un cercle O et admettant un point donné intérieur H pour orthocentre.
2° Trouver les lieux des milieux des côtés, des pieds des hauteurs et l'enveloppe des côtés de ces triangles.

● **528.** 1° Trouver le lieu du centre O d'un cercle variable Γ passant par un point fixe A et vu d'un point fixe B sous un angle $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BT'})$ constant, ainsi que les lieux des points de contact T et T′ des tangentes issues de B.
2° Deux cercles de centres ω et ω′ passant par les points fixes A et B varient de telle sorte que l'angle $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$ soit constant et égal à V. Trouver le lieu du symétrique M de B par rapport à une tangente commune Δ aux cercles ω et ω′, l'enveloppe de Δ et les lieux des points de contact N et N′ de Δ avec les cercles ω et ω′.

● **529.** On mène d'un point P les tangentes PM et PM′ à une ellipse de foyers F et F′ et de centre O. Soit I le milieu de MM′.
1° Démontrer que P est le centre d'un cercle de rayon R tangent aux quatre côtés du quadrilatère FMF′M′. Que deviennent les sommets de ce quadrilatère dans l'inversion (P, R^2)?
2° En déduire que les points P, O, I sont alignés et que les cercles PMF et PM′F′ sont tangents en P. Etablir directement cette seconde propriété.

● **530.** D'un point variable A du cercle directeur F′ on mène les tangentes à une ellipse de foyers F et F′. Ces tangentes recoupent le cercle F′ en B et C.
1° Que représentent pour le triangle ABC, le foyer F et le cercle principal O?
2° Trouver l'enveloppe du côté BC et en déduire l'existence d'une infinité de triangles inscrits dans le cercle F′ et circonscrits à l'ellipse.

● **531.** Soient H et H′ les projections des foyers F et F′ d'une ellipse E sur la tangente Δ en un point variable M. Le cercle de centre H, passant par F′, coupe cette tangente en A et B.
1° Montrer que le lieu de A et de B est un cercle (Γ) de centre F. Calculer son rayon.
2° Les droites F′A et F′B recoupent le cercle précédent en C et D. Montrer que l'enveloppe des côtés du quadrilatère ABCD est l'ellipse E.
3° Réciproquement trouver l'enveloppe des cordes d'un cercle Γ vues d'un point fixe intérieur sous un angle droit.

● **532.** On donne une ellipse (E) de foyers F et F′ et une tangente Δ en un point variable M. Soient N et N′ les points de contact des cercles ω et ω' passant par F et F′ et tangents à Δ.

1° Etudier les directions des secondes tangentes à l'ellipse issues de N et N′.

2° Trouver les lieux de N et de N′ et montrer que l'angle V des cercles ω et ω' est constant. Calculer $\operatorname{tg} \frac{V}{2}$.

● **533.** On considère une ellipse E de foyers F et F′ et un cercle variable ω du faisceau de cercles de points limites F et F′. Une tangente commune à l'ellipse et au cercle ω touche E en M et le cercle ω en N. Les droites NF, NF′ et la seconde tangente à E issue de N recoupent le cercle ω en P, P′ et N′.

1° Montrer que la droite FF′ est bissectrice des angles NF′P et NFP′ et que les points P et P′ sont symétriques par rapport à FF′.

2° Démontrer que les points F, N′, P′ sont alignés ainsi que F′, N′, P. En déduire les lieux de N et N′ et de P et P′.

● **534.** La tangente en un point variable M d'une ellipse E coupe les tangentes AY et A′Y′ aux sommets du grand axe AA′ en T et T′.

1° Démontrer que le cercle ω' de diamètre TT′ passe par F et F′ et établir la relation $\overline{AT}.\overline{A'T'} = b^2$.

2° Les droites FT′ et F′T se coupent en I, les droites FT et F′T′ se coupent en J. Que représentent les points T, T′, I et J pour le triangle MFF′? Lieu du milieu K de IJ.

3° La droite TT′ coupe FF′ en ω. Natures de la division (TT′ Mω) et du quadrangle $\omega\omega'$IJ.

● **535.** On mène la tangente Δ en un point variable M d'une ellipse. La droite Δ coupe les tangentes aux sommets AY, A′Y′, BX et B′X′ respectivement en T, T′ S et S′.

1° Montrer que FT et FT′ sont les bissectrices des angles MFA et SFS′. En déduire que le cercle ω de diamètre SS′ est orthogonal au cercle ω' de diamètre TT′ et qu'il fait partie du faisceau de cercles de points limites F et F′.

2° Démontrer que $\overline{BS}.\overline{B'S'} = a^2$, que les cercles FF′S et FF′S′ sont tangents à Δ et se coupent sous un angle constant.

3° Démontrer que les divisions (TT′Mω) et (SS′Mω') sont harmoniques et que l'axe radical des cercles ω et ω' est la normale en M à l'ellipse.

● **536.** La normale en M à l'ellipse E de centre O coupe l'axe focal AA′ en N et l'axe non focal BB′en N′.

1° Montrer que le cercle de centré N′ passant par les foyers F et F′ coupe NN′ aux centres I et J des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle M du triangle MFF′.

2° Calculer en fonction des côtés du triangle MFF′, puis en fonction de OA = a et OF = c les longueurs des projections de MI, MJ et MN′ sur la droite MF.

3° Etablir la relation $\overline{MN}.\overline{MN'} = \overline{MI}.\overline{MJ}$ et en déduire que la projection MK de MN sur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$.

● **537.** Une ellipse variable E de grand axe donné $2a$ et de foyer donné F passe par le point fixe A tel que FA = $2(a - l)$.

1° Lieu du foyer F′ de l'ellipse E. Construire les ellipses E passant par un point donné P. Discuter et montrer que P doit se trouver à l'intérieur d'une courbe Γ.

2° La demi-droite AF′ coupe Γ en M. Montrer que le point M appartient à l'ellipse E correspondante et que la courbe Γ enveloppe les ellipses E.

● **538.** Un point M est variable sur une ellipse donnée S de foyers F et F′. On désigne par A et A′ les sommets du grand axe de l'ellipse S, par $2a$ la distance AA′, par $2c$ la distance focale FF′. On considère l'ellipse E dont un foyer est F′, qui passe par F et qui est tangente en M à l'ellipse S.

1° Montrer que la longueur du grand axe de l'ellipse E reste égale à $a + c$ quand M parcourt S. En déduire que le lieu géométrique du second foyer de E est un cercle de centre F, de rayon $a - c$.

2° La droite FF′ coupe l'ellipse E en un point N distinct de F. La tangente en M à E coupe en P et Q les tangentes en F et N à E. Montrer que les lieux géométriques des points P et Q sont les tangentes en A et A′ à l'ellipse S. *(Toulouse.)*

● **539.** Dans un plan on considère un segment de droite AB fixe, de milieu C et la perpendiculaire $x'x$ à la droite AB issue de A. Un point P varie sur $x'x$. La médiatrice du segment CP coupe en M la parallèle $y'y$ à la droite $x'x$ issue de B.

1° Soit H la projection orthogonale de C sur MP. Montrer que les triangles CMP et ABH sont semblables et en déduire le lieu de H. A quelle courbe E la droite MP reste-t-elle tangente?

2° Montrer que la médiane PI du triangle CMP reste tangente à un cercle Γ de centre C.

3° K désignant le point de contact de la droite MP et de la courbe E et L le point de contact de la droite PI et du cercle Γ, démontrer que la droite KL passe par C.

(Egypte.)

● **540.** F étant un point fixe, (D) une droite fixe et $2a$ une longueur donnée supérieure à la distance de F à (D), on considère la familles des *ellipses* de foyer F tangentes à (D) et ayant un grand axe de longueur $2a$.

1° Quel est le lieu du second foyer F′ des ellipses de la famille?

2° Connaissant le point de contact T d'une ellipse de la famille avec (D), construire le foyer F′.

3° Déterminer les ellipses de la famille passant par un point donné M. Discuter. On trouvera que le problème est possible si M est du même côté de (D) que le point F et n'est pas extérieur à une certaine ellipse (E).

4° Montrer que chaque ellipse de la famille est tangente à (E) en un point que l'on déterminera. *(Dijon.)*

● **541.** On considère toutes les ellipses E ayant un cercle directeur donné C de centre F et de rayon $2a$, et passant par un point fixe intérieur A situé à la distance d du point F.

1° Quel est le lieu du second foyer F′ des ellipses E? Comment doivent être placés sur ce lieu deux points F'_1 et F'_2 pour que les ellipses E_1 et E_2 correspondantes se coupent en A sous un angle droit?

2° Déterminer celles des ellipses E qui sont tangentes à une droite donnée D et leurs points de contact avec D. Discuter.

3° Montrer que les droites D qui sont tangentes à deux ellipses E se coupant en A sous un angle droit sont tangentes à une certaines ellipse Γ de foyers F et A.

4° En appelant M_1 et M_2 les points de contact d'une de ces droites avec les ellipses E qui lui sont tangentes, et μ son point de contact avec Γ, montrer que l'angle M_1FM_2 est constant et que $F\mu$ est bissectrice de cet angle. *(Clermont.)*

● **542.** 1° Construire une ellipse (E), connaissant un foyer F, une tangente quelconque MT et la tangente MX en l'un des sommets du petit axe (M désigne le point d'intersection de ces deux tangentes). Dans la suite du problème, les droites MT et MX étant fixes, on suppose que le point F décrit un cercle (C) tangent à MT en M.

2° Montrer que le second foyer F′ est aussi sur (C). En déduire que l'un des sommets B du petit axe est fixe et trouver les lieux du centre et de l'autre sommet B′ du petit axe.

3° Soit A l'un des sommets du grand axe de l'ellipse (E). Montrer que le cercle (Γ) de centre A et tangent à MX est orthogonal au cercle (C).

4° Déduire de ce qui précède que ce cercle (Γ) est en outre tangent à un cercle fixe. *(Bordeaux.)*

● **543.** 1° Lieu des centres des ellipses dont le grand axe a une longueur donnée $2a$, ayant un foyer donné et passant par un point donné.

2° Construire le centre d'une ellipse ayant un foyer donné, passant par un point donné et dont les axes ont des longueurs données. Discuter.

3° Soient F un point donné, D une droite donnée ne passant pas par F, et A un point donné de la droite D. On considère les ellipses (E) passant par A, dont F est l'un des foyers, l'autre foyer F′ étant un point quelconque de D. Montrer que deux ellipses E ayant même longueur de grand axe ont, en dehors de A, un point commun M et un seul. Lieu de M quand on laisse varier la longueur commune du grand axe. *(Toulouse.)*

● **544.** On considère une ellipse de foyers F et F′ dans laquelle la distance focale $FF' = 2c$ est égale à la longueur $2b$ du petit axe; la longueur du grand axe est $2a$.

1° M étant un point quelconque de cette ellipse, calculer les longueurs $MF = x$ et $MF' = y$ en fonction de a et de l'angle $FMF' = \alpha$. Quelle est la valeur maximum de α?

2° Calculer, en fonction de x, y, α, puis en fonction de a et α, la puissance du point M par rapport au cercle de diamètre FF'. Déduire de ce résultat l'expression de la puissance du point M par rapport au cercle principal; quelle est la longueur de la corde du cercle principal perpendiculaire à OM? O est le milieu de FF'.

3° Les droites MF et MF' recoupent le cercle de diamètre FF' en P et P'. Calculer, en fonction de a et α, la distance PP' et déterminer α pour que la droite PP' soit perpendiculaire à FF'. *(Maroc.)*

● **545.** 1° On considère une ellipse de foyers F et F', de grand axe $2a$. Soient (C) le cercle directeur de centre F, M un point de l'ellipse, (Γ) le cercle de centre M passant par F'.

Comment se transforment, dans une inversion de centre F', le cercle (Γ) et la tangente en M à l'ellipse? Préciser le centre du cercle transformé de cette tangente, et son lieu lorsque M décrit l'ellipse, la puissance d'inversion restant constante.

2° On considère deux ellipses (E) et (E') de même cercle directeur (C), dont on désigne les seconds foyers par F' et F''.

Déterminer les points communs à ces deux ellipses. Montrer qu'il y en a toujours deux, et deux seulement, M et M'.

Enveloppe de MM' lorsque, F' restant fixe, F'' décrit un cercle (Ω) [nécessairement intérieur à (C)] et qui passe par F'.

3° On désigne par I et I' les centres des cercles inverses des tangentes en M et M' à (E), dans l'inversion de centre F' qui conserve (C). Montrer que II' passe par un point fixe lorsque M varie sur (E). En déduire le lieu du point commun aux tangentes à (E) en M et M'. *(Caen.)*

DIX-HUITIÈME LEÇON

ÉQUATION DE L'ELLIPSE

• **442. Rayons vecteurs d'un point de l'ellipse.** — Soient $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ les axes orientés d'une ellipse (fig. 388). Désignons par M (x, y) le point de coordonnées x et y du plan et par F $(c, 0)$ et F′ $(-c, 0)$ les foyers de l'ellipse. Quel que soit M on a (n° 31) :

$$\overline{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad \overline{MF'}^2 = (x+c)^2 + y^2 \qquad (1)$$

Soit : $$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = (MF' + MF)(MF' - MF) = 4cx \qquad (2)$$

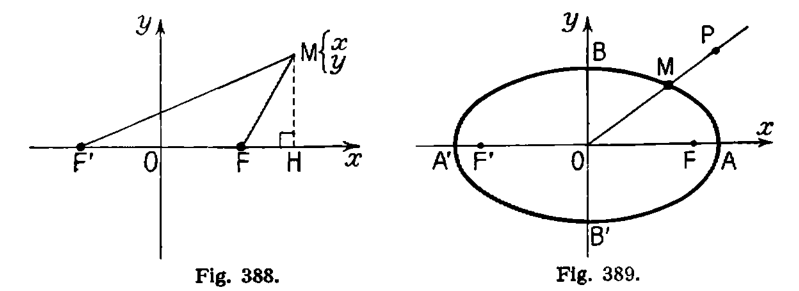


Fig. 388. Fig. 389.

Si le point M (x, y) appartient à l'ellipse de foyers F et F′ et de grand axe AA′ = $2a$, on a : $$MF' + MF = 2a \qquad (3)$$

L'équation (2) donne alors : $$MF' - MF = \frac{2cx}{a} \qquad (4)$$

et le système (3), (4) permet d'obtenir les valeurs de MF et MF′ :

$$MF = a - \frac{cx}{a} \qquad MF' = a + \frac{cx}{a}.$$

• **443. Equation de l'ellipse rapportée à ses axes.** — 1° En portant les valeurs de MF et MF′ dans les relations (1) on obtient les deux relations :

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \quad (6$$

Elles se réduisent toutes deux à : $x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$

ou : $\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 = a^2 - c^2$, soit par division par $a^2 - c^2 = b^2$ à :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7)$$

2° Réciproquement si les coordonnées x et y d'un point M vérifient la relation (7), elles vérifient les deux relations (6) soit compte tenu de (1) :

$$\overline{MF}^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \quad \text{et} \quad \overline{MF'}^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2. \qquad (8)$$

Or d'après (7) on a : $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Donc $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{cx}{a}\right| < a$ puisque $c < a$.

Les deux expressions $a - \frac{cx}{a}$ et $a + \frac{cx}{a}$ sont donc positives et les relations (8) s'écrivent : $MF = a - \frac{cx}{a}$ et $MF' = a + \frac{cx}{a}$. D'où :

$$MF + MF' = 2a.$$

Le point M (x, y) appartient à l'ellipse envisagée. Donc (fig. 389) :

Pour qu'un point* M *appartienne à l'ellipse d'axes* A'A = $2a$ *et* B'B = $2b$ *il faut et il suffit que ses coordonnées rapportées à ces axes vérifient la relation :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Cette relation est l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

• **444. Régions du plan limitées par l'ellipse.** — Soit P (X, Y) un point de la demi-droite OM tel que $\overrightarrow{OP} = k\,\overrightarrow{OM}$ (fig. 389). On a : $X = kx$ et $Y = ky$.

Soit : $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - 1 = k^2 - 1.$$

Or P est extérieur à l'ellipse lorsque : $k > 1$, intérieur lorsque : $k < 1$. Il en résulte que :

Un point est extérieur ou intérieur à l'ellipse suivant qu'en ce point l'expression $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ *est positive ou négative.*

• **445. Ellipse et cercle principal ou secondaire.** — Soit H la projection du point M (x, y) de l'ellipse sur l'axe Ox (fig. 390). La demi-droite HM coupe le cercle principal de diamètre AA' en un point $M_1(x, y_1)$ tel que : $x^2 + y_1^2 = a^2$ ou $y_1^2 = a^2 - x^2$, et l'équation de l'ellipse donne : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}y_1^2$.

D'où : $\overline{HM} = \frac{b}{a}\overline{HM_1}$. Avec M_1' symétrique de M_1 par rapport à AA' on obtient :

$\overline{HM} = -\frac{b}{a}\overline{HM'_1}$. On dit que :

L'ellipse est l'homologue de son cercle principal dans l'affinité orthogonale d'axe AA' et de rapport $\frac{b}{a}$ $\left(ou -\frac{b}{a}\right)$.

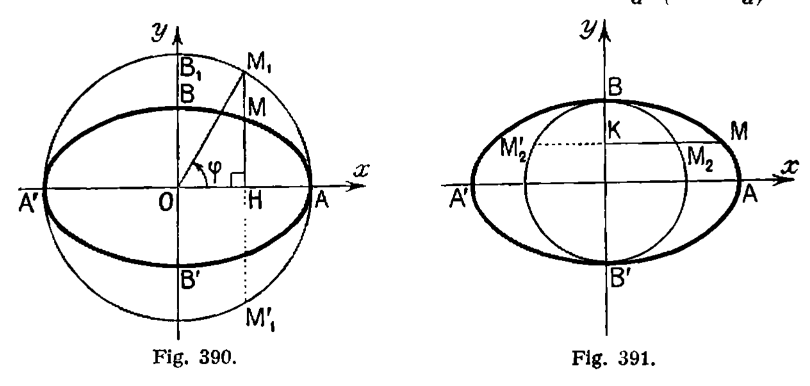


Fig. 390. Fig. 391.

Traçons le cercle de diamètre BB', appelé *cercle secondaire de l'ellipse* (fig. 391) et soient M_2 et M'_2 les points de ce cercle de même ordonnée $y = OK$ que le point M de l'ellipse. On obtient de même :

$$\overline{KM} = \frac{a}{b}\overline{KM_2} = -\frac{a}{b}\overline{KM'_2}.$$

L'ellipse est donc l'homologue de son cercle secondaire dans l'affinité orthogonale d'axe BB' et de rapport $\frac{a}{b}$ $\left(ou -\frac{a}{b}\right)$.

Il en résulte réciproquement que :

L'homologue d'un cercle dans une affinité orthogonale de rapport k ayant pour axe un de ses diamètres est une ellipse admettant ce cercle pour cercle principal si $|k| < 1$, pour cercle secondaire si $|k| > 1$.

Si nous désignons par φ l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1})$, les coordonnées de M_1 sont $x = a \cos \varphi$ et $y_1 = a \sin \varphi$. Par suite celles de M sont x et $\frac{b}{a}y_1$ soit :

$$\boxed{x = a \cos \varphi \quad \Big| \quad y = b \sin \varphi}$$

Ces relations, appelées *équations paramétriques* de l'ellipse, sont nécessaires et suffisantes pour que le point M (x, y) appartienne à l'ellipse car on a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Lorsque φ varie de 0 à 2π, par exemple, le point M décrit l'ellipse en entier.

● **446. Démonstration géométrique.** — Traçons (fig. 392) les cercles de centres F et F', passant par les points M et M' de l'ellipse et menons la tangente commune TT' à ces deux cercles. Le milieu M_1 du segment TT' appartient à l'axe radical des deux cercles (n° 288). On a donc :

$$\overline{M_1T}^2 = \overline{M_1M}.\overline{M_1M'} = \overline{M_1H}^2 - \overline{HM}^2 \quad \text{soit} \quad \overline{HM}^2 = \overline{HM_1}^2 - \overline{M_1T}^2 \quad (1)$$

Or dans le trapèze rectangle FTT'F', la base moyenne OM_1 est égale à la demi-somme des bases FT et F'T' soit à a. Le point M_1 appartient donc au cercle principal O (a) de l'ellipse et en posant $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi$ on obtient :

$\overline{OH} = a\cos\varphi$, $\quad \overline{HM_1} = a\sin\varphi \quad$ et $\quad M_1T = |OF\sin\varphi| = c\sin\varphi$.

La relation (1) donne alors : $\overline{HM}^2 = a^2\sin^2\varphi - c^2\sin^2\varphi = b^2\sin^2\varphi$.

D'où : $\overline{HM} = \dfrac{b}{a}\overline{HM_1}$, $\quad x = \overline{OH} = a\cos\varphi \quad$ et $\quad y = \overline{HM} = b\sin\varphi$.

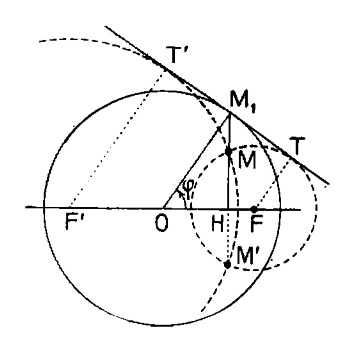


Fig. 392.

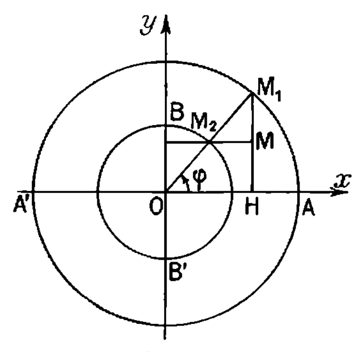


Fig. 393.

● **447. Construction par points d'une ellipse.** — Supposons tracés les cercles de diamètres $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ (fig. 393). Par le centre O, menons une demi-droite coupant le premier en M_1, le second en M_2. Les parallèles M_1H à BB' et M_2K à AA' se coupent en M et on a :

$$\frac{HM}{HM_1} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{b}{a}$$

Le point M appartient à l'ellipse d'axes AA' et BB'. En répétant cette construction on obtient un nouveau tracé par points de l'ellipse.

● **448. Projection d'un cercle sur un plan.** — La projection d'une figure reste égale à elle-même lorsqu'on remplace le plan de projection par un plan parallèle. Nous pouvons donc supposer que le plan de projection (π) passe par le centre O et le diamètre AA' du cercle (C) donné (fig. 394). Soit α l'angle aigu du plan (P) de ce cercle et du plan de projection (π). Un point quelconque M_0 du cercle (C) et sa projection M sur le plan (π) sont dans un même plan perpendiculaire en H à AA' et on a : $HM = HM_0\cos\alpha$. Rabattons, autour de AA' comme charnière, le plan P sur le plan (π). Ce rabattement amène le point M_0 en M_1 sur la demi-droite HM. On a : $\overline{HM} = \overline{HM_1}\cos\alpha$. Or le lieu

de M_1 est le cercle (C_1) de diamètre AA′ du plan (π). Le lieu du point M est donc l'ellipse, homologue du cercle (C_1), dans l'affinité orthogonale d'axe AA′ et de rapport $\cos \alpha$ (nº 445).

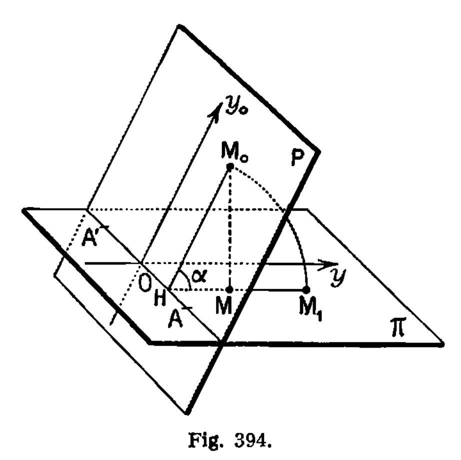


Fig. 394.

Cette ellipse admet AA′ pour grand axe et $BB' = AA' \cos \alpha$ pour petit axe.

Plus généralement

***La projection orthogonale d'un cercle sur un plan parallèle au diamètre* AA′ *de ce cercle est une ellipse dont le grand axe est parallèle et égal à* AA′.**

Réciproquement, toute ellipse de grand axe $AA' = 2a$ et de petit axe $BB' = 2b$ est la projection du cercle de diamètre AA′ situé dans un plan P issu de la droite AA′ et faisant avec le plan de l'ellipse un angle aigu α tel que $\cos \alpha = b/a$.

• **449. Projection circulaire d'une ellipse.** — Tout cercle (C) de diamètre BB′ du plan (π) est la projection d'une courbe Γ du plan P issu de BB′. Cette courbe Γ est égale à son rabattement Γ_1 sur la plan (π). Or ce rabattement Γ_1 se déduit du cercle C dans l'affinité orthogonale d'axe BB′ et de rapport $\dfrac{1}{\cos \alpha}$ (nº 448). Les courbes Γ_1 et Γ sont donc des ellipses de petit axe BB′ (nº 443) et dont le grand axe AA′ a pour longueur $\dfrac{BB'}{\cos \alpha}$.

Réciproquement toute ellipse de petit axe $BB' = 2b$ et de grand axe $AA' = 2a$ se projette suivant un cercle de diamètre BB′ sur le plan P issu de BB′ et faisant avec le plan de l'ellipse un angle aigu α tel que $\cos \alpha = b/a$.

ELLIPSE PROJECTION D'UN CERCLE

• **450. Principe de cette étude.** — Certaines propriétés de l'ellipse (E) peuvent se déduire de celles du cercle (C) de diamètre AA′ dont l'ellipse est la projection orthogonale. Dans les constructions, on utilise le rabattement (C_1) du cercle (C), c'est-à-dire le cercle principal de l'ellipse, et l'affinité orthogonale qui transforme (C_1) en (E). Or, lorsqu'on rabat autour de leur intersection AA′, un plan (P) sur un plan (π) :

1° *La projection* M *et le rabattement* M_1 *d'un point* M_0 *du plan* P *sont situés sur une même perpendiculaire à* AA'.

2° *La projection* Δ *et le rabattement* Δ_1 *d'une droite* δ *du plan* P *se coupent en un point* I *de la charnière* AA' *ou lui sont toutes deux parallèles* suivant que δ coupe AA' en I ou lui est parallèle.

Ces deux règles vont nous permettre de construire l'homologue d'une droite ou d'un point dans l'affinité d'axe AA' connaissant le transformé B du point B_1.

• **451. Intersection de l'ellipse et d'une droite.** — Soit à construire (fig. 395) les points d'intersection d'une ellipse (E) définie par ses sommets A, A', B et B' et d'une droite donnée Δ qui coupe AA' en I. Traçons le cercle principal (C_1) de l'ellipse qui coupe la droite BB' en B_1 et B'_1 et soit J un point quelconque de AA'. La droite Δ qui coupe JB en K est la transformée dans l'affinité (AA', *b*/*a*) d'une droite Δ_1 issue de I et qui coupe JB_1 en K_1 sur la perpendiculaire menée de K à AA' (ligne de rappel de K et K_1). La droite Δ_1 coupe le cercle principal en M_1 et M'_1. Leurs transformés M et M' dans l'affinité sont les points cherchés. On les obtient à l'intersection de Δ et des lignes de rappel de M_1 et M'_1.

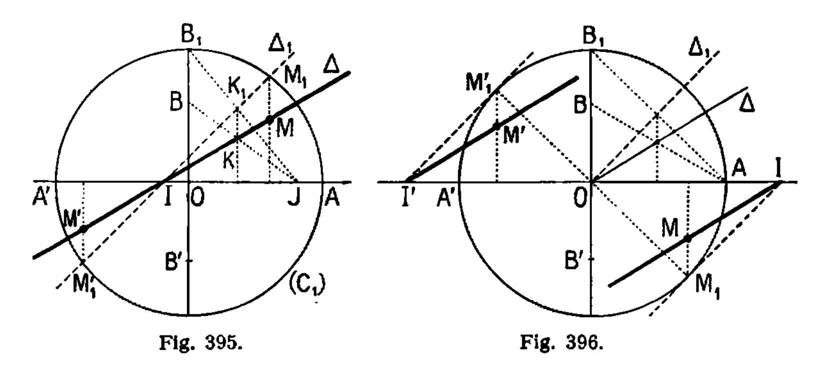


Fig. 395. Fig. 396.

Lorsque la droite Δ_1 est tangente en M_1 au cercle principal il en est de même de Δ par rapport à l'ellipse. Autrement dit :

Les tangentes en deux points homologues de l'ellipse et de son cercle principal se coupent sur l'axe focal de l'ellipse.

Cette propriété permet de compléter la construction du point M (n° 447) par le tracé de la tangente en M.

• **452. Tangentes parallèles à une direction donnée.** — Soit à construire (fig. 396) les tangentes à l'ellipse parallèles à une droite donnée Δ issue de O. Construisons comme ci-dessus la droite Δ_1 dont Δ est la transformée dans l'affinité AA' et soient M_1 et M'_1 les points de contact des tangentes au cercle principal (C_1) parallèles à Δ_1. Ces tangentes coupent AA' en I et I'. Les parallèles à Δ issues de I et I' sont les tangentes cherchées. Leurs points de contact M et M' se trouvent respectivement sur les lignes de rappel de M_1 et de M'_1.

• **453. Tangentes issues d'un point donné.** — Soit à construire les tangentes à l'ellipse issues d'un point donné P (fig. 397). Ce point est le transformé dans l'affinité AA′ d'un point P_1 qui se trouve sur la ligne de rappel de P. Pour achever de le déterminer menons la droite PB qui coupe AA′ en I et qui est la transformée de la droite P_1 B_1I. Désignons par M_1 et M'_1 les points de contact des tangentes au cercle principal C_1 issues de P_1 et par J et J′ leurs points d'intersection avec AA′. Les tangentes cherchées sont les droites PJ et PJ′. Leurs points de contact M et M′ avec l'ellipse sont situés respectivement sur les lignes de rappel de M_1 et M'_1.

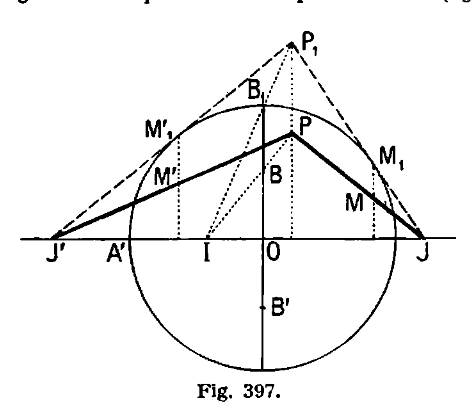


Fig. 397.

• **454. Diamètres conjugués d'une ellipse.** — Considérons une ellipse (E) projection orthogonale d'un cercle (C). Dans ce cercle (C) le lieu des milieux des cordes parallèles à la direction δ du diamètre *mm′* est le diamètre *nn′* qui joint les points de contact des tangentes parallèles à δ. De plus, le lieu des milieux des cordes du cercle (C) parallèles à la direction δ′ du diamètre *nn′* est le diamètre *mm′* parallèle à δ.

La projection orthogonale conserve ces propriétés : aux directions δ et δ′ correspondent deux directions Δ *et* Δ′ *qui sont dites conjuguées par rapport à l'ellipse* (fig. 398). Aux diamètres *mm′* et *nn′* du cercle (C) correspondent deux diamètres MM′ et NN′ de l'ellipse appelés *diamètres conjugués de l'ellipse.*

Fig. 398.

Deux diamètres conjugués d'une ellipse sont tels que chacun d'eux est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre.

Les extrémités de l'un d'eux sont les points de contact des tangentes parallèles à l'autre. De plus comme les diamètres *mm′* et *nn′* du cercle (C) sont perpendiculaires :

Deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse (E) ***sont les homologues de deux rayons rectangulaires du cercle principal*** (C_1) ***dans l'affinité orthogonale qui transforme*** (C_1) ***en*** (E).

Au demi-diamètre OM correspondent deux demi-diamètres conjugués opposés ON et ON′ (fig. 398).

• **455. Construction du conjugué d'un diamètre.** — Pour construire ON, connaissant OM, on construit, sur le cercle principal, l'homologue M_1 du point M de l'ellipse (fig. 399). On achève le carré $OM_1P_1N_1$ et on construit son transformé dans l'affinité AA', à savoir le parallélogramme OMPN.

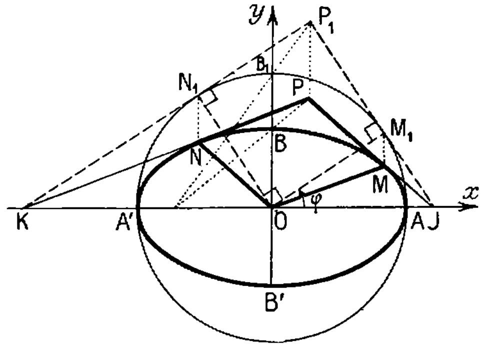


Fig. 399.

Si M et N appartiennent à la demi-ellipse ABA', l'angle droit M_1ON_1 est situé à l'intérieur de l'angle MON qui est donc obtus. Par contre l'angle MON' est aigu. Si M vient en A, N vient en B. Donc :

Les axes de l'ellipse constituent le seul couple de diamètres conjugués rectangulaires de cette ellipse.

• **456. Théorèmes d'Apollonius.** — 1° ***La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes.***

Prenons comme axes de coordonnées Ox et Oy dirigés suivant les axes OA et OB (fig. 399) et posons $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi$ et par suite $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON_1}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

D'après les formules du n° 445 on obtient pour coordonnées de M et N :

$$M \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \qquad N \begin{cases} x = a \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin \varphi \\ y = b \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \quad b \cos \varphi. \end{cases}$$

Donc : $\overline{OM}^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$ et $\overline{ON}^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$

soit $\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = a^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$

$$\boxed{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = a^2 + b^2}$$

2° ***L'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à l'aire du rectangle construit sur les demi-axes.***

Le parallélogramme OMPN (fig. 399) est la projection d'un carré O*mpn* construit sur deux rayons rectangulaires du cercle (C) dont l'ellipse est la projection orthogonale. Si on désigne par α l'angle aigu du plan du cercle (C) et du plan de l'ellipse, on a : $S(OMPN) = S(Ompn) \times \cos \alpha = a^2 \times b/a$.

Soit : $$\boxed{S(OMPN) = ab.}$$

• **457. Théorème.** — ***Lorsque les extrémités* P *et* Q *d'un segment de longueur constante décrivent respectivement deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point donné* M *de la droite* PQ *décrit une ellipse dont les axes sont portés par* Ox *et* Oy *et ont respectivement pour demi-longueurs* QM = a *et* PM = b.**

Le point M peut être entre P et Q (fig. 400) ou à l'extérieur (fig. 401). Achevons le parallélogramme $OQMM_1$. On a $OM_1 = QM = a$ et la droite MM_1 est perpendiculaire en H à Ox. L'homothétie $\left(H, \frac{\overline{HM}}{\overline{HM_1}}\right)$ transforme O en P, donc : $\frac{\overline{HM}}{\overline{HM_1}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{HO}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} = \mp \frac{b}{a}$.

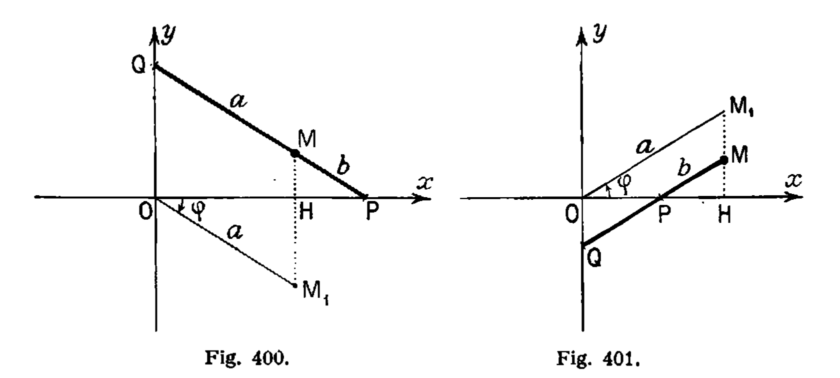


Fig. 400. Fig. 401.

Le lieu du point M_1 étant le cercle O (a), le lieu de M est donc l'ellipse d'axes AA′ = $2a$ et BB′ = $2b$ qui se déduit de ce cercle dans l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\mp \frac{b}{a}$.

Notons que si M est le milieu de PQ, le lieu de M est le cercle O (a).

• **458. Construction d'une ellipse à l'aide d'une bande de papier.** — Pour construire un point d'une ellipse dont les axes portés par les droites rectangulaires Ox et Oy ont pour longueurs respectives AA′ = $2a$ et BB′ = $2b$ (fig. 402), on marque sur le bord d'une bande de papier fort, de préférence dans cet ordre, les points P, M, Q tels QM = a et MP = b. En plaçant simultanément P sur Ox et Q sur Oy on obtient en M un point de l'ellipse. La répétition de cette opération conduit à un tracé par points relativement rapide de l'ellipse.

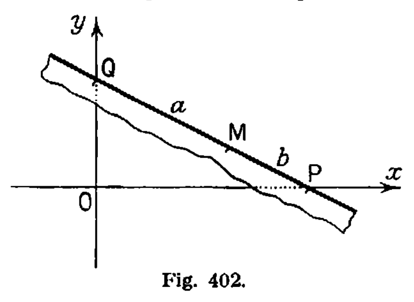


Fig. 402.

• **459. Théorème.** — ***Deux diamètres conjugués* OM *et* OM′ *de l'ellipse correspondent à deux positions rectangulaires* PQ *et* P′Q′ *de la bande de papier.***

Cela résulte de ce que les rayons correspondants OM_1 et OM'_1 du cercle principal (n° 454) sont rectangulaires.

Les deux triangles rectangles OPQ et OQ′P′ (fig. 403) ayant même hypoténuse et des angles aigus directement égaux sont superposables dans une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. L'homologue de M′ est le point N symétrique de M par rapport au milieu ω de PQ. Achevons le rectangle POQI. Le quadrilatère OMIN est un parallélogramme et on a : MI = ON = OM′. D'autre part MI est perpendiculaire à OM′, donc à la tangente en M à l'ellipse (n° 454).

Le segment MI *est normal en* M *à l'ellipse et égal au demi-diamètre* OM′ *conjugué de* OM

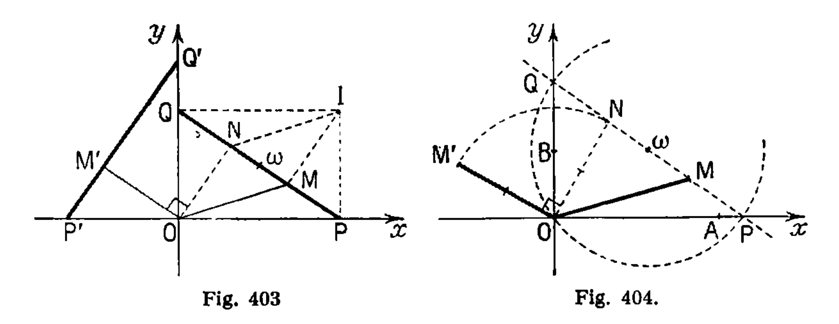


Fig. 403 Fig. 404.

• **460. Application.** — ***Construire les axes d'une ellipse dont on connaît en position deux demi-diamètres conjugués* OM *et* OM′.**

Construisons le point N qui se déduit du point M′ dans une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (fig. 404). La droite MN est la position de la bande de papier correspondant au point M. Le milieu ω de MN est celui de PQ et l'on a ωP = ωQ = ωO. Le cercle de centre ω passant par O coupe donc MN en P et Q. Les axes Ox et Oy de l'ellipse sont les droites OP et OQ. La longueur du demi-axe OA porté par OP est égale à QM et la longueur du demi-axe OB porté par OQ égale à PM. On obtient ainsi les sommets A, A′, B, B′ de l'ellipse. Le problème admet une solution unique. Donc :

Une ellipse est déterminée par deux demi-diamètres conjugués donnés.

La construction précédente, permet en Géométrie descriptive de construire la projection d'un cercle connaissant les projections de deux diamètres rectangulaires de ce cercle.

• **461. Aire de l'ellipse.** — L'aire S_0 du cercle (C), dont l'ellipse est la projection orthogonale, est la limite de l'aire Σ_0 d'un polygone régulier convexe inscrit lorsque le nombre de ses côtés augmente indéfiniment. Il en résulte

que l'aire S de l'ellipse est la limite de l'aire Σ de la projection du polygone précédent et comme $\Sigma = \Sigma_0 \cos \alpha$. On a :

$$S = S_0 \cos \alpha = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab.$$

$$\boxed{S = \pi ab.}$$

On voit que $S^2 = \pi a^2 . \pi b^2$. L'aire de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les aires de son cercle principal et de son cercle secondaire.

APPLICATIONS

• **462. Méthode de démonstration.** — A toute propriété du cercle, se conservant en projection orthogonale, correspond une propriété analogue de l'ellipse. Inversement pour démontrer une propriété de l'ellipse, il est toujours bon de regarder si cette propriété ne découle pas ainsi d'une propriété analogue du cercle. Ceci est surtout avantageux lorsqu'il s'agit d'une propriété non focale, ne faisant pas intervenir les foyers :

Exemples. — 1° *La droite qui joint le centre de l'ellipse au milieu d'une corde* MM' *passe par le point* P *commun aux tangentes en* M *et* M'.

2° *Les cordes joignant un point* A *de l'ellipse aux extrémités d'un diamètre* BC *de l'ellipse ont des directions conjuguées par rapport à l'ellipse.*

Ces cordes AB et AC sont dites supplémentaires.

3° *Les droites joignant les sommets d'un triangle aux points de contact d'une ellipse inscrite dans ce triangle sont concourantes.*

Ces propriétés résultent des propriétés analogues du cercle (cf. n° 97).

• **463. Théorème de la Hire.** — ***Lorsque les sommets* A *et* B *d'une plaque triangulaire* ABM *décrivent respectivement deux droites fixes* Ou *et* Ov *le lieu du sommet* M *est une ellipse de centre* O.**

La longueur AB et l'angle $(\overline{OA}, \overline{OB})$ étant constants (fig. 405), le cercle AOB de centre ω

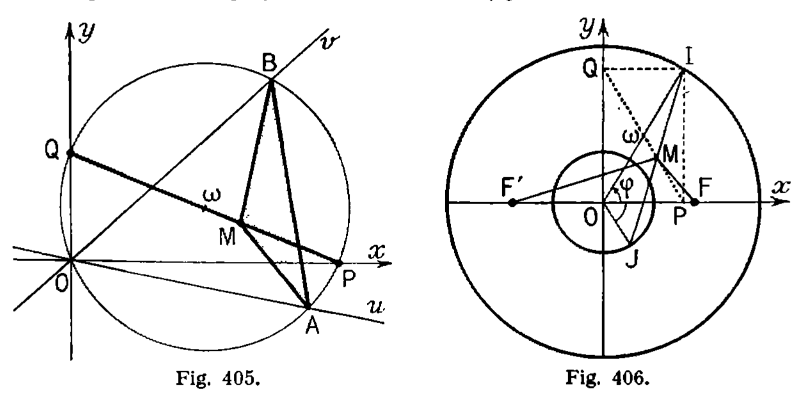


Fig. 405. Fig. 406.

a un rayon constant et coupe la droite ωM en deux points P et Q invariablement liés au triangle ABM. Les arcs $\overset{\frown}{AP}$ et $\overset{\frown}{AQ}$ restant constants, il en est de même des angles (OA, OP)

et (OA, OQ). Les points P et Q décrivent donc deux droites Ox et Oy, rectangulaires puisque l'angle (OP, OQ) est droit. Le point M, étant un point déterminé du segment de longueur constante PQ, décrit donc (n° 457) une ellipse de centre O dont les demi-axes portés par Ox et Oy ont pour longueurs respectives QM et MP.

● **464. Cercles de Chasles d'une ellipse.** — Etant donnée une ellipse (E) d'axes Ox et Oy (fig. 406), considérons les deux cercles (Γ) et (Γ') de centre O et de rayons respectifs $a + b$ et $a - b$, puis sur le premier le point I tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OI}) = \varphi$ et sur le second le point J tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OJ}) = -\varphi$. On obtient pour coordonnées de ces points :

$$I \begin{cases} x = (a+b)\cos\varphi \\ y = (a+b)\sin\varphi \end{cases} \qquad J \begin{cases} x = (a-b)\cos\varphi \\ y = (b-a)\sin\varphi. \end{cases}$$

Le milieu M de IJ a donc (n° 31) pour coordonnées :

$$x = a\cos\varphi \quad \text{et} \quad y = b\sin\varphi.$$

Lorsque φ *varie le lieu du milieu* M *de* IJ *est donc l'ellipse* E.

Soient P et Q les projections de I sur Ox et Oy. La droite PQ passe par le milieu ω de OI et est parallèle à OJ. Elle passe donc par le milieu M de IJ et on a : $\omega P = \omega Q = \frac{a+b}{2}$ et $\omega M = \frac{a-b}{2}$ d'où $PM = b$ et $QM = a$. Le segment PQ est donc la bande de papier relative à M. Par suite (n° 459) :

La droite IJ *est la normale en* M *à l'ellipse et les segments* IM *et* JM *sont égaux au demi-diamètre* OM' *conjugué de* OM.

La relation $c^2 = (a+b)(a-b)$ montre que $\overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2 = OI.OJ$. Le quadrangle FF'IJ est harmonique car FF' est bissectrice intérieure de l'angle IOJ (n° 354) et :

$$OM'^2 = \overline{MI}^2 = \overline{MJ}^2 = MF.MF'.$$

SUJETS D'EXAMEN

— Equation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie. (*Bordeaux*, ME et MT.)

— La projection d'un cercle est une ellipse. (*Montpellier*, ME.)

— Ellipse et cercle considérés comme projection orthogonale l'un de l'autre. (*Toulouse*, ME et MT.)

EXERCICES

Construire une ellipse connaissant :

● **546.** Les sommets de l'un des axes et un point.

● **547.** Les sommets de l'un des axes et une tangente.

● **548.** Les droites qui portent les axes et deux points.

● **549.** Les droites qui portent les axes et deux tangentes.

● **550.** Le support de l'un des axes, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

● **551.** Le support de l'un des axes, deux points et la tangente en l'un d'eux.

● **552.** Trouver l'enveloppe d'une droite variable qui découpe dans la surface d'une ellipse donnée un segment d'aire constante.

● **553.** Inscrire dans une ellipse donnée un triangle admettant le centre O de l'ellipse pour centre de gravité. Enveloppe des côtés des triangles possédant cette propriété.

● **554.** Par un point variable M d'une ellipse donnée on mène les cordes MN et MP parallèles à deux diamètres conjugués fixes. Enveloppe de la corde NP.

● **555.** Trouver l'enveloppe des côtés des parallélogrammes MNPQ inscrits dans une ellipse donnée et admettant pour diagonales deux diamètres conjugués. Lieu des sommets du parallélogramme formé par les tangentes en M, N, P et Q.

● **556.** Par un point fixe S intérieur à une ellipse E de centre O on mène les cordes MP et NQ parallèles à deux directions conjugués de l'ellipse.

1° Trouver le lieu du milieu I de MN et de l'intersection J de MN avec la parallèle à OI menée par S.

2° Enveloppe des côtés du quadrilatère MNPQ en supposant S sur un des axes de l'ellipse E.

● **557.** Soient OM et ON deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse. Deux droites de directions conjuguées variables Ou et Ov coupent la tangente en M en P et Q et la droite PQ coupe les axes Ox et Oy de l'ellipse en R et S. Démontrer que :

$a)$ $\overline{MP}.\overline{MQ} = -\overline{ON}^2$ $b)$ $\dfrac{a^2}{\overline{OR}^2} + \dfrac{b^2}{\overline{OS}^2} = 1.$

● **558.** On désigne par M et N les extrémités de deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse E, par P et Q leurs projections sur l'axe focal Ox et par R et S leurs projections sur l'axe non focal Oy. Démontrer que :

1° $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2$ 2° $\overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 = b^2$ 3° $|\overline{OP}.\overline{OS} - \overline{OQ}.\overline{OR}| = ab.$

● **559.** Soient M et M′ les extrémités de deux demi-diamètres rectangulaires d'une ellipse d'axe focal Ox tel que : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'}) = (\theta + \frac{\pi}{2})$.

1° Exprimer les coordonnées de M et M′ en fonction de θ, $\rho = OM$ et $\rho' = OM'$ et démontrer la relation $\dfrac{1}{\overline{OM}^2} + \dfrac{1}{\overline{OM'}^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

2° Soit H la projection du centre O sur MM′. Calculer $\overline{OH}^2$ et trouver l'enveloppe des côtés des losanges inscrits dans l'ellipse.

● **560.** On considère un point M d'une ellipse de foyers F et F′ et de centre O. On pose $MF = \rho$, $MF' = \rho'$ et on désigne par θ l'angle FMF′ et par M′ l'extrémité du demi-diamètre conjugué de OM.

1° Démontrer que $\rho\rho' \cos^2 \dfrac{\theta}{2} = b^2$ et calculer ρ et ρ' en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.

2° Démontrer que $\overline{OM}^2 = a^2 - b^2 \text{tg}^2 \dfrac{\theta}{2}$ et en déduire que : $MF.MF' = \overline{OM'}^2$

● **561.** 1° Démontrer que la puissance d'un point M d'une ellipse par rapport au cercle principal est proportionnelle au carré de sa distance au grand axe.

2° Montrer que la longueur de la tangente menée du point M au cercle secondaire est proportionnelle à sa distance au petit axe.

3° Construire une ellipse connaissant deux points de la courbe et soit le cercle principal soit le cercle secondaire.

● **562.** Un cercle (C) de centre O et de rayon R situé dans un plan P se projette orthogonalement sur un plan Q suivant une ellipse E de foyers F et F′. Les droites Δ et Δ', perpendiculaires en F et F′ au plan Q sont dites *droites focales* du cercle C (exercice 505).

1° En désignant par A l'intersection de Δ et du plan P et par α l'angle aigu de Δ et du plan P, montrer que : $OA = R \cos\alpha$.

2° Démontrer que la somme des distances d'un point M du cercle (C) aux droites focales parallèles Δ et Δ' est égale à 2R.

● **563.** 1° Démontrer que deux ellipses, homothétiques par rapport à leur centre commun, découpent sur toute sécante commune des cordes de même milieu.

2° Trouver le lieu du milieu M d'une corde AB d'une ellipse issue d'un point fixe P.

● **564.** 1° Soient M_1 et M_2 les points du cercle principal et du cercle secondaire homologues d'un point donné M d'une ellipse. Démontrer que si M_1 et M_2 sont alignés avec le centre O de l'ellipse le cercle MM_1M_2 est tangent au cercle principal et au cercle secondaire.

2° Construire une ellipse connaissant son centre, les longueurs $2a$ et $2b$ de ses axes et un point donné M. Peut-on retrouver cette construction à l'aide de la bande de papier?

● **565.** Le plan étant rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy.

1° Démontrer que dans une ellipse E de centre O dont les axes portés par Ox et Oy ont pour longueurs respectives $2a$ et $2b$, le produit des coefficients angulaires de deux directions conjuguées est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$.

2° Conséquence pour les droites joignant un point M de l'ellipse E aux extrémités A et A' d'un diamètre quelconque de l'ellipse?

3° Les points A et A' symétriques par rapport à O étant donnés, déterminer et construire le lieu des points M tels que le produit des coefficients angulaires de AM et de A'M soit égal à $-k^2$ (k désignant un rapport donné).

● **566.** 1° Soient AX et A'X' deux tangentes d'une ellipse parallèles au demi-diamètre OB de cette ellipse. Les droites AX et A'X' coupent en P et P' la tangente en un point variable M de l'ellipse et coupent en Q et Q' les droites A'M et AM. Démontrer que AA', PP' et QQ' sont concourantes en un point S tel (PP'MS) $= -1$, que P et P' sont les milieux de AQ et A'Q' et que l'on a :

$$\overline{AP}.\overline{A'P'} = \frac{1}{4}\overline{AQ}.\overline{A'Q'} = \overline{OB}^2.$$

2° On se donne, sur deux axes parallèles AX et A'X', deux points P et P' variables tels que $\overline{AP}.\overline{A'P'} = k^2$ (k longueur donnée). Trouver l'enveloppe Γ de la droite PP' et préciser son point de contact M. Trouver le lieu Γ' du point de rencontre M' de A'P et de AP' et préciser la tangente en M' à Γ'.

3° Démontrer que la projection orthogonale ou oblique d'une ellipse sur un plan est une ellipse.

● **567.** 1° Deux cordes AB et CD d'une ellipse issues du point P sont respectivement parallèles aux demi-diamètres OI et OJ. Démontrer que :

$$\frac{\overline{PA}.\overline{PB}}{\overline{OI}^2} = \frac{\overline{PC}.\overline{PD}}{\overline{OJ}^2}.$$

2° *Pour que quatre points* A, B, C, D *d'une ellipse appartiennent à un même cercle il faut et il suffit que les cordes* AB *et* CD *soient également inclinées sur les axes.*

3° Démontrer que sur l'ellipse d'équations paramétriques : $x = a\cos\theta$; $y = b\sin\theta$, la condition précédente se traduit par la relation :

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C + \theta_D = 0 \text{ (à } 2k\pi \text{ près).}$$

● **568.** Utiliser la propriété précédente pour construire :

1° Le quatrième point D commun à une ellipse et au cercle passant par trois points A, B, C de cette courbe. Cas où A et B sont confondus? Cas où le point C vient se confondre avec les points A et B déjà confondus?

2° Les points C et D où se recoupent une ellipse et un cercle passant par deux points A et B de cette ellipse distincts ou confondus (on recherchera le milieu de la corde CD)

● **569.** La normale et la tangente en un point M d'une ellipse de foyers F et F', coupent l'axe focal Ox en N et T, l'axe non focal Oy en N' et T'.

1° Montrer que le cercle MN'T' passe par F et F' et que l'on a

$$\overline{OT}.\overline{ON} = c^2 \quad \text{et} \quad \overline{OT'}.\overline{ON'} = -c^2.$$

2° Mener les normales à l'ellipse issues d'un point N de l'axe Ox ou d'un point N' de l'axe Oy. Discuter.

3° On considère le cercle Γ de centre T' passant par F et qui coupe MN en I et J. Démontrer que le quadrangle IJFF' est harmonique et que l'on a :

$$OI.OJ = c^2 \quad \text{et} \quad OI + OJ = MF + MF' = 2a.$$

Calculer OI et OJ et en déduire les lieux de I et J.

● **570.** On considère une ellipse E de centre O et deux diamètres conjugués variables Ou et Ov coupant en M et N une droite donnée Δ. Soit I le point d'intersection de Δ avec le diamètre conjugué de la direction Δ.

1° Démontrer que le produit $\overline{IM}.\overline{IN}$ est constant et négatif, puis que le cercle OMN recoupe OI en un point fixe J.

2° Les droites Ou et Ov recoupent en P et Q un cercle donné quelconque γ passant par O. Démontrer que PQ passe par un point fixe K intérieur à γ.

3° Par un point A d'une ellipse Γ on mène deux sécantes rectangulaires variables AB et AC. Démontrer en projetant Γ suivant un cercle γ, que la corde BC passe par un point fixe intérieur ω situé sur la normale en A à l'ellipse Γ (*Théorème de Frégier*).

● **571.** On connaît deux couples de directions conjuguées d'une ellipse E de centre O donné.

1° Utiliser la propriété démontrée au 2° de l'exercice précédent pour construire les droites Ox et Oy, supports des axes de l'ellipse et la direction conjuguée d'une direction donnée δ.

2° Acheverla construction de l'ellipse connaissant un point donné ou une tangente.

● **572.** On considère une ellipse (C) définie par l'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soient F_1 et F_2 ses foyers. Considérons un point M de (C), tel que l'angle F_1MF_2 des rayons vecteurs F_1M et F_2M soit égal à une valeur donnée φ.

1° Exprimer les quantités $\rho_1 = F_1M$ et $\rho_2 = F_2M$ en fonction de a, b et φ.

2° Exprimer les coordonnées x_0, y_0 du point M en fonction de a, b et φ.

3° On pose $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\cos \varphi = \frac{1}{3}$; trouver l'angle que la tangente à (C), au point M correspondant, fait avec l'axe Ox. *(Besançon.)*

● **573.** On considère dans le plan un triangle ABC dont les sommets B et C sont fixes, A étant variable de façon que $b + c$ reste constant et égal à une longueur donnée l.

1° On appelle P, T, T' les points de contact du cercle exinscrit dans l'angle B avec les côtés BC, AB et AC respectivement. Montrer que P est fixe et est l'un des sommets de l'ellipse décrite par le point A. Quels sont les lieux de T et T'?

2° Montrer que le produit $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ reste constant.

3° Si l'on appelle ω le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et H son point de contact avec le côté BC, montrer que le rapport $\frac{\overline{H\omega}^2}{\overline{HB}.\overline{HC}}$ reste constant. En déduire que le lieu de ω est une ellipse de grand axe BC. *(Clermont.)*

● **574.** Soient une ellipse E de centre O, de foyers F, F', de grand axe AA' ($OA = a$, $OF = c$), M un point de E, m sa projection sur AA', T et N les points où la tangente et la normale en M coupent respectivement AA'.

1° Etablir les formules : $NF = \frac{c}{a} MF$; $\overline{Om}.\overline{OT} = a^2$; $\overline{ON} = \frac{c^2}{a^2} \overline{Om}$.

(On pourra démontrer la seconde en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle.) Construire M, connaissant N. Discuter.

2° Dans quel rapport le centre I du cercle inscrit au triangle FMF' divise-t-il MN? Les coordonnées de M et de I par rapport aux axes de symétrie de l'ellipse étant respectivement (x, y) et (X, Y), montrer que les rapports x/Y et y/Y restent constants quand M décrit E, et en déduire le lieu de I. *(Dijon.)*

● **575.** On considère une ellipse dont les extrémités du grand axe sont A'A, du petit axe B'B. A'A = $2a$, B'B = $2b$. D'un point C pris sur la droite A'A on mène une tangente CD à l'ellipse et la tangente CD' au cercle principal du même côté que CD par rapport à la droite A'A. Soient M et M' les points de contact de ces tangentes respectivement avec l'ellipse et le cercle principal et D et D' les points de rencontre des tangentes avec la droite BB'. Soient φ et φ' les angles aigus que font respectivement ces tangentes avec AA'.

1° Trouver la relation qui lie tg φ et tg φ'.

2° Trouver en fonction de a et φ' l'aire du triangle OCD' et l'aire du triangle OCD en fonction de a, b et φ.

3° Etudier la variation de l'aire OCD quand φ varie. Construire la tangente CD qui correspond au minimum de l'aire OCD.

4° F et F' désignant les foyers de l'ellipse, calculer, dans le cas où le triangle OCD est d'aire minimum, les angles F et F' du triangle MFF'. *(Egypte.)*

● **576.** Le problème propose l'étude d'une ellipse (E) dont on connaît le cercle principal (C) de centre O, de rayon R, et deux points a, b. On transforme le problème en une étude dans l'espace. Tout point m de (E) sera la projection orthogonale sur le plan de l'ellipse (E) d'un point M d'une sphère (Σ) de centre O et de rayon R.

1° Calculer la longueur mM et l'angle (Om, OM), en fonction de la longueur Om = r, $0<r<R$. Que décrit M quand m décrit (E)?

2° Déterminer le grand axe de (E) en cherchant son point P d'intersection avec la droite ab. Exprimer $\frac{Pa}{Pb}$ en fonction de r_1=longueur Oa et r_2 = longueur Ob. Préciser le nombre de solutions.

3° F étant un foyer de (E), montrer géométriquement qu'il est à l'intersection de l'ellipse de cercle principal (C) et dont l'un des foyers est a, avec l'ellipse de cercle principal (C) et dont l'un des foyers est b.

Application. — On dispose d'une carte terrestre, projection orthogonale d'un hémisphère sur le plan de l'équateur. On va de A à B sur la terre en suivant le grand cercle défini par AB. On ne connaît que les deux projections a, b de A, B sur la carte. Construire sur la carte un rabattement du chemin terrestre suivi. *(Bordeaux.)*

DIX-NEUVIÈME LEÇON

HYPERBOLE

• **465. Définition.** — ***L'hyperbole est le lieu géométrique des points du plan dont la différence des distances à deux points fixes* F *et* F′ *est constante et égale à une longueur* 2*a*.**

Les points F et F′ sont les *foyers* de l'hyperbole (fig. 407) et les segments MF et MF′ les *rayons vecteurs* du point M de l'hyperbole. Ils vérifient la relation :

$$|MF' - MF| = 2a. \qquad (1)$$

La distance $FF' = 2c$ est la *distance focale*. L'inégalité $|MF - MF'| < FF'$ entraîne $a < c$ et le rapport $\frac{c}{a} = e > 1$ est l'*excentricité* de l'hyperbole.

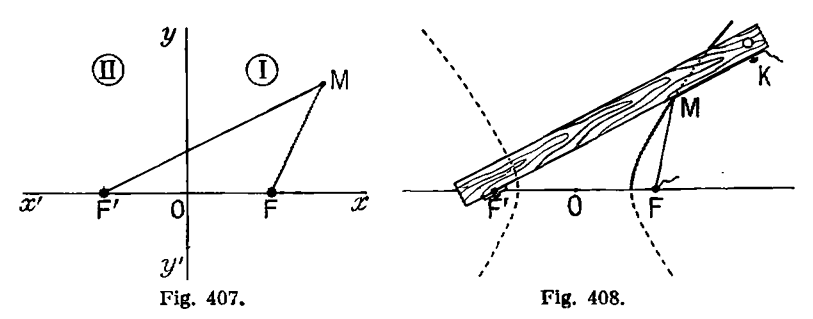


Fig. 407. Fig. 408.

Toute homothétie positive de rapport k transforme le triangle MFF′ en un triangle semblable $M_1F_1F_1'$ tel que $|M_1F_1' - M_1F_1| = 2ka$ et $F_1F'_1 = 2kc$. Le lieu de M_1 est par suite une hyperbole de même excentricité e que l'hyperbole proposée.

Toute courbe semblable à une hyperbole est une hyperbole de même excentricité.

• **466. Tracé continu de l'hyperbole.** — Considérons (fig. 408) une règle à laquelle est fixé un petit anneau lui permettant de pivoter sans glisser, autour d'une pointe piquée en F′, et un fil fin, souple, inextensible attaché d'une part à une pointe piquée en F et d'autre part à l'extrémité K de la règle. Si nous maintenons, le fil tendu à l'aide de la pointe du crayon placée en M contre la règle, cette pointe en se déplaçant décrit un arc de l'hyperbole de foyers F et F′, dont la longueur 2*a* est la différence entre la longueur F′K et la longueur $FMK = l$ du fil.

En retournant la règle puis en échangeant les rôles de F et F′ on obtient ainsi quatre arcs analogues, mais on ne peut obtenir toute la courbe car on est toujours limité par la longueur de la règle.

• **467. Branches de l'hyperbole.** — Désignons (fig. 407) par $x'x$ la droite FF′ par $y'y$ la médiatrice de FF′ et par O le milieu de FF′. La relation (1) du n° 465 se décompose en :

$$MF' - MF = 2a \quad (2) \qquad \text{et} \qquad MF - MF' = 2a \quad (3)$$

Les points qui vérifient la relation (2) sont situés dans le demi-plan (I) limité par $y'y$ et contenant F. Ceux qui vérifient la relation (3) sont situés dans le demi-plan (II) contenant F′. Comme il ne peut exister de points vérifiant les deux relations (2) et (3), l'hyperbole se compose de deux parties distinctes que l'on appelle les *branches de l'hyperbole.*

• **468. Construction par points de l'hyperbole.** — Pour obtenir des points de l'hyperbole il suffit (fig. 409) de prendre les intersections M et M′ de deux cercles de centres F et F′ dont les rayons respectifs ρ et ρ' vérifient la relation $|\rho' - \rho| = 2a$.

Puisque $FF' = 2c > 2a$, ces deux cercles se coupent effectivement si $\rho + \rho' \geqq FF' = 2c$, c'est-à-dire si le plus petit de leurs rayons est au moins égal à $c - a$. En faisant varier ρ et ρ' on obtient un tracé par points de l'hyperbole.

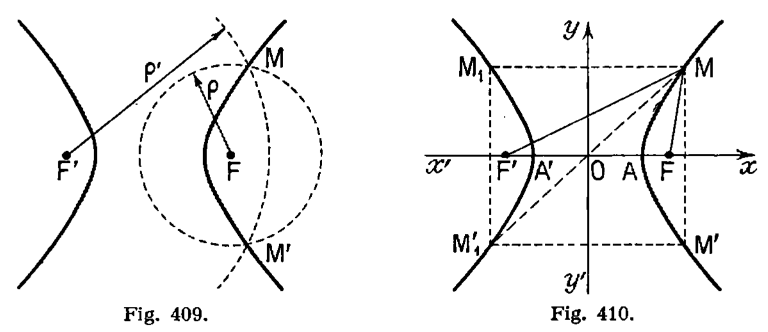


Fig. 409. Fig. 410.

Comme ρ et ρ' peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, il y a toujours des points de la courbe que l'on ne peut construire : *l'hyperbole possède des branches infinies.*

• **469. Symétries de l'hyperbole.** — Si un point M appartient à l'hyperbole (fig. 410) il en est de même des points M′, M_1 et M'_1 respectivement symétriques de M par rapport à $x'x$, $y'y$ et par rapport à O. L'hyperbole admet donc les droites $x'x$ et $y'y$ pour axes de symétries et le point O pour centre de symétrie.

L'axe de symétrie $x'x$ est appelé axe focal ou axe transverse, l'axe de symétrie $y'y$ axe non focal ou axe non transverse et le point O centre de symétrie de la courbe.

La symétrie $x'x$ transforme chaque branche en elle-même tandis que les symétries O et $y'y$ échangent ces deux branches. Deux points tels que M et M'_1 sont dits *diamétralement opposés* et le segment MM'_1 est un *diamètre* de l'hyperbole.

• **470. Sommets de l'hyperbole.** — Il n'y a aucun point M de l'hyperbole sur $y'y$ car cela conduirait à $|MF' - MF| = 0 \neq 2a$, ni sur les prolongements du segment FF' car cela conduirait à $|MF' - MF| = FF' \neq 2a$. Pour tout point M du segment FF' on a : $\overline{MF} + \overline{MF'} = 2\overline{MO}$ et $|MF' - MF| = 2MO$ Les points A et A' du segment FF' tels que $OA = OA' = a$ appartiennent à l'hyperbole et sont appelés *sommets de l'hyperbole* (fig. 410). La longueur $AA' = 2a$ est la longueur de l'axe focal de l'hyperbole.

• **471. Intérieur et extérieur de l'hyperbole.** — Etudions (fig. 411) comment varie la différence (MF' — MF) lorsque M décrit une demi-droite Kλ du demi-plan (I), perpendiculaire en K à Oy. Si $KM_1 < KM$, on a, dans le trapèze $F'FMM_1$ dont les diagonales se coupent en I :

$M_1F' < IM_1 + IF'$ et $MF < IM + IF$. Soit par addition :

$M_1F' + MF < MF' + M_1F$ d'où : $M_1F' - M_1F < MF' - MF$.

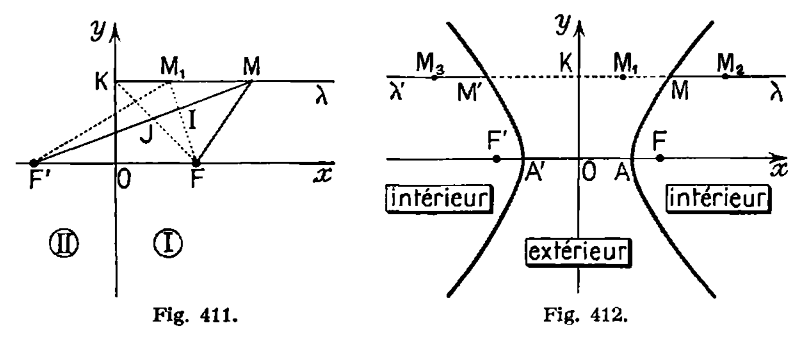


Fig. 411. Fig. 412.

La différence MF' — MF nulle lorsque M est en K augmente donc avec KM. Désignons par J le point de rencontre de KF et MF'. Puisque :

$MF < MJ + JF = MF' - JF' + JF$ on a : $JF' - JF < MF' - MF < FF'$.

Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Kλ, le point J vient en F et JF' — JF a pour limite $FF' = 2c$. Il en est donc de même de MF' — MF. Ainsi lorsque M décrit Kλ la différence MF' — MF croît de 0 à $2c$ et prend une fois et une seule la valeur $2a$ comprise entre 0 et $2c$. Par symétrie par rapport à Oy on voit que (fig. 412) sur une droite λ'λ parallèle à l'axe focal FF', il existe deux points M et M' de l'hyperbole, partageant cette droite en trois parties.

L'hyperbole partage le plan en trois régions contenant respectivement les points O, F ***et*** F'. La première est dite *extérieure* à l'hyperbole et les deux autres *intérieures* à l'hyperbole.

Tout point M_1 du segment MM' est extérieur. D'après ce qui précède, on a :

$|M_1F - M_1F'| < |MF' - MF| = 2a$ donc $\boxed{|M_1F' - M_1F| < 2a}$

Tout point M_2 de la demi-droite Mλ est intérieur ainsi que tout point M_3 de la demi-droite M'λ' et on a de même :

$\boxed{M_2F' - M_2F > 2a \quad | \quad M_3F - M_3F' > 2a.}$

Il en résulte, comme au n° 426 que :

Un point donné est extérieur ou intérieur à l'hyperbole suivant que la différence de ses distances aux foyers de cette hyperbole est inférieure ou supérieure à l'axe transverse AA' = 2a de cette hyperbole.

• 472. Théorème fondamental. — ***L'hyperbole est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à un cercle fixe et passant par un point fixe extérieur à ce cercle.***

1° Considérons (fig. 413 et 414) un point M de l'hyperbole de foyers F et F' et d'axe transverse égal à $2a$. Sur la demi-droite MF' portons dans le sens MF' une longueur $M\varphi = MF$. Le segment $F'\varphi$ étant égal à $2a$, le point φ appartient au cercle de centre F' et de rayon $2a$ qui laisse le foyer F à son extérieur. Le cercle de centre M passant par F est tangent en φ à ce cercle.

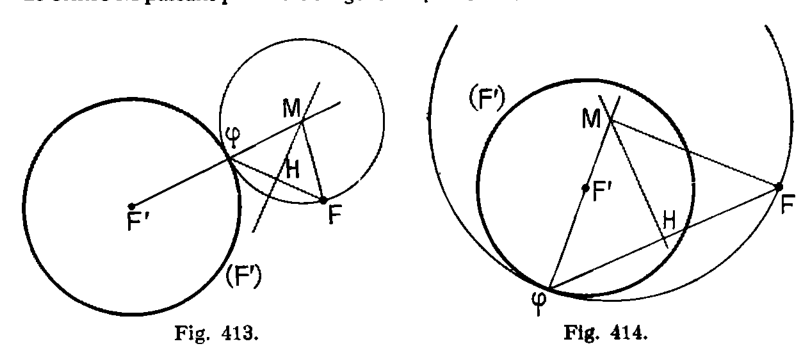


Fig. 413. Fig. 414.

2° Réciproquement considérons un cercle fixe de centre F' et de rayon $2a$, un point fixe extérieur F et un cercle de centre M, passant par F et tangent en φ au cercle F'. Quelle que soit la nature du contact, le point M appartient à l'un des prolongements du segment $F'\varphi$. On a donc : $|M\varphi - MF'| = F'\varphi$ c'est-à-dire puisque $M\varphi = MF$ et $F'\varphi = 2a$:

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Le point M appartient à l'hyperbole de foyers F et F' et dont l'axe transverse a pour longueur $2a$.

• 473. Cercles directeurs. — ***On appelle cercles directeurs de l'hyperbole les cercles ayant pour centres respectifs les foyers F et F' et pour rayon 2a.***

L'hyperbole est donc le lieu des centres des cercles passant par un foyer et tangents au cercle directeur relatif à l'autre foyer (fig. 413 et 414).

On appelle *cercle principal* de l'hyperbole, le cercle admettant l'axe focal AA' pour diamètre. C'est le cercle de centre O et de rayon a. Comme O est le milieu de FF' :

Le cercle principal est l'homologue du cercle directeur F' (2a) dans l'homothétie (F, 1/2).

Notons que cette homothétie transforme le cercle de centre M passant par F en un cercle de diamètre MF tangent au cercle principal.

• **474. Deuxième construction par points de l'hyperbole.** — Soit (fig. 415) un point quelconque φ du cercle directeur F′ (2*a*). La droite F′φ et la médiatrice de Fφ se coupent en général en un point M, centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle directeur F′. Le point M appartient donc à l'hyperbole. En répétant cette construction on obtient un nouveau tracé par points de l'hyperbole.

Discussion. — Désignons par T et T′ les points de contact du cercle directeur F′ avec les tangentes FT et FT′ issues du foyer F. Lorsque φ appartient à l'arc TT′, intérieur au cercle FTF′T′, l'angle FφF′ est obtus et le point φ est situé entre M et F′. On a : MF′ — MF = 2*a* et le point M appartient à la branche la plus voisine de F.

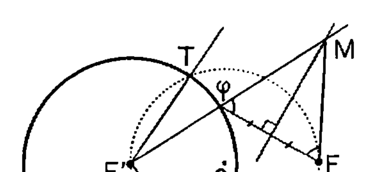




Fig. 415.

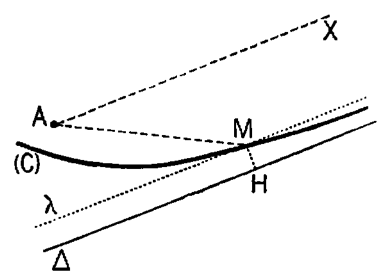


Fig. 416.

Lorsque φ appartient à l'arc TT′ extérieur au cercle FTF′T′, l'angle FφF′ est aigu (fig. 414) et on a : MF — MF′ = 2*a*. Le point M appartient à l'autre branche.

Lorsque φ tend vers T ou T′, l'angle FφF′ devient droit et le point M s'éloigne indéfiniment dans la direction F′T ou F′T′.

Les directions F′T *et* F′T′ *sont dites directions asymptotiques de l'hyperbole.*

• **475. Définition.** — On dit qu'une droite Δ est *asymptote* à une courbe (C), si la distance MH d'un point M de cette courbe à la droite Δ, tend vers zéro lorsque le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe (fig. 416).

Si A désigne un point fixe donné, la droite AM admet pour position limite la parallèle AX à Δ. L'asymptote Δ est parallèle à une direction asymptotique AX de la courbe (C). D'autre part l'asymptote Δ constitue la position limite de la droite Mλ, menée par M parallèlement à la direction asymptotique AX.

• **476. Théorème.** — ***L'hyperbole admet deux asymptotes issues de son centre et parallèles à ses directions asymptotiques.***

La parallèle à F′T menée par O (fig. 417) est la médiatrice OS du segment FT. Soit M un point de l'hyperbole, centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle directeur F′. La droite FT coupe OS en K, recoupe le cercle M en G et coupe en I la tangente commune en φ aux cercles F′ et M. La distance MH de M à la droite OS est égale à sa projection *m*K sur FT. Comme *m* et K sont les milieux de FT et FG on a : $MH = mK = \frac{1}{2}\,GT$.

Lorsque le point φ vient se confondre avec T, le point M s'éloigne indéfiniment sur l'hyperbole. Le point I, pôle de $T\varphi$ par rapport au cercle F', vient se confondre avec T et comme

$$\overline{IT}^2 = \overline{I\varphi}^2 = \overline{IF}\cdot\overline{IG}$$

on voit que IG tend vers zéro. Le point G vient en T, ce qui montre que GT tend vers zéro, et il en est de même de sa moitié MH. La droite OS est donc une asymptote de l'hyperbole. Il en est de même de OS' médiatrice de FT'.

Notons que OS est la position limite de la droite Mm, parallèle à la direction asymptotique F'T lorsque M s'éloigne indéfiniment.

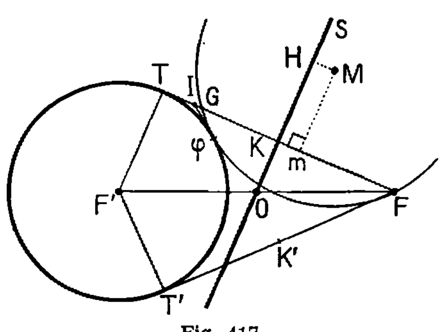


Fig. 417.

• **477. Position et angle des asymptotes.** — L'homothétie (F, 1/2) montre (fig.418) que les asymptotes passent par les points de contact K et K' des tangentes au cercle principal issues du foyer F. Autrement dit :

Les projections d'un foyer sur les asymptotes sont situées sur le cercle principal.

Ces asymptotes coupent le cercle de diamètre FF' aux sommets d'un rectangle dont les côtés opposés CC' et DD' sont les perpendiculaires en A et A' à FF' (égalité des triangles OFK et OCA). Les côtés CD et C'D' sont perpendiculaires en B et B' à l'axe non focal. On pose : OB = OB' = b. Comme $\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ on obtient :

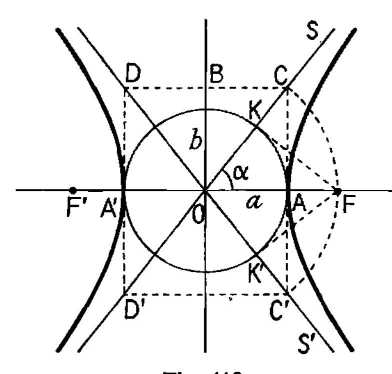


Fig. 418.

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Le segment BB' est appelé *axe non transverse* de l'hyperbole. L'angle COC' = 2α est l'angle des asymptotes l'on a :

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \quad \sin\alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

d'où : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2ab}{c^2}$ et $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{c^2}\cdots$

Lorsque les asymptotes sont rectangulaires, *l'hyperbole est dite équilatère.* Dans ce cas : $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $a = b = \frac{c}{2}\sqrt{2}$. D'où : $e = \sqrt{2}$.

Dans une hyperbole équilatère les asymptotes sont les bissectrices de l'angle formé par les axes et l'excentricité est égale à $\sqrt{2}$.

• **478. Intersection d'une droite et d'une hyperbole.** — Les points communs à une droite Δ et à l'hyperbole de foyers F et F′ (fig. 419) sont les centres des cercles tangents au cercle directeur F′, passant par F et par le point F_1, symétrique de F par rapport à Δ. D'après l'étude faite au n° 326, on mène par F et F_1 un cercle quelconque coupant le cercle F′ en C et D, puis, par le point I

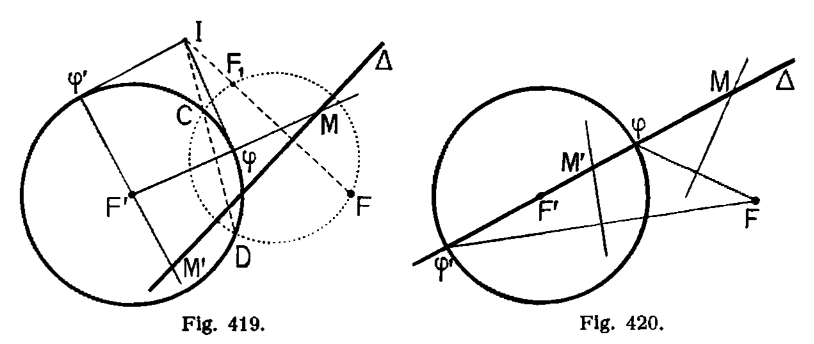


Fig. 419. Fig. 420.

commun à CD et à FF_1, les tangentes Iφ et Iφ′ au cercle F′. Les points cherchés M et M′ sont les intersections de Δ avec F′φ et F′φ′. Toutefois lorsque la droite Δ passe par F′, elle coupe le cercle F′ en φ et φ′ (fig. 420) et les points M et M′ sont les intersections de Δ avec les médiatrices de Fφ et Fφ′.

• **479. Discussion.** — 1° D'après la discussion du n° 326, les points φ et φ′ existent si F et F_1 sont tous deux extérieurs au cercle F′. Ils sont confondus si F_1 est sur le cercle F′ et n'existent pas si F_1 est intérieur au cercle F′. Chaque point φ conduit à un point d'intersection M sauf lorsque F′φ et Δ sont parallèles. Ceci a lieu lorsque φ est en T ou T′ donc lorsque Δ est parallèle à une asymptote.

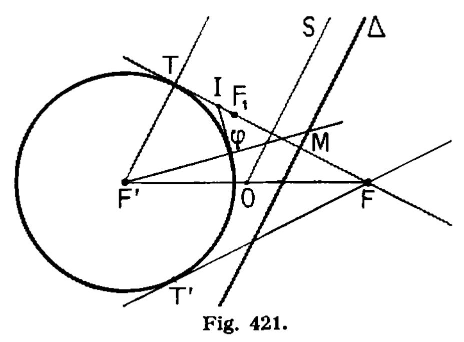


Fig. 421.

L'homothétie (F, 1/2) montre que :

Une hyperbole et une droite Δ non parallèle à une asymptote ont deux points communs distincts si la projection H *d'un foyer sur* Δ *est extérieure au cercle principal, un seul point si le point* H *est sur le cercle principal et pas de point commun si le point* H *est intérieur au cercle principal.*

2° Si Δ est parallèle à une asymptote (fig. 421) les deux points φ et φ′ existent mais le second est en T ou T′. Le point M′ correspondant est rejeté à l'infini

et il reste un seul point d'intersection M. Si Δ est une asymptote φ et φ′ sont confondus en T ou T′ les deux points M et M′ sont rejetés à l'infini.

Une asymptote n'a aucun point commun avec l'hyperbole et une parallèle à une asymptote coupe toujours l'hyperbole en un point.

TANGENTES A L'HYPERBOLE

• **480. Existence de la tangente en un point.** — Considérons (fig. 422) un point donné M et un point M′ quelconque sur une même branche d'une hyperbole de foyers F et F′. Les points M et M′ sont les centres de deux cercles passant par F et respectivement tangents en φ et φ′ au cercle directeur F′ (2*a*). Ces cercles se recoupent en un point F_1 symétrique de F par rapport à la sécante MM′. La droite FF_1 et les tangentes en φ et φ′ au cercle F′ sont concourantes en un point I, centre radical des trois cercles M, M′ et F′. Lorsque le point M′ se déplaçant sur l'hyperbole, vient se confondre avec le point M, le point φ′ vient en φ. Il en

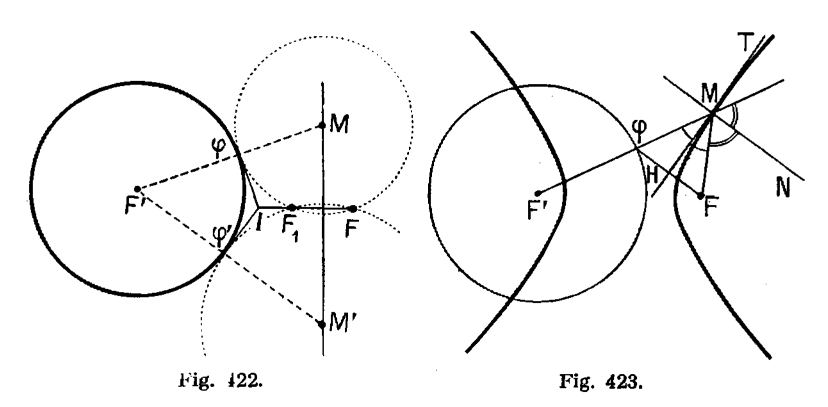


Fig. 422. Fig. 423.

est de même du point I, pôle de la droite φφ′ par rapport au cercle directeur F′. La relation $\overline{IF}\,.\,\overline{IF_1} = \overline{I\varphi}^2$ montre que IF_1 tend vers zéro et que le point F_1 vient également se confondre avec le point φ. La droite MM′ pivote autour de M et admet une position limite médiatrice du segment Fφ. Le triangle FMφ étant isocèle (fig. 423) et les vecteurs MF′ et Mφ de même sens, cette position limite est la bissectrice intérieure de l'angle FMF′.

En tout point d'une hyperbole, il existe une tangente qui est bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs de ce point.

Il en résulte que les tangentes aux sommets A et A′ de l'hyperbole sont les perpendiculaires en A et A′ à l'axe focal.

La normale en M *à l'hyperbole est par suite la bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs.*

• **481. Corollaires.** — 1° La deuxième construction par points de l'hyperbole du n° 474 fournit en même temps que le point M, la médiatrice HM du segment Fφ correspondant, c'est-à-dire la tangente en M à l'hyperbole. Notons que :

Le symétrique d'un foyer par rapport à une tangente à l'hyperbole, le point de contact de cette tangente et l'autre foyer sont trois points alignés.

2° Si dans la construction précédente le point φ tend vers T, le point M s'éloigne indéfiniment et la position limite de la tangente en M, médiatrice de Fφ, est la médiatrice de FT, c'est-à-dire l'asymptote OS. C'est pourquoi on dit que :

Une asymptote de l'hyperbole est la tangente en un point à l'infini de la courbe.

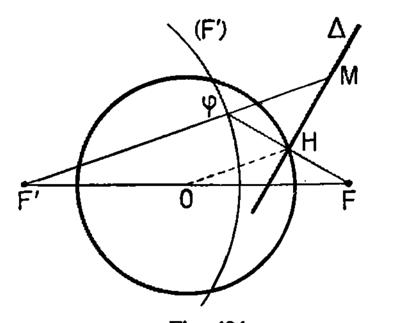
Dans les théorèmes qui suivent nous ne ferons pas de distinction entre une asymptote et une tangente ordinaire.

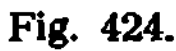
• **482. Propriétés de la tangente.** — 1° L'étude du n° 480 montre que la tangente en un point M de l'hyperbole (fig. 424) est médiatrice d'un segment Fφ joignant le foyer F à un point φ du cercle directeur F'. Réciproquement la construction du n° 474 montre qu'une telle médiatrice est une tangente ou une asymptote à l'hyperbole.

Pour qu'une droite soit tangente à une hyperbole, il faut et il suffit que le symétrique d'un foyer par rapport à cette droite appartienne au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

2° Le lieu de φ étant le cercle directeur F', l'homothétie (F, 1/2) montre que le lieu du milieu H de Fφ est le cercle principal (n° 473). Donc :

Le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes à une hyperbole est le cercle principal de cette hyperbole.




Fig. 424.

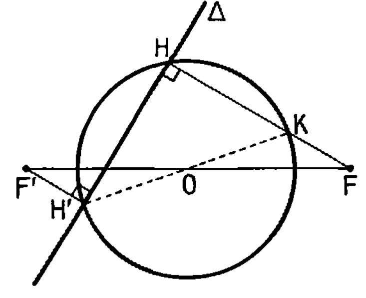


Fig. 425.

Autrement dit (n° 435) : *La podaire de l'hyperbole par rapport à l'un de ses foyers est son cercle principal.*

D'autre part, de la discussion du n° 479, il résulte qu'une tangente à l'hyperbole n'a pas d'autre point commun avec la courbe en dehors de son point de contact :

Une droite est tangente, sécante ou extérieure à une hyperbole suivant que la projection d'un foyer sur cette droite est située sur le cercle principal, à l'extérieur ou à l'intérieur de ce cercle.

3° Désignons par H et H′ les projections des foyers F et F′ de l'hyperbole sur une droite donnée Δ (fig. 425). Le milieu O de FF′ appartient à la médiatrice de HH′ et comme l'angle H′HF est droit, le cercle de centre O, passant par H et H′, recoupe FH en un point K diamétralement opposé à H′. La puissance de F par rapport à ce cercle permet d'écrire : $\overline{FH}\cdot\overline{FK} = \overline{OF}^2 - \overline{OH}^2$ et puisque $\overrightarrow{FK} = -\overrightarrow{F'H'}$ on a : $\overline{FH}\cdot\overline{F'H'} = -\overline{FH}\cdot\overline{FK} = \overline{OH}^2 - c^2$.

Pour que la droite Δ soit tangente à l'hyperbole il faut et il suffit que le point H appartienne au cercle principal O (a) donc que l'on ait : $\overline{OH} = a$, c'est-à-dire, d'après la relation précédente : $\overline{FH}\cdot\overline{F'H'} = a^2 - c^2$. Soit :

$$\boxed{\overline{FH}\cdot\overline{F'H'} = -b^2}$$

Pour qu'une droite soit tangente à une hyperbole, il faut et il suffit que le produit algébrique des distances des foyers à cette droite soit égal à $-b^2$.

• **483. Générations tangentielles de l'hyperbole.** — Chacune des propriétés caractéristiques précédentes permet de reconnaître que l'enveloppe d'une droite est une hyperbole.

1° *L'enveloppe de la médiatrice d'un segment joignant un point variable d'un cercle donné* F′ *à un point fixe extérieur* F *est une hyperbole.*

Le point F est un foyer de cette hyperbole et le cercle F′, le cercle directeur relatif à l'autre foyer (fig. 424).

2° ***Lorsque le sommet d'un angle droit décrit un cercle*** O, ***un de ses côtés passant par un point fixe extérieur*** F, ***le second côté enveloppe une hyperbole.***

Cette hyperbole admet le point F pour foyer et le cercle O pour cercle principal. Autrement dit : *L'antipodaire d'un cercle par rapport à un point extérieur est une hyperbole.*

Notons que l'on montre, comme au n° 435, que le théorème reste vrai lorsqu'on remplace l'angle droit par un angle constant $(MF, Mx) = \alpha$.

3° ***L'enveloppe d'une droite dont le produit algébrique des distances à deux points fixes*** F ***et*** F′ ***est égal à une constante négative $-b^2$ est une hyperbole.***

Les points F et F′ sont les foyers de cette hyperbole (fig. 425) et elle admet pour axe axe non transverse BB′ = $2b$ (n° 477).

• **484. Tangentes parallèles à une direction donnée.** — Considérons l'hyperbole définie par un foyer F et le cercle directeur F′ $(2a)$ et soit δ une direction donnée (fig. 426). Le symétrique φ du foyer F par rapport à toute tangente Δ parallèle à δ, se trouve sur le cercle F′ et sur la perpendiculaire menée de F à δ. A tout point φ commun à cette perpendiculaire FK et au cercle F′ correspond une tangente à l'hyperbole médiatrice du segment Fφ.

DISCUSSION. — Pour que la droite FK coupe le cercle F′ en deux points distincts, il faut et il suffit qu'elle soit intérieure à l'angle TFT′, formé par les tangentes au cercle directeur F′ issues de F, c'est-à-dire que la droite Oλ parallèle à δ soit extérieure à l'angle des asymptotes :

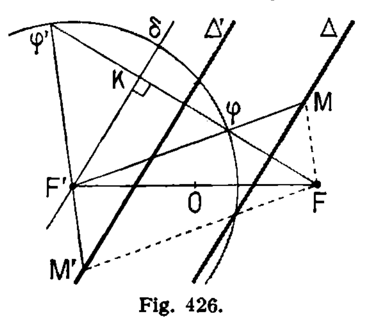


Fig. 426.

Il existe deux tangentes à une hyperbole parallèles à une direction* Oλ *extérieure à l'angle des asymptotes.

Les triangles isocèles F′φφ′, M′Fφ′ et MφF étant directement semblables, le quadrilatère FMF′M′ est un parallélogramme de centre O, ce qui montre que les points de contact M et M′ des deux tangentes parallèles Δ et Δ′ sont diamétralement opposés.

Si la droite δ est parallèle à l'asymptote OS les points φ et φ′ sont confondus en T. La tangente correspondante est l'asymptote OS.

• **485. Tangentes issues d'un point donné.** — Le symétrique φ du foyer F par rapport à une tangente à l'hyperbole issue d'un point donné P (fig. 427 et 428) appartient au cercle directeur F′ (2*a*). Puisque PF = Pφ il appartient également au cercle de centre P passant par F. Réciproquement à tout point φ commun à ces deux cercles correspond une tangente issue de P médiatrice du segment Fφ et dont le point de contact M est son intersection avec F′φ.

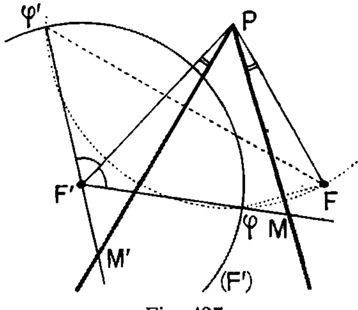


Fig. 427.

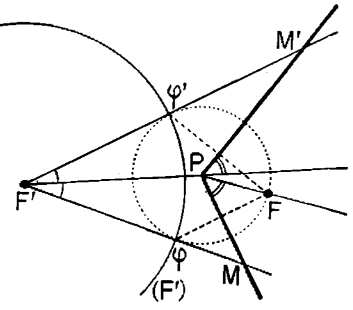


Fig. 428.

DISCUSSION. — Pour qu'un point φ existe il faut et il suffit que l'on puisse construire un triangle (véritable ou aplati) PF′φ dont les côtés soient respectivement égaux à PF′, PF et 2*a*, donc que l'on ait : $PF + PF' \geqslant 2a$ et $|PF' - PF| \leqslant 2a$.

La première condition est toujours vérifiée car dans le triangle PFF′ on a : $PF + PF' \geqslant FF' > 2a$. Pour que la seconde soit satisfaite il faut et il suffit que le point P soit extérieur à l'hyperbole ou situé sur cette hyperbole.

1° Si P est extérieur on a : $|PF - PF'| < 2a$. Les cercles F′ (2*a*) et P (PF) se coupent en deux points distincts φ et φ′ : deux solutions distinctes.

Par un point extérieur à une hyperbole on peut lui mener deux tangentes distinctes.

2° Si P est sur l'hyperbole, une solution unique, la tangente en P.

• **486. Remarques.** — 1° Si P appartient à l'asymptote OS médiatrice de FT l'un des points φ ou φ' est en T. La tangente correspondante est l'asymptote elle-même. Il en résulte que :

Les asymptotes sont les tangentes à l'hyperbole issues de son centre.

D'autre part les points de contact M et M' des tangentes PM et PM' appartiennent à une même branche ou à deux branches distinctes de l'hyperbole suivant que P est intérieur ou extérieur à l'angle des asymptotes.

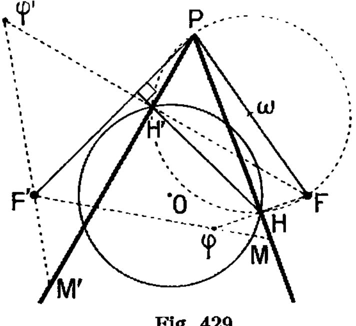


Fig. 429.

2° On obtient les projections H et H' du foyer F sur les tangentes issues de P en prenant (fig. 429) les intersections du cercle principal O et du cercle ω de diamètre PF. D'où une autre construction de ces tangentes. Pour obtenir leurs les points de contact M et M' on construit symétriques φ et φ' de F par rapport à H et H' et on mène les droites F'φ et F'φ'.

• **487. Théorèmes de Poncelet.** — 1° Les points φ et φ' (fig. 427 et 428) sont symétriques par rapport à la droite F'P. Cette droite est donc bissectrice intérieure de l'angle φF'φ'. C'est donc une bissectrice de l'angle MF'M'. De même FP est une bissectrice de l'angle MFM' :

La droite qui joint un foyer F ***au point*** P ***commun aux tangentes en*** M ***et*** M' ***à une hyperbole est bissectrice de l'angle*** MFM'.

Si M et M' appartiennent à une même branche de l'hyperbole (fig. 428), le point F est intérieur à l'angle MPM' ou à son opposé par le sommet : la droite FP est bissectrice intérieure de l'angle MFM'.

Si M et M' appartiennent à deux branches distinctes (fig. 427) le point F est extérieur à l'angle MPM' et FP est bissectrice extérieure de l'angle MFM'.

2° Les droites PF' et PM', médiatrices des segments φ'φ et φ'F sont les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{P\varphi'}, \overrightarrow{P\varphi})$ et $(\overrightarrow{P\varphi'}, \overrightarrow{PF})$. Leur angle (PF', PM') est donc (n° 50) égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{PF})$ c'est-à-dire à l'angle (PM, PF) car la droite PM, médiatrice de Fφ est bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{PF})$.

On a donc : $$(PM, PF) = -(PM', PF').$$

Les tangentes menées d'un point P ***à une hyperbole sont antiparallèles par rapport aux droites joignant le point*** P ***aux foyers*** F ***et*** F' ***de cette hyperbole.***

Cette propriété résulte aussi du fait que (fig. 429) la droite PF′, médiatrice de $\varphi\varphi'$, est perpendiculaire à la droite HH′ qui joint les milieux de Fφ et Fφ'. La droite PF′ hauteur du triangle PHH′ est donc antiparallèle au diamètre PF du cercle PHH′ par rapport à PH et PH′ c'est-à-dire par rapport à PM et PM′. *Les angles* MPM′ *et* FPF′ *ont donc mêmes bissectrices.*

Les angles $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PF})$ et $(\overrightarrow{PM'}, \overrightarrow{PF'})$ sont opposés si M et M′ appartiennent à deux branches distinctes, supplémentaires si M et M′ appartiennent à la même branche de l'hyperbole.

• 488. Corollaire. — ***La portion d'une tangente mobile à une hyperbole comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer sous un angle de droites constant.***

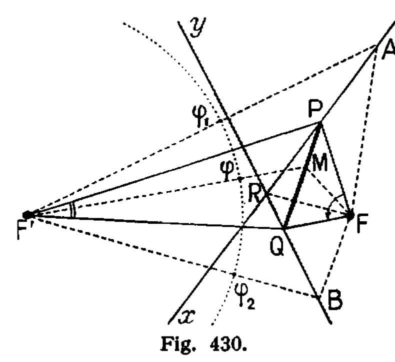


Fig. 430.

Soient P et Q (fig. 430) les intersections de la tangente à l'hyperbole en un point variable M avec les tangentes Ax et By aux points fixes A et B. Désignons par φ, φ_1 et φ_2 les symétriques du foyer F par rapport aux tangentes PQ, Ax et By. Les droites F′P et F′Q, respectivement médiatrices de $\varphi\varphi_1$ et de $\varphi\varphi_2$ sont les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{F'\varphi}, \overrightarrow{F'\varphi_1})$ et $(\overrightarrow{F'\varphi}, \overrightarrow{F'\varphi_2})$. On a :

$$(F'P, F'Q) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{F'\varphi_1}, \overrightarrow{F'\varphi_2}).$$

L'angle (F′P, F′Q) est donc constant et il en est de même de (FP, FQ).

En désignant par R le point commun aux tangentes Ax et By on voit que AR et RB sont deux positions particulières de PQ. Donc :

$$(FP, FQ) = (FA, FR) = (FR, FB).$$

Il en résulte en échangeant les rôles de A et M, que : (FP, FR) = (FM, FQ) ce qui montre que FM est antiparallèle à FR par rapport à FP et FQ.

• 489. Angle des tangentes. — Les tangentes PM et PM′ (fig. 427) sont les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi})$ et $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi'})$, donc : $(PM, PM') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{P\varphi'}) = (P\varphi, PF')$. Or dans le triangle PF′φ on a :

$$\overline{\varphi F'}^2 = \overline{P\varphi}^2 + \overline{PF'}^2 - 2P\varphi.PF' \cos \varphi PF'.$$

Comme $P\varphi = PF$, $\varphi F' = 2a$, on obtient en désignant par V l'angle $\varphi PF'$:

$$4a^2 = \overline{PF} + \overline{PF'}^2 - 2PF.PF' \cos V.$$

L'angle saillant MPM′ est égal à V si les points M et M′ appartiennent à deux branches distinctes de l'hyperbole, au supplément de V si M et M′ sont sur une même branche.

● **490. Cercle orthoptique.** — Pour que l'angle MPM' soit droit, il faut et il suffit que $\cos V = 0$ donc que :

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2 \quad \text{ou} \quad 2\,\overline{PO}^2 + 2\,\overline{OF}^2 = 4a^2.$$

soit $$\overline{OP}^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 - b^2.$$

Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à une hyperbole est un cercle de centre O appelé cercle orthoptique de l'hyperbole.

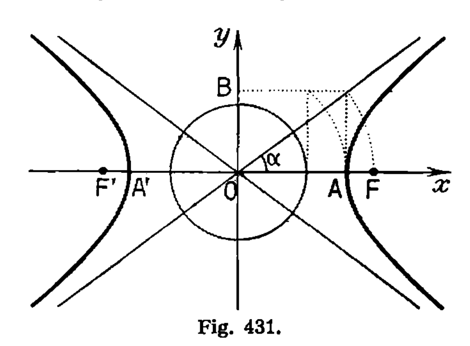


Fig. 431.

Ce cercle (fig. 431) n'existe que si $a^2 - b^2 > 0$ donc (n° 477) si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} < 1$, c'est-à-dire si l'angle 2α des asymptotes est un angle aigu.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère le cercle orthoptique se réduit au point O.

SUJETS D'EXAMEN

— Intersection d'une droite et d'une hyperbole. (*Dijon*, ME.)

— Tangente en un point d'une hyperbole. Asymptotes d'une hyperbole. (*Alger*, ME et MT.)

— Asymptotes d'une hyperbole. Définition. Construction. Propriétés. (*Grenoble*, ME.)

EXERCICES

Construire une hyperbole (on se bornera à déterminer les foyers et la longueur de l'axe focal $2a$) connaissant:

● **577.** Les foyers et un point de la courbe.

● **578.** Les foyers et une tangente (ou asymptote).

● **579.** Les foyers et l'excentricité.

● **580.** Un foyer, deux points et la longueur $2a$.

● **581.** Un foyer, une tangente et un sommet.

● **582.** Le cercle principal et deux tangentes.

● **583.** Construire une hyperbole de foyer donné F connaissant en outre :
1° Trois tangentes
2° Deux tangentes et un point.
2° Une tangente et deux points
3° Trois points.

● **584.** Construire une hyperbole connaissant :
1° Les asymptotes et l'une des longueurs $2a$ ou $2c$.
2° Un foyer, une asymptote et un point ou une tangente.
3° Un foyer, une asymptote et l'une des distances $2a$ ou $2c$.

● **585.** 1° Lieu du second foyer F' d'une hyperbole H de foyer F dont on connaît en outre deux tangentes ou une tangente et son point de contact.
2° Construire l'hyperbole H connaissant en plus une longueur $2a$ ou $2c$ ou l'excentricité.

● **586.** 1° Montrer que les intersections de l'axe non focal d'une hyperbole de foyers F et F' avec la tangente et la normale en M appartiennent au cercle MFF'.
2° Construire une hyperbole connaissant le centre O, le support Ox de l'axe focal, un point de la courbe et la tangente en ce point.

● **587.** 1° Démontrer que le point de contact M d'une tangente à l'hyperbole et son intersection T avec l'axe focal sont conjugués par rapport au cercle principal.
2° Construire une hyperbole connaissant ses sommets et en outre un point, ou une tangente à la courbe.

● **588.** Déterminer les points d'intersection de deux ellipses, de deux hyperboles ou d'une ellipse et d'une hyperbole admettant un foyer F commun.

● **589.** Trouver dans chacun des trois cas que l'on peut envisager, le lieu du second foyer F' d'une ellipse ou d'une hyperbole Γ admettant un foyer donné F et passant par deux points donnés P et Q.

● **590.** Une hyperbole Γ admet un cercle principal donné O et passe par un point fixe P extérieur au cercle O.
1° Montrer que Γ passe par un second point fixe Q et trouver le lieu des foyers F et F' de Γ.
2° Construire les hyperboles Γ admettant une tangente donnée.

● **591.** Construire les intersections d'une hyperbole avec ses cercles directeurs. Discuter.

● **592.** Soient T' et N' les intersections de la tangente et de la normale en un point M d'une hyperbole de foyers F et F' et de centre O, avec l'axe non focal. On désigne par H et H' les projections de N' sur MF et MF' et par K et K' les projections de T' sur ces deux droites.
1° Montrer que les droites HH' et KK' sont perpendiculaires en O.
2° Démontrer que $MH = FK = a$ (demi-axe de la courbe).

● **593.** Soient H et H' les projections des foyers F et F' d'une hyperbole sur une tangente à cette courbe. Démontrer que le point de rencontre I de FH' et de F'H est le milieu de la normale MN limitée à l'axe focal.

● **594.** Enveloppe de la droite qui joint les projections du foyer F d'une hyperbole sur la tangente et la normale en un point variable M de la courbe.

● **595.** La perpendiculaire menée du centre O d'une hyperbole à la tangente en un point variable M de la courbe coupe les rayons vecteurs MF et MF' en P et P'. Montrer que les lieux de P et P' sont deux cercles égaux et qu'il existe un cercle de centre M tangent à ces deux cercles. Evaluer le produit $\overline{OP}.\overline{OP'}$.

● **596.** On donne un cercle O, un point fixe extérieur F et une corde mobile de longueur constante MN. La droite NF recoupe le cercle en P. Enveloppe de la droite MP.

● **597.** On considère deux points fixes F et F' de part et d'autre d'une droite D. Par un point variable M de D on mène la droite Δ antiparallèle à D par rapport à MF et MF'. Soient f et φ les symétriques de F par rapport à D et à Δ.
1° Montrer que f et φ sont symétriques par rapport à MF'.
2° En déduire le lieu de φ et l'enveloppe de Δ.

● **598.** Soit M un point variable sur une droite Δ et deux points fixes A et B de part et d'autre de Δ. Le cercle AMB recoupe Δ en N et recoupe en P la parallèle à AB menée par N. Déterminer l'enveloppe de la droite MP.

● **599.** On donne un segment fixe AB et un cercle variable ω tangent au segment AB en un point fixe K intérieur à AB. Trouver le lieu du point M commun aux tangentes AT et BU au cercle ω, distinctes de AB ainsi que l'enveloppe de la droite $M\omega$.

● **600.** 1° Etudier les triangles ABC inscrits dans un cercle donné O et admettant pour orthocentre un point donné extérieur H. Condition de possibilité.

2° Trouver les lieux des milieux des côtés, des pieds des hauteurs et l'enveloppe des côtés de ces triangles.

● **601.** On mène d'un point P les tangentes PM et PM' à une hyperbole de foyers F et F', et de centre O. Soit I le milieu de MM'.

1° Démontrer que P est le centre d'un cercle de rayon R tangent aux quatre côtés du quadrilatère FMF'M'. Que deviennent les sommets de ce quadrilatère dans l'inversion (P, R^2)?

2° En déduire que les points P,O, I sont alignés et que les cercles PMF et PM'F' sont tangents en P.

● **602.** D'un point variable A du cercle directeur F' on mène les tangentes à une hyperbole de foyers F et F'. Ces tangentes recoupent le cercle F' en B et C.

1° Que représentent pour le triangle ABC le foyer F et le cercle principal O?

2° Trouver l'enveloppe de BC.

● **603.** Une corde variable AB d'un cercle O (R) est vue d'un point fixe extérieur P sous un angle droit. On pose $OP = d$.

1° Lieu du milieu M du segment AB et de la projection H du point P sur la droite AB.

2° Les droites PA et PB recoupent le cercle O en C et D respectivement. Déterminer l'enveloppe des côtés du quadrilatère ABCD.

● **604.** La normale et la tangente en un point M d'une hyperbole de foyers F et F' coupent l'axe focal Ox en N et T, l'axe non focal Oy en N' et T'.

1° Montrer que le cercle MN'T' passe par F et F' et que le cercle MNT fait partie du faisceau de points limites F et F'. Établir les relations

$$\overline{OT}.\overline{ON} = c^2 \qquad \text{et} \qquad \overline{OT'}.\overline{ON'} = -c^2.$$

2° Mener les normales à l'hyperbole issues d'un point N de l'axe Ox ou d'un point N' de l'axe Oy. Discuter.

● **605.** Un cercle de centre O est tangent aux deux droites rectangulaires Ax et Ay. Une tangente variable à ce cercle coupe Ax et Ay en P et Q. On désigne par M le milieu de PQ.

1° Montrer que le cercle de diamètre AM est tangent au cercle O.

2° Trouver le lieu Γ du point M et préciser ses éléments.

● **606.** Soit un carré AFBF' de centre O. On désigne par α, β, φ et φ' les projections de ses sommets sur une droite quelconque Δ.

1° Démontrer la relation : $\overline{A\alpha}^2 + \overline{B\beta}^2 - 2\overline{F\varphi}.\overline{F'\varphi'} = 2\overline{OA}^2$.

2° Trouver l'enveloppe Γ des droites telles que la somme des carrés des distances aux deux points fixes A et B soit égale à une constante donnée k^2. Discuter la nature de Γ.

● **607.** La tangente en un point variable M d'une hyperbole coupe les tangentes AY et A'Y' aux sommets de la courbe en T et T'.

1° Démontrer que le cercle ω' de diamètre TT' passe par F et F' et établir la relation $\overline{AT}.\overline{A'T'} = -b^2$. Cas où TT' est une asymptote.

2° Les droites FT' et F'T se coupent en I, les droites FT et F'T' se coupent en J. Que représentent les points T, T', I, J, pour le triangle MFF'? Lieu géométrique du milieu K de IJ.

3° On donne sur deux droites AY et A'Y' perpendiculaires en A et A' au segment AA' deux points variables T et T' tels que $\overline{AT}.\overline{A'T'} = -k^2$. Trouver l'enveloppe de la droite TT'.

● **608.** La normale en M à l'hyperbole Γ de centre O coupe l'axe focal AA' en N et l'axe non focal en N'.

1° Montrer que le cercle de centre N' passant par les foyers F et F' de Γ coupe NN' aux centres I et J des cercles exinscrits dans les angles F et F' du triangle MFF'.

2° Calculer en fonction des côtés du triangle MFF', puis en fonction de OA = a et OF = c, les longueurs des projections de MI, MJ et MN' sur la droite MF.

3° Etablir la relation $\overline{MN}.MN' = MI.MJ$ et en déduire que la projection MK de MN sur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$

● **609.** Soient PM et PM' deux tangentes à une ellipse ou une hyperbole Γ de centre O et de foyers F et F'. On désigne par φ et φ' les symétriques de F par rapport à PM et PM', par N le point où PM recoupe le cercle PφF' et par N' le point où PM' recoupe le cercle Pφ'F'.

1° Comparer les triangles φFφ', φNF' et F'N'φ'. Montrer que les points N et N' sont symétriques par rapport à O.

2° Comparer les triangles PFM et PN'F', puis les triangles PFN et PM'F' et établir que PF.PF' = PM.PN' = PM'.PN.

3° Démontrer que le milieu I de MM' est situé sur OP.

● **610.** Soient deux cercles ω (R) et ω' (R') sécants en M et N et tels que ωω' = d Une droite variable Δ coupe le cercle ω en A et B, le cercle ω' en C et D de telle sorte que la division (ABCD) soit harmonique.

1° Montrer que le lieu des milieux I et J de AB et de CD est le cercle centré au milieu O de ωω' et passant par M et N.

2° Enveloppe de la droite Δ.

● **611.** Une droite variable Δ coupe en A et B le cercle donné ω (R) et en C et D le cercle donné ω' (R') de telle sorte que AB = k CD (k rapport donné différent de l'unité). Soient I et J les points qui divisent le segment ωω' dans le rapport k.

1° Montrer que le lieu des projections H et K des points I et J sur Δ est un cercle du faisceau de cercles défini par les cercles ω et ω'.

2° Déterminer l'enveloppe de la droite Δ.

● **612.** On considère sur deux cercles (ω) et (ω') les points variables M et M' homologues dans une similitude directe de centre O faisant correspondre les deux cercles. Soit O' le symétrique de O par rapport à la droite ωω'.

1° Trouver le lieu de la projection H du point O sur la droite Δ qui joint M et M' et déterminer l'enveloppe Γ de la droite Δ. Préciser le point de contact N de Δ et de Γ à l'aide du cercle de diamètre ON.

2° Le cercle OO'ω coupe le cercle (ω) en M_1 et M_2. Montrer que lorsque M est en M_1 ou M_2, il en est de même de N. En déduire que la courbe Γ est bitangente à chacun des cercles (ω) et (ω').

3° Soit P le point qui divise $\overrightarrow{MM'}$ dans un rapport donné k. Montrer que le lieu de P est un cercle (ω_1). Trouver, lorsque k varie l'enveloppe des cercles (ω_1).

● **613.** On donne le triangle ABC de hauteur AH; H est entre B et C et on a AH = 2, BH = 4, CH = 1. Un point O décrit le segment HA; il est défini par HO = x ($0 < x < 2$). On trace la circonférence de centre O, et de rayon x; on lui mène les tangentes issues de B et de C; soit M leur point de rencontre; soient E et G leurs points de contact.

1° Quels sont les lieux des points E et G? Quel est le lieu du centre du cercle exinscrit dans l'angle M du triangle BMC et quel est le rayon de ce cercle? Montrer que M décrit un arc de conique; préciser cet arc; construire sa tangente en M.

2° Calculer sin HBM et sin HCM en fonction de x. Étudier les variations de ces fonctions et construire les courbes représentatives sur une même figure. Quels sont les points communs à ces deux courbes?

3° On pose HBO = β et HCO = γ. Soit K le point de rencontre des droites BC et EG. Montrer que l'angle CKG est égal à γ — β. En déduire que le point K est fixe. *(Rennes.)*

● **614.** On considère un cercle fixe (O) de centre O et de rayon R, et un point fixe A tel que OA = 2R. On désigne par (C) un cercle de centre C passant par A et tangent au cercle (O).

1° Quel est le lieu du centre C? On précisera les éléments remarquables de ce lieu : foyers, centre, axes, sommets, excentricité.

2° On désigne par M le point de contact des cercles (O) et (C) : les tangentes en A et M à (C) se coupent en P. Quel est le lieu de P? Montrer que ce lieu peut se déduire de la polaire de A par rapport au cercle (O) au moyen d'une transformation très simple.

3° Une droite arbitraire ayant été menée par A, il existe en général deux cercles (C_1) et (C_2) ayant leurs centres sur celle-ci, passant par A et tangents au cercle (O). Soient M_1, M_2 les points de contact du cercle (O) avec (C_1) et (C_2) respectivement. Quel est le lieu du point Q où M_1M_2 coupe la ligne des centres C_1C_2 lorsque celle-ci varie (en passant toujours par A)?

4° On désigne par (C′) et (C″) deux cercles tangents à (O) et se coupant en A sous l'angle donné V. Quel est le lieu de leur second point d'intersection? Donner une construction précise de ce lieu lorsque V est droit, puis lorsque $V = \frac{\pi}{3}$.

(Nancy.)

● **615.** On donne une droite (D) et un point A situé à une distance AH = h de D. Un angle de grandeur constante A pivote autour de son sommet A et l'on appelle B et C les points où ses côtés coupent la droite (D). Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1° Démontrer que les tangentes en B et C au cercle (O) conservent chacune une direction fixe.

2° On effectue une inversion de pôle A et de puissance p. Montrer que la figure inverse du cercle (O) reste tangente à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon en fonction de p, h et A. En déduire que le cercle (O) reste tangent à un cercle fixe (K) de centre K. Calculer AK et le rayon du cercle (K) en fonction de h et A. Constater que A est extérieur au cercle (K).

3° Trouver le lieu des centres des cercles (O). Déterminer les principaux éléments de ce lieu.

4° Si l'on fait varier l'angle BAC, le cercle (K) varie. Montrer que tous les cercles (K) sont orthogonaux à une infinité de cercles fixes. *(Besançon.)*

● **616.** On donne deux cercles (C) et (C′), de centres O et O′, de rayons R et R′ (R > R′), tangents extérieurement en un point H, la tangente commune étant la droite $x'Hx$. Soient P un point de $x'x$, Pt et Pt' les tangentes (autres que $x'x$) menées de P à (C) et à (C′), M le point de contact de Pt et de (C), M′ celui de Pt' et de (C′). En supposant que P décrive la droite $x'x$, on demande :

1° de montrer que la droite MM′ passe par un point fixe, qu'on précisera;

2° de trouver le lieu du point Q, où se coupent les droites OM et O′M′;

3° de trouver l'enveloppe de la droite PQ.

En désignant par x la longueur HP, on demande :

4° de calculer en fonction de R, R′ et x le cosinus y de l'angle θ des deux vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PM'}$;

5° d'étudier les variations de y lorsque x varie de 0 à $+\infty$, et de les représenter par une courbe;

6° de construire géométriquement P, et de calculer la valeur correspondante de x, de façon que l'angle (PM, PM′) soit droit, ou soit égal à un angle donné α.

(Paris.)

● **617.** Soit un cercle fixe (O) de centre O et de rayon R.

1° M étant un point quelconque du plan du cercle (O), extérieur à ce cercle, montrer que dans l'inversion de pôle O de puissance R^2, l'inverse du cercle (C) de diamètre OM est l'axe radical Δ des cercles (C) et (O).

2° Tout en restant extérieur au cercle (O), M se déplace sur un cercle (γ) de diamètre OP, P étant un point fixe extérieur au cercle (O). Trouver le lieu du pied de l'axe radical Δ.

3° M décrivant un cercle (Γ) de rayon R, tangent extérieurement au cercle (O) :

a) Trouver le lieu du pied de l'axe radical Δ.

b) A quelle courbe fixe la droite Δ reste-t-elle tangente? Préciser les éléments de cette courbe. *(Grenoble.)*

● **618.** On donne dans un plan un cercle (O) de centre O et de rayon R et l'on appelle cercle (ω) tout cercle qui coupe le cercle (O) en ceux points M et M' diamétralement opposés.

1° Montrer que tout cercle (ω) qui passe par un point P du plan passe également par un second point P'. Lieu de P' lorsque P décrit une droite ne passant pas par O ou un cercle tangent au cercle (O).

2° On considère maintenant un axe Ox qui coupe (O) en A et un diamètre MM' du cercle (O) défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

Construire le cercle (ω) qui passe par M et M' et qui est tangent à un cercle (O') de même rayon R que le cercle (O) et tangent à celui-ci au point A. Montrer que le problème admet en général une solution. Cas d'exception. Montrer que lorsque θ varie les cercles (ω) ainsi construits restent tangents à un deuxième cercle fixe (O") et que le lieu de leurs centres est une conique dont on indiquera les foyers et les sommets. Si le cercle (ω) touche (O') et (O") en T et T', quelles sont les enveloppes de TT' et de la médiatrice de TT'?

3° Calculer en fonction de R et de θ les côtés et les angles du triangle ωOO' ainsi que le rayon ρ du cercle (ω). Montrer que les résultats sont différents suivant que l'on a $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$. ou $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Étudier les variations de ρ lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et tracer la courbe représentative. *(Grenoble.)*

VINGTIÈME LEÇON

ÉQUATION DE L'HYPERBOLE

• **491. Rayons vecteurs d'un point de l'hyperbole.** — Soient Ox et Oy les axes orientés d'une hyperbole (fig. 432). Désignons par M (x, y) le point de coordonnées x et y du plan et par F (c, 0) et F' ($-c$, 0) les foyers de l'hyperbole. Quel que soit M on a :

$$\overline{MF}^2 = (x - c)^2 + y^2$$

et

$$\overline{MF'}^2 = (x + c)^2 + y^2 \qquad (1)$$

D'où par différence :

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 4\,cx \qquad (2)$$

Fig. 432.

Si le point M (x, y) appartient à l'hyperbole de foyers F et F' et d'axe AA' $= 2a < 2c$, on a :

1° Pour $x > 0$: $MF' - MF = 2a$ donc d'après (2) : $MF' + MF = \dfrac{2\,cx}{a}$

Soit : $$MF = \frac{cx}{a} - a \quad \text{et} \quad MF' = \frac{cx}{a} + a \qquad (3)$$

2° Pour $x < 0$: $MF - MF' = 2a$ donc d'après (2) : $MF + MF' = -\dfrac{2\,cx}{a}$

soit $$MF = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad MF' = -\left(a + \frac{cx}{a}\right) \qquad (4)$$

Ces formules montrent que, dans tous les cas :

$$\boxed{MF = \left|a - \frac{cx}{a}\right| \quad \text{et} \quad MF' = \left|a + \frac{cx}{a}\right|} \qquad (5)$$

• **492. Équation de l'hyperbole rapportée à ses axes.** — 1° En portant les valeurs (5) de MF et MF' dans les relations (1) on obtient les deux relations :

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x + c)^2 + y^2 \qquad (6)$$

Elles se réduisent toutes deux à : $a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + y^2 + c^2$

ou : $\frac{x^2}{a^2}(c^2 - a^2) - y^2 = c^2 - a^2$ soit en divisant par : $c^2 - a^2 = b^2$.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (7)$$

2° Réciproquement, si les coordonnées x et y d'un point M satisfont à cette relation, elles vérifient les deux relations (6), c'est-à-dire compte tenu de (1) les deux relations :

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{MF}'}^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 \qquad (8)$$

Or d'après (7) : $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$. Donc $\left|\frac{x}{a}\right| \geqslant 1$ et puisque $c > a$, on a : $\left|\frac{cx}{a}\right| > a$. Les expressions $\left(\frac{cx}{a} - a\right)$ et $\left(\frac{cx}{a} + a\right)$ sont donc du signe de x. On obtient d'après les relations (8) :

Pour $x > 0$: $\mathrm{MF} = \frac{cx}{a} - a$, $\mathrm{MF}' = \frac{cx}{a} + a$ et $\mathrm{MF}' - \mathrm{MF} = 2a$.

Pour $x < 0$: $\mathrm{MF} = a - \frac{cx}{a}$, $\mathrm{MF}' = -\left(a + \frac{cx}{a}\right)$ et $\mathrm{MF} - \mathrm{MF}' = 2a$.

Le point M (x, y) appartient donc à l'hyperbole envisagée

La relation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée équation de l'hyperbole rapportée à ses axes.

Cette équation exprime (fig. 433) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M (x, y) appartienne à l'hyperbole de foyers F et F', d'axe transverse $\mathrm{AA}' = 2a$ et d'axe non transverse $\mathrm{BB}' = 2b$ tel que $b^2 = c^2 - a^2$ ou

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

• **493. Equations des asymptotes.** — Les asymptotes ont pour coefficients angulaires $\pm \operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{b}{a}$. Ce sont donc les droites : $y = \pm \frac{b}{a}x$ ou : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$

soit : $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

• **494. Régions du plan limitées par l'hyperbole.** — Soit P (X, Y) au point quelconque du plan (fig. 433) et M (x, y) l'un des points de l'hyperbole situés sur la parallèle à Ox passant par P. On a :

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} - \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} - 1 = \frac{\mathrm{X}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = \frac{\mathrm{X}^2 - x^2}{a^2}$$

Or le point P est intérieur ou extérieur à l'hyperbole suivant que $|X|$ est supérieur ou inférieur à $|x|$ (n° 471). Il en résulte que :

Un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole suivant qu'en ce point l'expression $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ *est positive ou négative.*

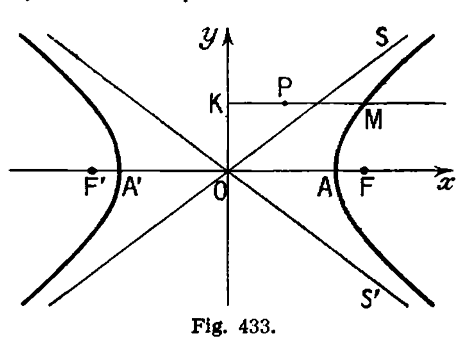


Fig. 433.

• **495. Ellipses et hyperboles homofocales.** — Étant donnés deux points F et F' (fig. 434) et un point quelconque M du plan, il existe une ellipse et une hyperbole de foyers F et F', passant par M. Les axes focaux de ces deux courbes ont respectivement pour longueurs : MF + MF' et |MF — MF'|.

Les tangentes en M à ces deux courbes sont les deux bissectrices de l'angle FMF', et sont donc perpendiculaires. Les deux courbes sont orthogonales en M ainsi qu'aux trois autres points M', M_1 et M'_1 qui s'en déduisent par symétrie.

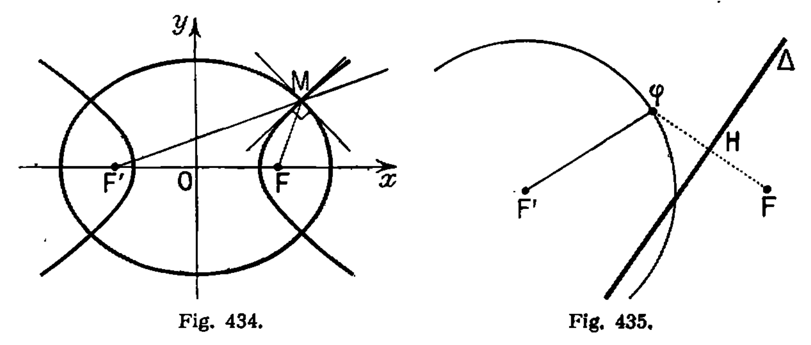


Fig. 434. Fig. 435.

Les ellipses et les hyperboles de foyers* F *et* F' *sont dites homofocales. Ces deux familles de courbes constituent un réseau orthogonal.

En posant FF' = 2c et en désignant par 2λ la longueur de l'axe focal de l'une quelconque de ces courbes, son équation rapportée à ses axes s'écrit :

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

La courbe est un ellipse pour $\lambda > c$, une hyperbole pour $\lambda < c$.

• **496. Théorème.** — ***Il existe une ellipse ou une hyperbole de foyers* F *et* F', *tangente à une droite donnée ne passant pas par* F *ou* F'.**

En effet (fig. 435), le cercle directeur de centre F' passe par le symétrique φ du foyer F par rapport à la droite donnée Δ. La courbe est une ellipse si F

et F′ sont d'un même côté de Δ, une hyperbole si F et F′ sont de part et d'autre de Δ. Autrement dit :

Une ellipse ou une hyperbole est définie par ses foyers et une de ses tangentes.

Si la droite Δ passe par le milieu O de FF′, l'hyperbole ainsi définie admet Δ pour asymptote.

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX ASYMPTOTES

• **497. Théorème fondamental.** — ***Le produit des segments déterminés sur les asymptotes par une tangente variable à une hyperbole est constant et égal à c^2.***

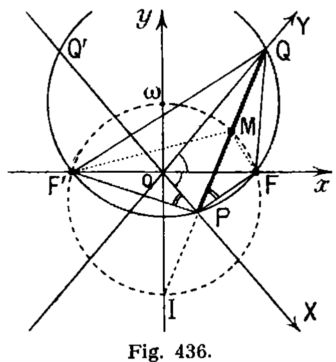


Fig. 436.

Considérons une hyperbole de foyers F et F′ et d'axes Ox et Oy (fig. 436). Orientons les asymptotes OX et OY de façon que l'axe focal Ox soit la bissectrice intérieure de l'angle XOY. La tangente en M à l'hyperbole coupe OX en P. Le cercle PFF′, centré en ω sur Oy, recoupe PM et OX en Q et Q′. D'après le 2e théorème de Poncelet (n° 487) les angles (PM, PF) et (PF′, PX) sont égaux et il en est de même des arcs $\overset{\frown}{QF}$ et $\overset{\frown}{F'Q'}$. Le point Q est symétrique de Q′ par rapport à Oy et appartient à OY. Comme $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$ on obtient :

$$OP \cdot OQ = -\overline{OP} \cdot \overline{OQ'} = -\overline{OF} \cdot \overline{OF'} = \overline{OF}^2.$$

Soit :

$$\boxed{\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = c^2}$$

• **498. Corollaires.** — 1° ***L'aire du triangle*** OPQ ***est constante et égale à ab.***

Soit 2α la mesure de l'angle XOY, on obtient (n° 477) :

$$S_{OPQ} = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \sin 2\alpha = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{2ab}{c^2} = ab.$$

On retrouve cette valeur en prenant M au sommet A de l'hyperbole.

2° ***Une hyperbole est définie par ses asymptotes et une tangente.***

Si le triangle OPQ est donné, les foyers F et F′ sont les points de la bissectrice intérieure de l'angle POQ tels que $\overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2 = OP.OQ$. On les obtient en coupant cette bissectrice intérieure par le cercle ω passant par P et Q et centré sur la bissectrice extérieure de l'angle POQ.

• **499. Réciproque.** — ***L'enveloppe d'une droite variable qui coupe deux axes*** OX ***et*** OY ***en des points*** P ***et*** Q ***tels que*** $\overline{OP}.\overline{OQ} = k^2$ ***est une hyperbole d'asymptotes*** OX ***et*** OY.

Construisons l'hyperbole d'asymptotes OX et OY admettant pour foyers les points F et F' de la bissectrice intérieure de l'angle XOY tels que OF = OF' = k. La tangente à cette hyperbole issue d'un point P de OX coupe OY en un point Q_1 tel que $\overline{OP}.\overline{OQ_1} = \overline{OP}.\overline{OQ} = k^2$. Le point Q_1 est donc en Q et les différentes droites PQ sont confondues avec les tangentes à l'hyperbole ainsi construite.

• **500. Théorème.** — ***Le point de contact*** M ***d'une tangente à une hyperbole est le milieu du segment*** PQ ***déterminé sur cette tangente par les asymptotes*** (fig. 436).

La tangente PQ est bissectrice intérieure de l'angle FMF' (n° 480). Elle coupe donc le cercle MFF' en un point I de la médiatrice Oy de FF'. La droite FF' étant bissectrice de l'angle POQ, le point I est le pôle de la droite FF' par rapport au cercle ω (n° 341). Le cercle de diamètre $I\omega$ passe par F et F' et coïncide avec le cercle IMFF'. L'angle $IM\omega$ est donc droit et le point M est le milieu de la corde PQ du cercle ω.

• **501. Applications.** — 1° La droite ωM est la normale en M à l'hyperbole. Connaissant les points F, F' et M, on peut donc construire le cercle ω qui coupe en P et Q la tangente en M. On obtient ainsi une construction rapide des asymptotes. Notons que le quadrangle FF'PQ est harmonique (n° 353), que par suite $MF.MF' = \overline{MP}^2 = \overline{MQ}^2$.

2° Inversement si on connaît les asymptotes OX et OY et le point M de l'hyperbole, la tangente en M s'obtient en prolongeant OM d'une longueur égale MN et en achevant le parallélogramme OPNQ. Donc (n° 498) :

Une hyperbole est définie par ses asymptotes et un de ses points.

• **502. Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.** — Les parallèles aux asymptotes, menées par le point M de l'hyperbole (fig. 437), coupent OX en R milieu de OP et OY en S milieu de OQ. Donc :

$$\overline{OR}.\overline{OS} = \frac{1}{2}\overline{OP}.\frac{1}{2}\overline{OQ} = \frac{c^2}{4}.$$

Réciproquement si $\overline{OR}.\overline{OS} = \frac{c^2}{4}$, l'hyperbole d'asymptotes OX et OY passant par le sommet M du parallélogramme ROSM a pour demi-distance focale OF = c. Elle est confondue avec l'hyperbole envisagée qui contient donc le point M.

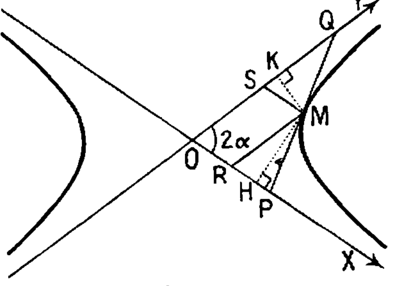


Fig. 437.

En posant $\overline{OR} = X$ et $\overline{OS} = Y$, on obtient : $$\boxed{XY = \frac{c^2}{4}}$$

Cette condition nécessaire et suffisante pour que le point M correspondant appartienne à l'hyperbole est *l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.*

• **503. Corollaire.** — ***Le produit des distances d'un point de l'hyperbole à ses asymptotes est constant et égal à*** $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

Soient MH et MK les distances de M à OX et OY. Dans les triangles MRH et MSK (fig. 437) on a MH = RM sin 2α et MK = SM sin 2α. Donc (nº 477) :

$$MH.MK = RM.SM \sin^2 2\alpha = OR.OS \sin^2 2\alpha = \frac{c^2}{4}\left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

• **504. Théorème.** — ***Le produit des segments déterminés par un point variable*** M ***d'une hyperbole sur le segment*** PQ ***compris entre les asymptotes et parallèle à une direction donnée est constant.***

La droite PQ passant par M et parallèle à la direction Oλ fait avec les asymptotes des angles aigus constants β et γ (fig. 438). On a : MH = MP sin β et MK = MQ sin γ.

$$\text{Donc : } MP.MQ = \frac{MH.MK}{\sin\beta \sin\gamma} = \frac{a^2b^2}{c^2 \sin\beta \sin\gamma} = C^{te}.$$

Le produit $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}$, étant positif ou négatif suivant que Oλ est intérieur ou extérieur à l'angle des asymptotes, est par suite constant.

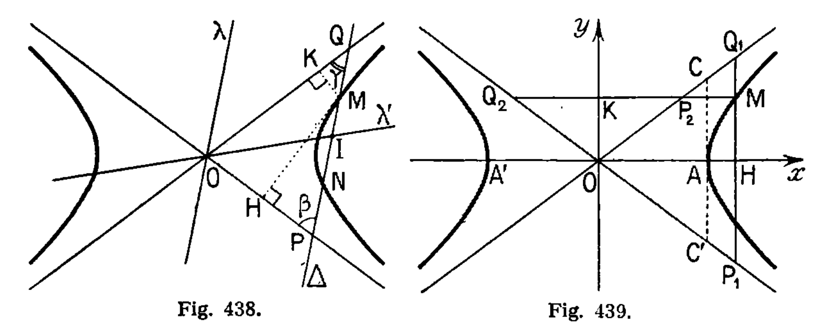


Fig. 438. Fig. 439.

• **505. Cas particuliers.** — 1º **La sécante P_1Q_1 est perpendiculaire à** Ox.

Lorsque le point M vient au sommet A le produit $\overline{MP_1}\cdot\overline{MQ_1}$ devient $\overline{AC}\cdot\overline{AC'} = -b^2$. Donc :

$$\boxed{\overline{MP_1}\cdot\overline{MQ_1} = -b^2}$$

2º **La sécante P_2Q_2 est parallèle à** Ox. — Lorsque le point M vient en A, le produit $\overline{MP_2}\cdot\overline{MQ_2}$ devient $\overline{AO}^2 = a^2$. Donc :

$$\boxed{\overline{MP_2}\cdot\overline{MQ_2} = a^2}$$

REMARQUE. — Ces relations peuvent se déduire de l'équation de l'hyperbole. On a, par exemple, (fig. 439) :

$$\overline{MP_1}.\overline{MQ_1} = (\overline{MH} + \overline{HP_1})(\overline{MH} - \overline{HP_1}) = \overline{HM}^2 - \overline{HP}_1^2.$$

Comme M appartient à l'hyperbole : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$, et $\overline{HM}^2 = \frac{b^2}{a^2}\overline{OH}^2 - b^2$

et puisque P_1 appartient à l'une des droites $y = \pm\frac{bx}{a}$ on a : $\overline{HP}_1^2 = \frac{b^2}{a^2}\overline{OH}^2$.

D'où : $\overline{MP_1}.\overline{MQ_1} = \overline{HM}^2 - \overline{HP_1}^2 = -b^2$

● **506. Corollaire.** — ***L'hyperbole et ses asymptotes découpent sur toute sécante commune deux segments qui ont même milieu.***

Soient P et Q les points de rencontre d'une corde MN de l'hyperbole avec ses asymptotes (fig. 438). D'après le théorème n° 504 on : $\overline{MP}\cdot\overline{MQ} = \overline{NP}\cdot\overline{NQ}$. Les points M et N ont donc même puissance par rapport au cercle de diamètre PQ et de centre I, soit : $\overline{IM}^2 - \overline{IP}^2 = \overline{IN}^2 - \overline{IP}^2$ ou $\overline{IM}^2 = \overline{IN}^2$.

Le milieu I de PQ est aussi celui de MN.

● **507. Applications.** — 1° Toute sécante issue d'un point donné A d'une hyperbole (fig. 440) recoupe la courbe en M et les asymptotes OX et OY en P et Q. Les segments AM et PQ ayant même milieu on a $\overline{PM} = \overline{AQ}$. En faisant pivoter la sécante PQ on obtient ainsi un procédé commode pour construire par points l'hyperbole définie par le point A et ses asymptotes OX et OY.

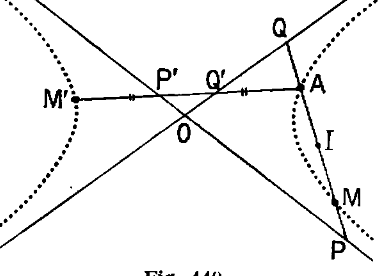


Fig. 440.

2° Le lieu du milieu I de PQ se déduit du lieu du point M dans l'homothétie (A, 1/2). Donc :

Le lieu du milieu du segment déterminé par deux droites fixes OX et OY sur une sécante variable issue d'un point fixe A est une hyperbole de diamètre OA dont les asymptotes sont parallèles à OX et OY.

● **508. Directions conjuguées de l'hyperbole.** — Le milieu I de toute corde MN de l'hyperbole (fig. 438), parallèle à une direction donnée Oλ, est aussi le milieu du segment PQ déterminé sur cette corde par les asymptotes. Or le faisceau O (XYIλ) est harmonique. Le point I appartient donc à la droite fixe Oλ' conjuguée de Oλ par rapport aux asymptotes. Inversement si le point J est le milieu d'une sécante MN' parallèle à Oλ', il appartient à la droite conjuguée de Oλ' par rapport aux asymptotes, donc à Oλ. Les deux droites Oλ et Oλ' conjuguées par rapport aux asymptotes sont appelées *diamètres conjugués de l'hyperbole* et leurs directions sont dites directions conjuguées de l'hyperbole.

Les milieux des cordes parallèles à un diamètre de l'hyperbole appartiennent au diamètre conjugué.

Si la droite Oλ est extérieure à l'angle des asymptotes, la droite Oλ' est intérieure et passe par le milieu de la tangente PQ parallèle à Oλ c'est-à-dire par

son point de contact (n° 500). Le lieu de I se compose des deux portions de la droite Oλ' intérieures à l'hyperbole, tandis que le lieu de J est la droite Oλ en entier.

• 509. Hyperboles conjuguées. — ***Ce sont deux hyperboles*** (H) ***et*** (H') ***qui ont mêmes asymptotes, même distance focale et telles que l'axe focal de l'une soit l'axe non focal de l'autre.***

Les foyers F, F' et F_1, F'_1 de ces deux hyperboles (fig. 441) sont les intersections du cercle O(c) avec Ox axe focal de (H) et avec Oy axe focal de (H'). Les tangentes aux sommets et les asymptotes sont les côtés et les diagonales du rectangle CDD'C' inscrit dans le cercle O.

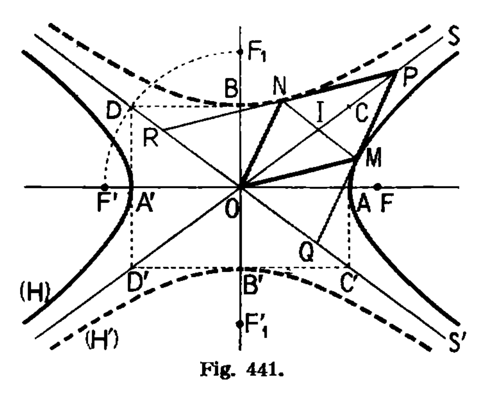


Fig. 441.

En posant OA $= a$ et OB $= b$ on obtient pour équations de (H) et (H') rapportées aux axes Ox et Oy :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(H)}$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{(H')}$$

• 510. Diamètres conjugués de deux hyperboles conjuguées. — Menons d'un point P de l'asymptote OS les tangentes PM et PN aux deux hyperboles (H) et (H'). Ces tangentes coupent l'asymptote OS' en Q et R et on a (n° 497) : OP.OQ = OP.OR = c^2. Donc OQ = OR et le point O est le milieu du segment QR. Les points de contact M et N étant les milieux respectifs de PQ et PR (n° 500) le quadrilatère OMPN est un parallélogramme. Donc OM = NP et ON = MP. Le segment MN est parallèle à OS' et son milieu I appartient à OS. D'autre part le faisceau O (PQMN) est harmonique et les directions OM et ON sont conjuguées pour chacune des deux hyperboles. On dit que :

Les deux segments OM ***et*** ON ***constituent deux demi-diamètres conjugués pour l'une ou l'autre des hyperboles*** (H) ***ou*** (H').

Pour l'hyperbole (H) le segment OM est un demi-diamètre transverse et le segment ON le demi-diamètre conjugué non transverse.

D'après le n° 501, 1° on a : MF.MF' = $\overline{\text{MP}}^2$ = $\overline{\text{ON}}^2$:

Le produit des rayons vecteurs d'un point M *de l'hyperbole est égal au carré du demi-diamètre* ON *conjugué de* OM.

• 511. Théorème. — ***Une hyperbole est définie par un demi-diamètre transverse et le demi-diamètre conjugué non transverse.***

Si on connaît OM et ON on peut construire $\overrightarrow{\text{MP}} = -\overrightarrow{\text{MQ}} = \overrightarrow{\text{ON}}$. Les asymptotes de l'hyperbole sont OP et OQ et la droite PQ est une tangente à la courbe ce qui permet d'en achever la construction (n° 498).

• **512. Théorèmes d'Apollonius.** — 1° ***La différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués d'une hyperbole est constante et égale à*** $a^2 - b^2$

Dans le parallélogramme OMPN on a (fig. 441) :

$$\overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}$$

Soit : $$\overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cos 2\alpha.$$

Donc (nos 497 et 477) : $\overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = c^2 . \dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = a^2 - b^2.$

2° ***L'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à*** ab.

En effet l'aire du parallélogramme OMPN est le double de l'aire du triangle OMP. Elle est donc égale à l'aire du triangle OPQ, c'est-à-dire (n° 498) à ab.

HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

• **513. Équations d'une hyperbole équilatère.** — Une hyperbole est équilatère (n° 477) lorsque ses asymptotes OX et OY sont rectangulaires (fig. 442) c'est-à-dire lorsqu'elles sont bissectrices des angles formés par ses axes Ox et Oy. Dans ce cas on a :

$$a = b = \frac{c\sqrt{2}}{2} \qquad \text{soit} \qquad e = \sqrt{2}$$

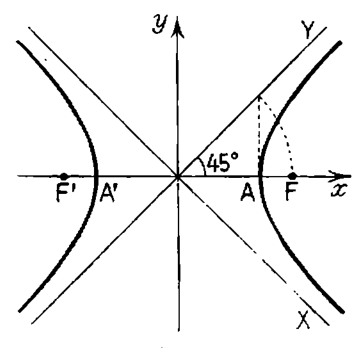


Fig. 442.

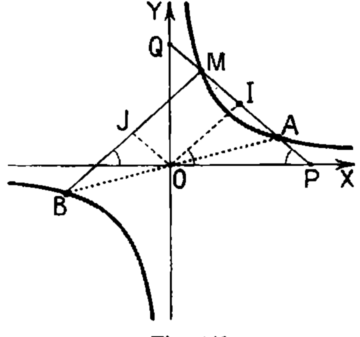


Fig. 443.

Toute courbe semblable à une hyperbole équilatère est une hyperbole équilatère. Rapportée à ses axes, l'équation de l'hyperbole équilatère est donc (n° 492) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad \text{Soit :} \qquad \boxed{x^2 - y^2 = a^2} \qquad (1)$$

Il existe la même relation entre une hyperbole quelconque et l'hyperbole équilatère de mêmes sommets qu'entre une ellipse et son cercle principal.

Sur la première : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ et sur la seconde : $y^2 = x^2 - a^2$.
On passe donc de la seconde à la première par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\pm \frac{b}{a}\cdot$ Les asymptotes subissent la même affinité. Rapportée à ses asymptotes OX et OY, l'équation de l'hyperbole équilatère s'écrit (n° 502) :

$$XY = \frac{c^2}{4}\cdot \quad \text{Soit :} \quad \boxed{XY = \frac{a^2}{2}} \qquad (2)$$

Il en résulte que la courbe représentative de la fonction $y = \frac{k}{x}$ est une hyperbole équilatère.

• **514. Théorème fondamental.** — ***Pour qu'un point* M *appartienne à une hyperbole équilatère de diamètre* AB *il faut et il suffit que les cordes supplémentaires* MA *et* MB *soient également inclinées sur les asymptotes.***

1° Si M appartient à l'hyperbole (fig. 443), la droite MB est parallèle au segment OI qui joint le centre O au milieu I de AM. Or (n° 506) le point I est aussi le milieu du segment PQ déterminé par les asymptotes OX et OY sur la droite AM. Dans le triangle rectangle OPQ, on a IO = IP = IQ et le triangle IPO est isocèle donc : (OX, PI) = — (OX, OI) soit :

$$\boxed{(OX, AM) = -(OX, BM)} \qquad (1)$$

2° Réciproquement considérons un point M du plan vérifiant cette relation. La droite AM recoupe l'hyperbole en M′ tel que (OX, AM′) = — (OX, BM′). On a donc : (OX, BM) = (OX, BM′). Ce qui montre que BM est confondue avec BM′ et que le point M est en M′ sur l'hyperbole équilatère.

• **515. Corollaires.** — 1° ***Une hyperbole équilatère est définie par un diamètre et un de ses points.***

Si l'on connaît le diamètre AB ainsi que le point M, la relation : (OX, AM) = — (OX, BM) montre que les asymptotes OX et OY sont parallèles aux bissectrices de l'angle AMB.

2° ***L'hyperbole équilatère de diamètre* AB *passant par* C *est le lieu des points* M *tels que* (AC, AM) = — (BC, BM).**

Si OX est une asymptote on doit avoir (OX, AM) = — (OX, BM). Or compte tenu de la relation : (OX, AC) = — (OX, BC) cette condition équivaut à : (AC, AM) = — (BC, BM), ce qui est également une condition nécessaire et suffisante pour que les cercles distincts ACM et BCM soient égaux (n° 58).

3° ***Pour qu'un point* M *décrive une hyperbole équilatère de diamètre* AB, *il faut et il suffit que la somme des angles polaires de* AM *et* BM *soit constante.***

Si Δ est une direction donnée, la relation $(OX, AM) = -(OX, BM)$ s'écrit

$$(OX, \Delta) + (\Delta, AM) = -(OX, \Delta) - (\Delta, BM)$$

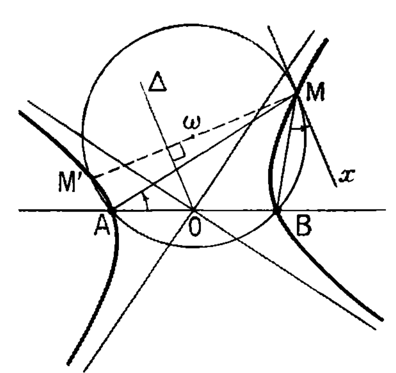


Fig. 444.

soit : $$(\Delta, AM) + (\Delta, BM) = 2(\Delta, OX) = C^{te}.$$

En particulier si Δ est la direction de AB on obtient :

$$(AB, AM) + (AB, BM) = C^{te}.$$

● **516. Application.** — *Le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée Δ, aux différents cercles d'un faisceau, est une hyperbole équilatère.*

1° Soit Mx une tangente, parallèle à Δ au cercle ω du faisceau de points de base A et B (fig. 444). On a (n° 54) : $(AB, AM) = (MB, Mx)$. Donc :
$(AB, AM) + (AB, BM) = (AB, MB) + (MB, Mx) = (AB, Mx) = (AB, \Delta)$.
Donc $(AB, AM) + (AB, BM) = C^{te}$.

2° Si le faisceau de cercles admet A et B pour points limites, on se ramène au cas précédent en remplaçant la direction donnée Δ par sa perpendiculaire Δ'.

SUJET D'EXAMEN

— Équation de l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie. (*Indochine* ME.)

EXERCICES.

● **619.** Construire les points d'intersection d'une ellipse E et d'une hyperbole homofocale H données.

● **620.** 1° Trouver le lieu des points de contact des tangentes (ou celui des pieds des normales) issues d'un point M de l'axe non focal aux ellipses et aux hyperboles homofocales de foyers F et F'.
2° Reprendre le même problème pour un point P du segment FF' ou de ses prolongements.

● **621.** 1° Déterminer le lieu du milieu M d'un segment AB compris entre deux cercles concentriques donnés et vu d'un point donné F sous un angle droit.
2° Trouver le lieu des points M d'où l'on peut mener respectivement à deux coniques (ellipses ou hyperboles) de foyers F et F' deux tangentes rectangulaires.

● **622.** Construire une hyperbole connaissant son centre, un point et la tangente en ce point, ainsi que l'angle des asymptotes.

● **623.** Construire une hyperbole admettant une asymptote donnée connaissant en outre :
1° Trois points de la courbe.
2° Deux points et la tangente en l'un d'eux.
3° Deux points et l'excentricité ou l'angle des asymptotes.

● **624.** 1° Par les points A et B d'une hyperbole on mène les parallèles aux asymptotes et on forme un parallélogramme APBQ. Montrer que la droite PQ est le diamètre conjugué de la corde AB.
2° Construire une hyperbole connaissant trois points A, B, C de la courbe et les directions des asymptotes.

● **625.** 1° Démontrer que deux hyperboles de mêmes asymptotes découpent sur une sécante commune quelconque des cordes de même milieu.
2° En déduire le lieu du milieu M d'une corde AB d'une hyperbole issue d'un point donné P.

● **626.** On donne deux droites fixes Ox et Oy et un point fixe P. Une sécante variable issue de P coupe Ox et Oy en A et B.
1° Déterminer le lieu du milieu M de AB. Préciser ses éléments.
2° Plus généralement déterminer le lieu d'un point N de la droite AB tel que $\overline{PN} = \alpha\overline{PA} + \beta\overline{PB}$ (α et β étant des constantes données).

● **627.** 1° Par un point A d'une hyperbole on mène les parallèles $A\lambda$ et $A\mu$ aux asymptotes OX et OY de l'hyperbole. La droite qui joint au centre O un point variable M de l'hyperbole coupe $A\lambda$ et $A\mu$ en P et Q. Démontrer que

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}\,.\,\overline{OQ}.$$

2° Une droite variable issue d'un point fixe P coupe deux droites fixes Ox et Oy en A et B. Trouver le lieu des points M et M' de cette droite tels que :

$$\overline{PM}^2 = \overline{PM'}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}.$$

● **628.** 1° On désigne par A et B deux points fixes et par M un point variable d'une hyperbole. L'asymptote OY coupe en P et Q les droites MA et MB et en A' et B' les parallèles à l'asymptote OX menées par A et B. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ reste égal au vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.
2° Deux points variables P et Q décrivent des divisions égales sur une même droite Δ. Par deux points fixes A et B on mène les droites AP et BQ. Trouver le lieu du point d'intersection M de ces deux droites.

● **629.** Soient AB et CD deux cordes parallèles de milieux respectifs I et J d'une hyperbole de centre O. Les droites AC et BD se coupent en K et les droites AD et BC se coupent en L.
1° Démontrer que les points O, I, J, K et L sont alignés.
2° En déduire que la droite OI passe par le point de rencontre M des tangentes en A et B ainsi que par les points P et Q communs aux parallèles aux asymptotes menées par A et B.
3° Démontrer que la division (OMPQ) est harmonique.

● **630.** Soit A un point quelconque et deux points B et C diamétralement opposés d'une hyperbole. On désigne par I et J les milieux de AB et AC et par P et Q les points de rencontre de AC et des asymptotes OX et OY. Les tangentes A et B se coupent en un point M de OI et la parallèle à AM menée par O coupe AC en K.
1° Démontrer que les directions OI et OJ sont conjuguées et que la division (AKPQ) est harmonique. Établir que $\overline{OM}.\overline{OI} = \overline{AP}.\overline{AQ}$.
2° On suppose que OI coupe la courbe en D et E. Démontrer que :

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{OM}.\overline{OI}.$$

● **631.** On désigne par A et B deux points diamétralement opposés de l'hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, et par M un point variable sur cette courbe.
1° Démontrer que le produit des coefficients angulaires de deux directions conjuguées par rapport à l'hyperbole est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

2° Quelle relation existe-t-il entre les coefficients angulaires des cordes supplémentaires MA et MB?

● **632.** On considère la famille des hyperboles $(\mathcal{H})$ admettant pour asymptotes deux droites données OS et OS'. Un point variable M décrit une droite donnée Δ parallèle à l'un des axes, coupant OS en A et OS' en B.

1° Construire les intersections P et Q de OS et de OS' avec la tangente en M à l'hyperbole $(\mathcal{H})$ passant par M.

2° Démontrer que P et Q se correspondent dans une rotation fixe dont on précisera l'angle et le centre. En déduire l'enveloppe de la normale en M à $(\mathcal{H})$.

3° Réciproquement trouver le lieu des pieds des normales aux hyperboles $(\mathcal{H})$ issues d'un point donné ω de l'un des axes.

● **633.** Soit M un point variable sur une hyperbole de centre O et de foyers F et F'. On trace les cercles de centres F et F' passant par M et se recoupant en M'.

1° Construire une tangente commune TT' à ces deux cercles. Trouver les lieux de T et T' et du milieu M_1 de TT'. Montrer que M_1 est sur la droite MM' et préciser la longueur et la direction du vecteur TT'.

2° Soit H l'intersection de MM' avec l'axe focal Ox. Déduire de ce qui précède la relation $\overline{M_1M}.\overline{M_1M'} = b^2$ puis $\overline{HM}^2 = \overline{HM_1}^2 - b^2$ et retrouver ainsi l'équation de l'hyperbole.

3° Démontrer que TT' coupe Ox au pied N des normales en M et M' et que le cercle bitangent en M et M' à l'hyperbole est orthogonal au cercle de diamètre TT'.

● **634.** On désigne par P et Q les intersections de la tangente en un point variable M d'une hyperbole avec les asymptotes OS et OS', par I et J les intersections de la normale en M avec l'axe non focal Oy et l'axe focal Ox. Soient A et A' les projections sur les asymptotes du point I et soient B et B' celles du point J.

1° Démontrer que les points O, P, Q sont situés sur le cercle de diamètre IJ et que M est l'intersection de AA' et de BB'. En déduire une construction de la normale en M à l'hyperbole.

2° Etablir la relation $\overline{IM}^2 - \overline{IA}^2 = a^2$. Montrer que le cercle de centre I, bitangent en M et M_1 à l'hyperbole, découpe sur une asympote un segment de longueur constante $2a$.

3° Etablir la relation : $\overline{JB}^2 - \overline{JM}^2 = b^2$. En déduire que le cercle de centre J, angent aux asymptotes, découpe sur la tangente en M un segment de longueur constante $2b$.

● **635.** 1° Soient AB et CD deux cordes d'une hyperbole antiparallèles par rapport aux asymptotes qu'elles coupent respectivement en P et Q et en R et S. Démontrer que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un cercle ω concentrique au cercle PQRS.

2° En déduire une construction des points d'intersection d'une droite donnée Δ et d'une hyperbole définie par ses asymptotes OX et OY et un point de la courbe.

3° Un cercle variable ω passe par deux points fixes P et Q et recoupe les droites fixes OP et OQ en R et S. Le cercle de centre ω passant par un point donné A de la droite PQ coupe la droite RS en M et M'. Lieu des points M et M'.

● **636.** Une sécante variable issue d'un point fixe M coupe une hyperbole donnée en A et B et coupe ses asymptotes OX et OY en P et Q. On désigne par λ le produit des coordonnées obliques X et Y de A et par μ celui des coordonnées analogues de M.

1° Etablir la relation $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MP}.\overline{MQ} - \overline{AP}.\overline{AQ}$ et montrer que les produits $\overline{MP}.\overline{MQ}$, $\overline{AP}.\overline{AQ}$ et $\overline{MA}.\overline{MB}$ sont proportionnels à des nombres constants. Comparer $\overline{MA}.\overline{MB}$ au carré du demi-diamètre OI parallèle à AB.

2° *Pour que quatre points* A, B, C, D *d'une hyperbole appartiennent à un même cercle de centre* ω *il faut et il suffit que les cordes* AB *et* CD *soient également inclinées sur les axes* ou qu'elles coupent les asymptotes en quatre points P, Q, R, S d'un cercle de même centre ω.

● **637.** Utiliser la propriété précédente pour construire :

1° Le quatrième point D commun à une hyperbole et au cercle ABC passant par trois points A, B et C de cette hyperbole.

2° Les points C et D où se recoupent une hyperbole et un cercle passant par deux points A et B de cette hyperbole.

● **638.** 1° Trouver le lieu du second foyer d'une hyperbole équilatère dont on connaît un foyer et une tangente.
2° Construire une hyperbole équilatère connaissant un foyer et deux tangentes ou connaissant un foyer, une tangente et son point de contact.

● **639.** 1° Trouver le lieu des foyers des ellipses et des hyperboles Γ tangentes aux quatre côtés d'un parallélogramme.
2° Construire la courbe Γ connaissant sa distance focale ou la direction de son axe focal.

● **640.** 1° Soient B et C les sommets d'une hyperbole équilatère et A un point quelconque de la courbe. Démontrer que le triangle ABC est un triangle pseudo-rectangle de sommet A (ex. n° 322), c'est-à-dire tel que $|B - C| = 1$ droit.
2° Lieu des sommets A des triangles pseudo-rectangles dont la base BC est un segment donné.

● **641.** 1° Trouver le lieu du sommet A d'un triangle isocèle dont les côtés égaux AB et AC passent respectivement par deux points fixes P et Q et dont la base BC est portée par une droite OX issue du milieu O de PQ.
2° Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est constant et qu'il en est de même du vecteur $\overrightarrow{DE}$ découpé par les droites AB et AC sur la droite OY perpendiculaire en O à OX. Comparer les divisions ABDP et EQAC.

● **642.** On donne un triangle ABC rectangle en A et un point M variable sur le cercle ABC. La médiane MI du triangle MAB coupe la droite AC en K et la perpendiculaire en K à AC coupe BM en P.
1° Démontrer que le faisceau A(BCMP) est harmonique.
2° Trouver le lieu géométrique du point P. Préciser ses éléments.

● **643.** Soient A et A' deux points diamétralement opposés d'une hyperbole équilatère. Démontrer que le cercle de centre A passant par A' recoupe la courbe en trois points B, C et D, sommets d'un triangle équilatéral de centre A.

● **644.** Soient OX et OY deux droites rectangulaires données. Par tout point M du plan passent une hyperbole équilatère Γ d'asymptotes OX et OY et une hyperbole équilatère Γ' d'axes OX et OY. La tangente en M à Γ coupe OX et OY en P et Q et la tangente en M à Γ' coupe les asymptotes de Γ' en R et S.
1° Démontrer que la quadrilatère PRQS est un carré et que les courbes Γ et Γ' sont orthogonales en leurs deux points communs.
2° Construire le réseau orthogonal formé par les hyperboles Γ et Γ'.

● **645.** 1° Tout cercle ω passant par deux points A et B diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère Γ recoupe cette hyperbole en deux points C et D diamétralement opposés sur le cercle ω et la droite CD est perpendiculaire aux tangentes en A et B à Γ.
2° Réciproquement si un cercle ω a pour diamètre une corde CD d'une hyperbole équilatère Γ il recoupe Γ aux points A et B où les tangentes à Γ sont perpendiculaires à CD.

● **646.** Soient A et B les sommets d'une hyperbole équilatère Γ de centre O et BY la tangente en B. Toute droite issue de A recoupe l'hyperbole en M, le cercle principal de diamètre AB en P et la tangente BY en R.
1° Montrer que BY est bissectrice de l'angle MBP et que la division (ARMP) est harmonique. En déduire que OP et OM passent respectivement par les projections H et K de M et P sur BY. Construire l'un des points M ou P connaissant l'autre.
2° On applique la construction précédente à tout point M du plan. Montrer que lorsque M décrit une droite Δ coupant BY en I le point P décrit une droite Δ', quatrième rayon du faisceau harmonique I(ABMP). Construire l'homologue d'une corde MM_1 de Γ ou de la tangente en M à Γ.
3° Ramener la construction des points communs à Γ et à une droite donnée Δ ou celle des tangentes à Γ issues d'un point S à un problème analogue relatif au cercle principal de Γ.

● **647.** 1° Démontrer qu'il existe une hyperbole équilatère et une seule circonscrite à un parallélogramme ABA'B' de centre O.
2° Soit M un point quelconque de cette hyperbole. Démontrer que les quatre

cercles MAB, MBA′, MA′B′ et MB′A sont égaux. Comparer les angles (MA , MB) et (MA′, MB′).

● **648.** On se donne un parallélogramme ABA′B′ et on se propose de trouver le lieu Γ des points M tels que (MA , MB) = — (MA′, MB′).

1° Démontrer que les cercles MAB et MA′B′ sont égaux et se recoupent en un point M′ orthocentre de chacun des triangles MAB′ et MA′B.

2° Comparer les cercles MAB et MAB′ et démontrer que Γ est l'hyperbole équilatère circonscrite au parallélogramme ABA′B′.

● **649.** Soit A′ le point diamétralement opposé au point A sur une hyperbole équilatère Γ circonscrite au triangle ABC dont on désigne par H l'orthocentre.

1° Démontrer que les points A′, B, C et H appartiennent à un même cercle égal au cercle ABH. Que devient le cercle A′BCH dans l'homothétie $\left(A, \frac{1}{2}\right)$?

2° En déduire que : *Toute hyperbole équilatère* Γ *circonscrite à un triangle* ABC *passe par l'orthocentre* H *de ce triangle et son centre* O *appartient au cercle d'Euler du triangle* ABC. Que peut-on dire des extrémités de deux cordes rectangulaires de cette hyperbole?

3° L'hyperbole Γ recoupe le cercle ABC en un point H′ diamétralement opposé sur Γ à l'orthocentre H et les asymptotes de Γ sont les droites de Simson du triangle ABC relatives aux points M et M′ où les parallèles issues de H′ à ces asymptotes recoupent le cercle ABC.

● **650.** 1° Montrer que toute corde AB d'une hyperbole équilatère et la droite joignant le centre O de l'hyperbole au milieu I de AB sont également inclinées sur les asymptotes. Construire une hyperbole équilatère connaissant son centre O et deux points de la courbe.

2° Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC inscrit dans une hyperbole équilatère de centre O. Démontrer que (OB′, OC′) = (A′B′, A′C′) et montrer que le point O appartient au cercle A′B′C′.

3° Démontrer que l'hyperbole équilatère passant par deux sommets A et B du quadrangle orthocentrique ABCD et dont le centre O appartient au cercle d'Euler du quadrangle passe par les sommets C et D.

● **651.** 1° Démontrer en utilisant les résultats de l'exercice 649 ou 650 que le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ABC est le cercle d'Euler du triangle ABC.

2° Etablir qu'il existe une hyperbole équilatère et une seule circonscrite à un quadrangle ABCD non orthocentrique.

3° En déduire que les cercles d'Euler des quatre triangles ABC, BCD, CDA et DAB concourent en un même point. Etablir directement cette propriété.

● **652.** On se donne un segment AA′ de milieu O et à tout point P du plan on associe les points M et M′ de la bissectrice intérieure de l'angle AOP tels que

$$\overline{OM}^2 = \overline{OM'}^2 = OA.OP.$$

1° Démontrer que les angles (AM, AP) et (A′M, A′A) sont opposés. En déduire que, lorsque P décrit une droite D passant par A, le lieu de M et de M′ est une hyperbole équilatère de centre O. Montrer qu'il en est de même lorsque P décrit la droite Δ homologue de D dans l'homothétie (O, $\pm k^2$).

2° Réciproquement si M et M′ sont deux points variables diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère de centre O, le lieu de P est une droite Δ.

3° En déduire une construction des points communs à deux hyperboles équilatères Γ et Γ′ de même centre O.

● **653.** On considère un triangle ABC et la hauteur AH.

1° Montrer que la relation $B - C = \pm \pi/2$ équivaut à la relation algébrique $\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{HC}$.

2° Montrer que cette même relation équivaut à $b^2 - c^2 = \pm 2aR$ (a = BC, b = AC, c = AB, R, rayon du cercle circonscrit).

3° Lieu du point A quand B et C étant fixes,

$$B - C = + \pi/2 \text{ ou } - \pi/2.$$

4° Application à l'intersection d'une hyperbole équilatère et d'un cercle passant par les sommets. *(Grenoble.)*

● **654.** 1° On considère l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$. Montrer que, si A et A′ sont les sommets, m la projection de M sur AA′, cette hyperbole est le lieu des points M tels que $\overline{mM}^2 = \overline{mA}.\overline{mA'}$.

2° On considère un cercle (C) de centre C, qui varie en passant constamment par deux points fixes A et A′. O est le milieu de AA′. Soit MM′ le diamètre du cercle (C) parallèle à AA′. Trouver le lieu (H) des points M et M′ lorsque (C) varie.

3° Soit Q le pôle de AA′ par rapport au cercle (C). Montrer que le cercle (Γ) circonscrit au triangle QMM′ passe par le symétrique Q′ de O par rapport à C.
En déduire que le cercle (Γ) coupe la droite AA′ en deux points F et F′ tels que OF = OF′ = OA$\sqrt{2}$. Que représentent pour (H) les points F et F′ et la droite MQ ?

4° Montrer que MQ et MO forment avec les parallèles aux asymptotes de (H) menées par M un faisceau harmonique. En déduire que la tangente en M à (H) coupe les asymptotes symétriques en deux points par rapport à M. *(Strasbourg.)*

● **655.** Dans le plan des axes rectangulaires Ox, Oy, on considère la famille des cercles (C) qui coupent l'axe Ox aux points fixes donnés A, A′ d'abscisses respectives a et $-a$, et la famille des cercles (Γ) tels que, si M parcourt l'un quelconque d'entre eux, le rapport des distances MA, MA′ reste constant.

1° Trouver le lieu (S) des extrémités P et P′ du diamètre d'un cercle (C) parallèle à AA′, et montrer que ce lieu est aussi celui des extrémités Q et Q′ du diamètre d'un cercle (Γ) perpendiculaire à AA′.

2° Soit K le pôle de AA′ par rapport à un cercle (C) quelconque de centre I; on désigne par H le point diamétralement opposé au point K sur le cercle (ω) circonscrit au triangle KPP′.
Démontrer que le point I est le milieu du segment OH, et que les points où le cercle (ω) coupe l'axe Ox restent fixes quand le cercle (C) varie.
Préciser le rôle de ces points vis-à-vis de la courbe (S), et en déduire une propriété remarquable des droites KP, KP′ relativement à cette courbe.

3° Soient (X) et (X′) deux droites fixes menées parallèlement à la droite AA′ à la même distance donnée b de part et d'autre de cette droite. On marque sur (X) un point quelconque T; on désigne par (Δ) la tangente en T au cercle (C) qui passe par ce point, et par T′ le point où (Δ) coupe la droite (X′).
Montrer que le produit des distances des points A, A′ à la droite (Δ) reste constant lorsque T varie sur (X). En déduire, dans les mêmes conditions, l'enveloppe de (Δ), et indiquer une propriété remarquable du cercle de diamètre TT′. *(Toulouse.)*

VINGT ET UNIÈME LEÇON

PARABOLE

● **517. Définition.** — ***La parabole est le lieu géométrique des points du plan équidistants d'un point fixe*** F ***et d'une droite fixe*** D.

Le point fixe F est le *foyer* et la droite fixe D *la directrice* de la parabole (fig. 445). Tout point M se projetant en H sur D appartient à la parabole si :

$$\boxed{MF = MH}$$

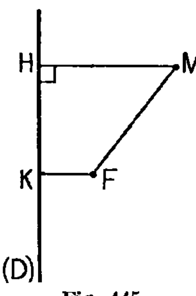


Fig. 445.

La distance FK = p du foyer F à la directrice est le *paramètre de la parabole* que nous supposerons non nul.

Il est clair que toute homothétie positive de rapport k transforme le trapèze rectangle MFKH en un trapèze semblable. Elle transforme donc la parabole en une autre parabole de paramètre kp.

Toute courbe semblable à une parabole est une parabole.

En particulier deux paraboles de même paramètre sont égales.

● **518. Tracé continu de la parabole.** — Attachons à la pointe B d'une équerre AHB

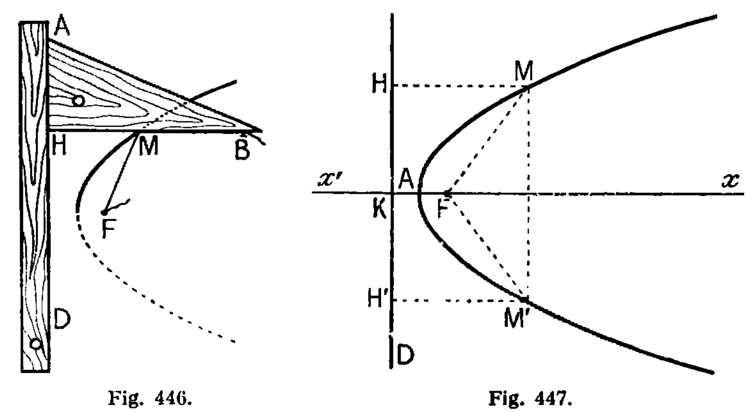


Fig. 446. Fig. 447.

(fig. 446) une des extrémités d'un fil souple inextensible. Puis à une pointe fixée en F attachons l'autre extrémité du fil de façon que sa longueur entre B et F soit égale au côté HB

de l'angle droit de l'équerre. Faisons glisser l'équerre contre la règle placée le long de D en maintenant le fil tendu à l'aide de la pointe M du crayon appuyée contre le côté HB de l'équerre. Le point M décrit une courbe telle que HB = HM + MF donc MF = MH. C'est donc un arc de la parabole de foyer F et de directrice D.

• **519. Axe et sommet de la parabole.** — Désignons par $x'x$ la droite FK (fig. 447). Si un point M appartient à la parabole il en est de même du point M' symétrique de M par rapport à $x'x$. La droite $x'x$ est donc un axe de symétrie de la courbe, appelé *axe de la parabole.*

Tout point de la parabole situé sur l'axe $x'x$ est équidistant de F et de K. Par suite seul le milieu A du segment FK appartient à la parabole. Ce point est appelé *sommet de la parabole.*

• **520. Constructions par points de la parabole.** — 1° Soit une droite δ perpendiculaire en P à l'axe $x'x$ (fig. 448). Tout point M de la parabole situé sur cette droite est tel que MF = PK. Il appartient donc au cercle de centre F et de rayon PK. Ce cercle coupe effectivement la droite δ en deux points M et M' symétriques par rapport à $x'x$ si PF < PK c'est-à-dire si P appartient à la demi-droite Ax.

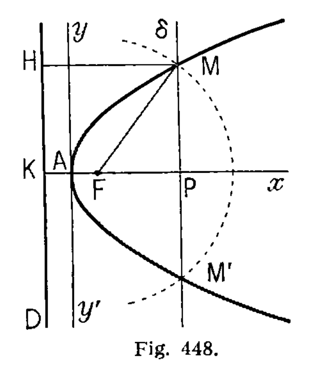


Fig. 448.

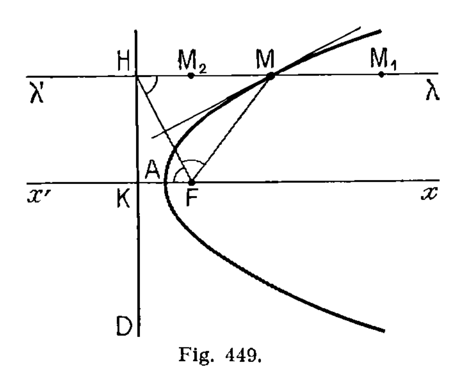


Fig. 449.

Cette construction montre que la parabole est tout entière située du même côté que le foyer F par rapport à la droite $y'y$ perpendiculaire en A à $x'x$.

2° Menons une droite $\lambda'\lambda$ perpendiculaire en H à la directrice D (fig. 449). Pour qu'un point M de cette droite appartienne à la parabole, il faut et il suffit que MF = MH, donc que M soit situé sur la médiatrice de FH. L'angle FHλ étant aigu, il y a un point M et un seul de la demi-droite Hλ répondant à la question.

En répétant l'une ou l'autre des constructions précédentes on obtient un tracé par points de la parabole.

• **521. Direction asymptotique de la parabole.** — La droite $\lambda'\lambda$ (fig. 449) pouvant être aussi éloignée qu'on le désire, il en est de même du point M. La parabole admet donc deux branches infinies. Pour que le point M s'éloigne indéfiniment sur l'une de ces branches, il faut et il suffit que le point H

s'éloigne à l'infini sur D, donc que l'angle AFH tende vers un droit. Comme $\widehat{AFH} = \widehat{FHM} = \widehat{HFM}$, on voit que l'angle AFM tend vers deux droits et que la position limite de la demi-droite FM est la dèmi-droite Fx.

La parabole admet une direction asymptotique unique, celle de son axe.

Comme la droite Mλ, parallèle à cette direction asymptotique, s'éloigne indéfiniment en même temps que M, il en résulte (n° 475) que la parabole n'admet pas d'asymptote.

● **522. Intérieur et extérieur de la parabole.** — D'après l'étude du n° 520, (fig. 449) la parabole partage toute parallèle $\lambda'\lambda$ à son axe en deux parties Mλ' et Mλ. Elle partage donc le plan en deux régions distinctes. Celle qui contient le foyer F est *l'intérieur* de la parabole et l'autre, *l'extérieur* de la parabole.

Tout point M_1 de la demi-droite Mλ est un point intérieur. Il est situé du même côté que F par rapport à la médiatrice de FH, donc : $\boxed{M_1F < M_1H.}$

Tout point M_2 de la demi-droite Mλ' est un point extérieur. Il est situé du même côté que H par rapport à la médiatrice de FH, donc : $\boxed{M_2F > M_2H.}$

Il en résulte comme aux n°s 426 et 471 que :

Un point est intérieur ou extérieur à la parabole suivant que sa distance au foyer est inférieure ou supérieure à sa distance à la directrice.

● **523. Théorème fondamental.** — ***La parabole est le lieu des centres des cercles tangents à une droite fixe et passant par un point fixe non situé sur cette droite.***

1° Tout point M de la parabole de foyer F et de directrice D est tel que MF = MH (fig. 450). Le cercle de centre M passant par F est donc tangent en H à la droite D.

2° Si un cercle de centre M, tangent en H à la droite donnée D, passe par le point fixe F, son rayon MF est égal à la distance MH de son centre à la droite D. Donc MF = MH et le point M appartient à la parabole de foyer F et de directrice D.

Fig. 450.

● **524. Intersection d'une droite et d'une parabole.** — Pour construire les points communs à la parabole et à une droite donnée Δ (fig. 451) il nous faut chercher les cercles tangents à la directrice D, passant par F et centrés sur la droite Δ, c'est-à-dire passant par F et par F_1 symétrique de F par rapport à Δ. Nous sommes ramenés au problème étudié au n° 324. Rappelons la solution :

Par le point I commun à FF_1 et à D on mène la tangente IT à un cercle quelconque passant par F et F_1. Les points de contact avec D des cercles cherchés sont les intersections φ et φ' de D avec le cercle de centre I passant par T. Les

centres M et M′ de ces cercles sont les intersections de Δ avec les droites φμ et φ′μ′ parallèles à l'axe $x'x$.

• 525. Discussion. — Le point I existe si Δ n'est pas parallèle à $x'x$. Le produit $\overline{\text{IF}}.\overline{\text{IF}_1}$ est positif si F et F_1 sont d'un même côté de la droite D. On obtient alors deux points φ et φ′ symétriques par rapport à I et par suite *deux solutions distinctes* M *et* M′.

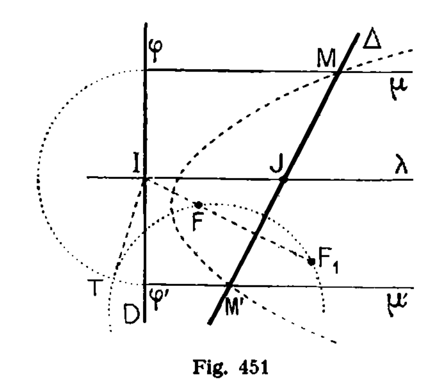


Fig. 451

Fig. 452.

Si le point F_1 est sur D, les points F_1, I, φ et φ′ sont confondus et il en est de même de M et M' : *une seule solution.* Pas de solution si F et F_1 sont de part et d'autre de D.

Le point I cesse d'exister si Δ devient parallèle à $x'x$. On obtient dans ce cas une solution en prenant φ au point d'intersection de Δ et de D comme cela a été vu au n° 520, 2°.

Une droite Δ *non parallèle à l'axe de la parabole a deux points communs distincts avec la parabole si le foyer* F *et son symétrique* F_1 *par rapport à la droite* Δ *sont d'un même côté de la directrice. Ces deux points sont confondus si* F_1 *est sur* D. *Une parallèle à l'axe de la parabole coupe la courbe en un point unique.*

Remarquons que si Δ passe par F (fig. 452), le point F_1 est en F, mais I reste sur la perpendiculaire à Δ passant par F et on a : Iφ = Iφ′ = IF.

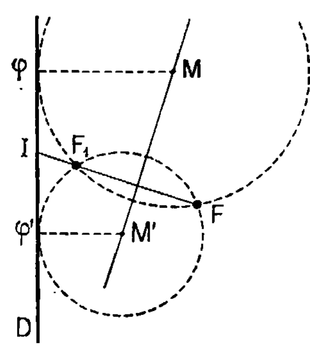
• 526. Diamètres de la parabole. — La corde MM′ de la parabole (fig. 451) se projette en φφ′ sur la directrice et son milieu J, au milieu I de φφ′. Or le point I, intersection de la directrice avec la perpendiculaire menée de F à la corde MM′, reste fixe lorsque MM′ se déplace en restant parallèle à une direction donnée Δ. Le milieu J de MM′ décrit la portion intérieure à la parabole de la perpendiculaire Iλ à D :

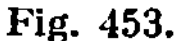
***Le lieu des milieux des cordes d'une parabole, parallèles à une direction donnée* Δ *appartient à une parallèle à l'axe de la parabole appelée diamètre conjugué de la direction* Δ.**

Notons que le diamètre conjugué de la direction Δ coupe la directrice D au point situé sur la perpendiculaire menée de F à Δ.

TANGENTES A LA PARABOLE

● **527. Existence de la tangente en un point.** — Soit M un point donné et M′ un point quelconque de la parabole de foyer F et de directrice D (fig. 453). Les points M et M′ sont les centres de deux cercles passant par F et tangents respectivement en φ et φ′ à la directrice D. Ces cercles se recoupent au point F_1, symétrique de F par rapport à la sécante MM′. La droite FF_1 coupe D en un point I milieu de φφ′ car $\overline{I\varphi}^2 = \overline{I\varphi'}^2 = IF.IF_1$. Lorsque le point M′ se dépla-




Fig. 453.

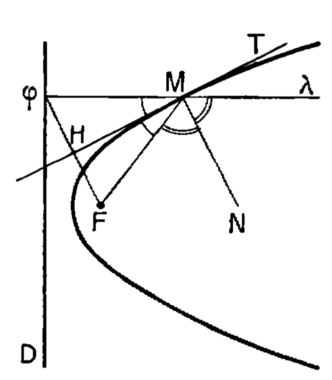


Fig. 454.

çant sur la parabole vient se confondre avec le point M, le point φ′ vient en φ et il en est de même du point I. La relation $\overline{I\varphi}^2 = \overline{IF}\cdot\overline{IF_1}$ montre que IF_1 tend vers zéro et que le point F_1 vient également se confondre avec φ. Il en résulte que la droite MM′, médiatrice du segment FF_1 admet pour position limite la médiatrice de Fφ (fig. 454). Le triangle MFφ étant isocèle cette médiatrice est bissectrice intérieure de l'angle FMφ, donc bissectrice extérieure de l'angle FMλ.

En tout point d'une parabole il existe une tangente bissectrice extérieure de l'angle formé par le rayon vecteur et la demi-droite intérieure parallèle à l'axe, issue de ce point.

En particulier la *tangente au sommet* A de la parabole est la perpendiculaire $y'y$ en ce point à l'axe de la parabole (fig. 455). Elle se déduit de la directrice D dans l'homothétie (F, 1/2).

La normale en M *à la parabole est la bissectrice intérieure* MN *de l'angle* FMλ.

● **528. Remarque.** — La deuxième construction par points de la parabole (n° 520) fournit, en même temps que le point M, la tangente en ce point. En effet (fig. 454), φ étant un point quelconque de D, la médiatrice de Fφ coupe la parallèle φλ à l'axe en un point M de la parabole et la tangente en M est précisément la médiatrice que nous venons de construire.

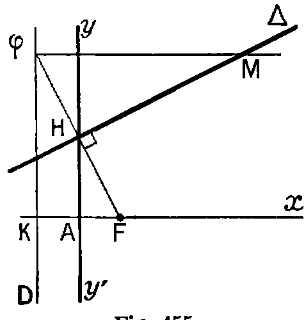
• **529. Propriétés de la tangente à la parabole.** — 1° L'étude du n° 527 montre que toute tangente à la parabole est médiatrice d'un segment Fφ joignant le foyer F à un point φ de la directrice (fig. 455). La remarque précédente montre qu'une telle médiatrice est une tangente à la parabole. Il en résulte que :

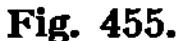
Pour qu'une droite Δ soit tangente à la parabole il faut et il suffit que le symétrique du foyer par rapport à cette droite soit situé sur la directrice.

Le point de contact de cette tangente Δ est son intersection avec la parallèle $\varphi\lambda$ à l'axe $x'x$.

2° L'homothétie (F, 1/2) transforme φ en H, projection de F sur la tangente Δ et transforme la directrice D en la tangente au sommet $y'y$. Donc :

Le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes à la parabole est la tangente au sommet de la parabole.




Fig. 455.

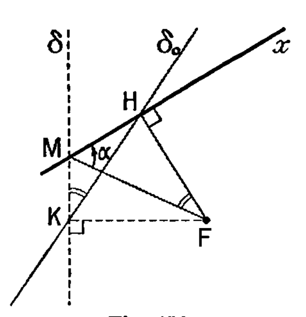


Fig. 456.

La podaire de la parabole par rapport à son foyer est donc sa tangente au sommet.

3° Il résulte du n° 525 qu'une tangente à la parabole n'a qu'un seul point commun avec la courbe. En appliquant au point F_1 l'homothétie (F, 1/2) on voit que :

Une droite est sécante ou extérieure à la parabole suivant que le foyer et sa projection sur cette droite sont d'un même côté ou non de la tangente au sommet.

• **530. Générations tangentielles de la parabole.** — D'après ce qui précède :

1° *L'enveloppe de la médiatrice d'un segment joignant un point fixe* F *à un point variable d'une droite* D *est la parabole de foyer* F *et de directrice* D.

2° ***Lorsque le sommet d'un angle droit décrit une droite fixe $y'y$, l'un de ses côtés passant par un point fixe*** F, ***le second côté enveloppe la parabole de foyer*** F ***admettant la droite $y'y$ pour tangente au sommet.***

Autrement dit, l'antipodaire d'une droite est une parabole.

3° Plus généralement considérons (fig. 456) un angle constant $(MF, Mx) = \alpha$ dont le sommet décrit une droite fixe δ et dont le côté MF passe par un point fixe F. Soit H la

projection de F sur Mx. Le triangle FMH restant semblable à lui-même, le lieu de H est la droite δ_0 homologue de δ dans la similitude de centre F qui transforme M en H. *L'enveloppe de* Mx *est la parabole de foyer* F *admettant* δ_0 *pour tangente au sommet.*

Comme δ et δ_0 se coupent en K sur le cercle MHF (n° 242), l'angle FKM est droit ce qui montre que δ est tangente à la parabole enveloppe.

• **531. Sous-tangente. Sous-normale.** — La tangente et la normale en M coupent respectivement l'axe de la parabole en T et N (fig. 457). Les deux segments TP et PN, projections sur l'axe $x'x$ de la tangente MT et de la normale MN sont appelés respectivement *sous-tangente* et *sous-normale* relatives à M.

Les droites φM et $x'x$ étant parallèles, le milieu H de Fφ est le milieu de MT. Par projection sur $x'x$ on voit que A est le milieu de la sous-tangente TP. D'autre part les droites φF et MN, perpendiculaires à MT sont parallèles et le quadrilatère MφFN est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{\varphi M} = \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{FN}$ d'où : $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{PN}$. La longueur PN est donc égale au paramètre $p = \text{KF}$:

Le sommet de la parabole est le milieu de la sous-tangente tandis que la sous-normale est égale au paramètre de la parabole.

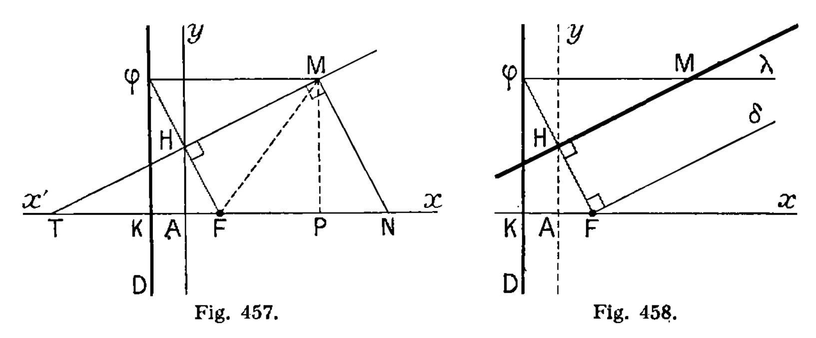


Fig. 457. Fig. 458.

Notons d'autre part que la droite φF médiatrice de MT coupe le segment TN en son milieu F. Le cercle de centre F, passant par M coupe par suite l'axe $x'x$ en T et N, ce qui donne une construction simple de la tangente et de la normale en M.

• **532. Tangente parallèle à une direction donnée.** — Considérons la parabole définie par son foyer F, sa directrice D (fig. 458) et soit δ une direction donnée. Le symétrique φ du foyer F par rapport à une tangente parallèle à δ se trouve sur la directrice D et sur la perpendiculaire menée de F à la droite δ. Or cette perpendiculaire coupe D en un point φ unique si toutefois δ n'est pas parallèle à l'axe de la parabole. La médiatrice de Fφ est la tangente cherchée.

Il existe une tangente à la parabole parallèle à une direction donnée distincte de celle de l'axe de la parabole.

Le point de contact M de cette tangente est son intersection avec la parallèle $\varphi\lambda$ à l'axe. Or la droite $\varphi\lambda$ est le diamètre de la parabole conjugué de la direction δ (n° 526). Le point de contact M est donc l'extrémité de ce diamètre.

• **533. Tangentes issues d'un point donné.** — Le symétrique φ du foyer F de la parabole par rapport à une tangente PM issue du point donné P (fig. 459) appartient à la directrice D. Puisque PF = Pφ, il appartient aussi au cercle de centre P passant par F. A tout point φ commun à ce cercle et à D, correspond une tangente issue de P, médiatrice du segment Fφ et dont le point de contact M est son intersection avec la parallèle φλ à l'axe.

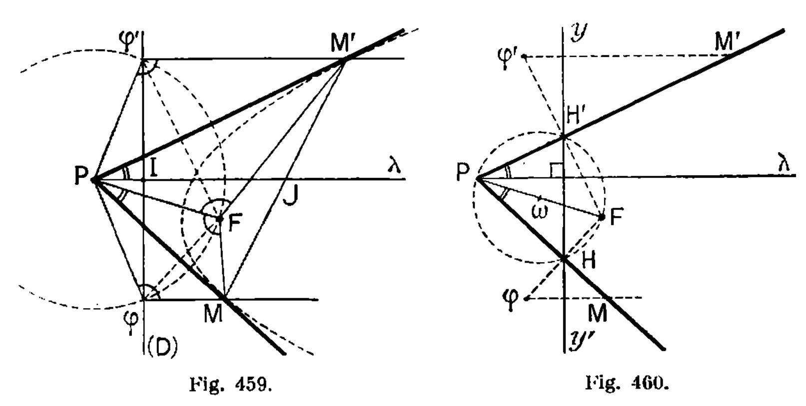


Fig. 459. Fig. 460.

Discussion. — Pour que le cercle de centre P passant par F coupe D il faut et il suffit que la distance PI du point P à D soit inférieure au rayon PF de ce cercle donc (n° 522) que le point P soit extérieur à la parabole.

Par un point extérieur à la parabole on peut lui mener deux tangentes distinctes.

Si le point P est sur la parabole, le cercle P (PF) est tangent en φ à la directrice D : une solution la tangente en P.

Notons d'autre part (fig. 460) que les projections H et H' du foyer F sur les tangentes issues de P sont les intersections de la tangente au sommet Δ avec le cercle de diamètre PF, ce qui fournit une autre construction de ces tangentes.

• **534. Théorèmes de Poncelet.** — 1° Désignons (fig. 459) par Pλ la demi-droite issue de P parallèle à l'axe de la parabole. Les points φ et φ' étant symétriques par rapport à Pλ il en est de même des angles PφM et Pφ'M'.

Or les angles PφM et PFM, symétriques par rapport à la droite PM sont égaux. De même les angles Pφ'M' et PFM' symétriques par rapport à la droite PM' sont égaux. Il en résulte que les angles PFM et PFM' sont égaux.

***La droite qui joint le foyer* F *d'une parabole au point* P *commun aux tangentes en* M *et* M' *à cette parabole est bissectrice intérieure de l'angle* MFM'.

Autrement dit les portions de tangentes PM et PM' sont vues du foyer sous des angles égaux.

2° Les droites Pλ et PM', médiatrices de φ'φ et de φ'F, sont bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{P\varphi'}, \overrightarrow{P\varphi})$ et $(\overrightarrow{P\varphi'}, \overrightarrow{PF})$, donc (n° 50) l'angle (Pλ, PM')

est égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{PF})$ c'est-à-dire à l'angle $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PF})$ car PM est de même bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{PF})$. Soit :

$$(PF, PM) = -(P\lambda, PM').$$

Les tangentes menées d'un point* P *à une parabole sont antiparallèles par rapport à la droite* PF *et la parallèle* Pλ *à l'axe de la parabole.

On peut également dire (fig. 460) que les droites Pλ et PF sont respectivement la hauteur et le diamètre du cercle circonscrit, issus de P, dans le triangle PHH'. Elles sont donc antiparallèles par rapport aux côtés PH et PH' (n° 62). D'autre part le point F et la droite Pλ étant intérieurs à l'angle MPM', on peut même préciser que :

Les angles $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'})$ *et* $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\lambda})$ *ont même bissectrice intérieure et les angles* $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PF})$ *et* $(\overrightarrow{PM'}, \overrightarrow{P\lambda})$ *sont opposés.*

• **535. Corollaire.** — ***Les tangentes* PM *et* PM' *ont des projections égales sur la directrice et le point* P *appartient au diamètre conjugué de la corde* MM'.**

En effet (fig. 459) les segments PM et PM' se projettent sur la directrice D suivant les segments égaux Iφ et Iφ'. La droite Pλ est la base moyenne du trapèze rectangle Mφφ'M' et passe par le milieu J de MM'. La droite Pλ est donc le diamètre conjugué de la direction MM' (n° 526).

• **536. Angle des tangentes.** — Les tangentes PM et PM' à la parabole (fig. 459) étant les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi})$ et $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi'})$ l'angle (PM, PM') est égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{P\varphi'})$ c'est-à-dire à (Pφ, Pλ). Les deux angles MPM' et φPλ étant de même sens on a : $\widehat{\varphi P\lambda} = \widehat{MPM'} = V$.
Comme $\overline{PI}$ est la projection sur l'axe $\overline{P\lambda}$ du vecteur $\overrightarrow{P\varphi}$, on voit que : $\overline{PI} = P\varphi \cos V$

$$\boxed{PI = PF \cos V}$$

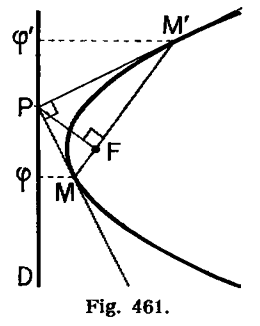


Fig. 461.

Pour que l'angle MPM' soit droit il faut et il suffit que PI = 0 donc que P appartienne à la directrice D (fig. 461).

Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à la parabole est la directrice de cette parabole.

Autrement dit : *La directrice est la courbe orthoptique de la parabole.*

On voit de plus que, lorsque P est sur la directrice les angles PFM et PFM', égaux à l'angle PφM sont droits. La corde MM' passe donc par F et le point F est le pied de la hauteur PF issue de P dans le triangle PMM'.

PARABOLE ET SIMILITUDE

• 537. Théorème. — ***Une tangente variable à une parabole détermine sur deux tangentes fixes des divisions semblables.***

Considérons (fig. 462) deux tangentes fixes AP et AN à la parabole de foyer F et soient B et C leurs intersections par la tangente en un point variable M. Désignons par AX, Bλ et Cμ les parallèles à l'axe de la parabole issues des points A, B et C. D'après le deuxième théorème de Poncelet (nº 534) on a :

$$(BF, BC) = (BP, B\lambda) = (AP, AX) \quad \text{et} \quad (CF, CB) = (CN, C\mu) = (AC, AX).$$

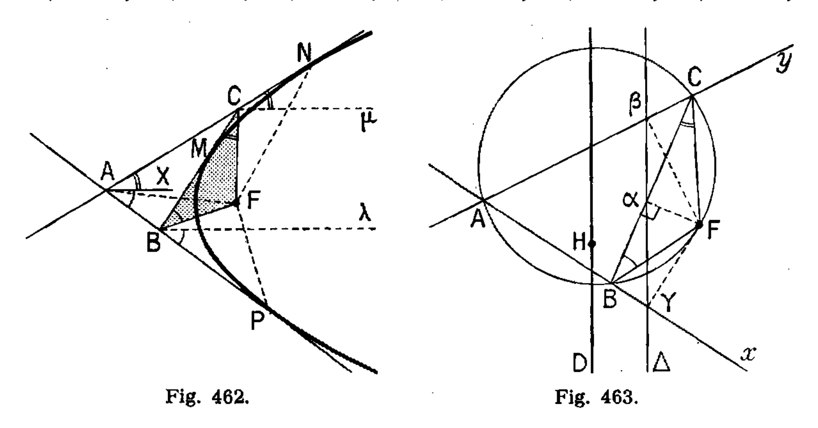


Fig. 462. Fig. 463.

Le triangle FBC ayant des angles de droites constants, reste donc directement semblable à un triangle fixe (nº 238) et les points B et C décrivent sur AP et AN des divisions homologues dans une similitude directe de centre F (nº 248).

• 538. Remarques. — 1º Lorsque M vient en P ou en N, le segment BC vient coïncider avec PA ou avec AN. Il en résulte que :

Le triangle FBC ***est directement semblable à chacun des triangles*** FPA ***et*** FAN ***et l'angle constant*** $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC})$ ***est égal à chacun des angles*** $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FA})$ ***et*** $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FN})$.

2º Les divisions PBA et ACN sont homologues dans la similitude de centre F qui transforme B en C. De même les divisions PBA et BMC sont homologues dans la similitude de centre F qui transforme A en C. *Les trois divisions* BMC, PBA *et* ACN *sont donc semblables.*

Et par suite : $$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}}.$$

• 539. Réciproque. — ***La droite qui joint les points homologues de deux divisions rectilignes semblables enveloppe une parabole tangente aux supports de ces deux divisions.***

Soient deux droites concourantes Ax et Ay sur lesquelles deux points B et C décrivent des divisions semblables (fig. 463). Désignons par α la projection

sur BC de leur centre de similitude F. Le triangle FBC restant semblable à lui-même, il en est de même du triangle rectangle FBα. Le lieu de α est donc la droite Δ, homologue de Ax dans la similitude de centre F qui transforme B en α. L'enveloppe de BC est donc (n° 530) la parabole Γ de foyer F admettant Δ pour tangente au sommet.

Or lorsque B vient en A, la droite BC coïncide avec Ay, et lorsque C vient en A, elle coïncide avec Ax. Les droites Ax et By sont donc deux tangentes particulières à la parabole Γ.

Remarquons que tout point M qui divise le vecteur $\overrightarrow{BC}$ dans un rapport algébrique donné, détermine un triangle FBM qui reste semblable à lui-même. Le point M décrit donc une droite δ et sur cette droite une division semblable à la division décrite par B. La droite δ est tangente à la parabole enveloppe de BM donc à Γ.

● **540. Triangles circonscrits à la parabole.** — Les projections α, β, γ du foyer F sur les côtés du triangle ABC (fig. 463) sont alignées sur la tangente au sommet Δ à la parabole Γ. Il en résulte (n° 65) que le foyer F appartient au cercle ABC. La droite Δ est la droite de Simson relative au point F du cercle ABC. Par suite la directrice D est la droite de Steiner du point F (n° 165) et elle passe par l'orthocentre H du triangle ABC.

Le foyer d'une parabole inscrite à un triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle et sa directrice passe par l'orthocentre de ce triangle.

Si une parabole est tangente aux quatre côtés d'un quadrilatère complet ABCA'B'C', son foyer F est le point commun aux cercles circonscrits aux triangles ABC, AB'C', A'BC' et A'B'C (n° 69). Sa directrice D est la droite qui contient les orthocentres de ces quatre triangles (n° 295). Il en résulte que :

Il existe une parabole et une seule inscrite à un quadrilatère complet. Autrement dit, une parabole est définie par la donnée de quatre tangentes deux à deux concourantes.

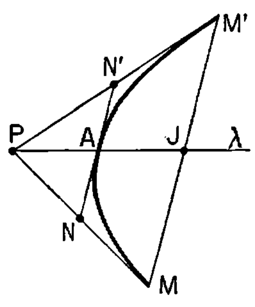


Fig. 464.

● **541. Application aux diamètres de la parabole.** — Désignons par J le milieu du segment MM' joignant les points de contact des tangentes PM et PM' à la parabole (fig. 464). La droite PJ est le diamètre conjugué de la direction MM' (n° 535). Les milieux et N' de PM et N de PM' sont homologues dans la similitude de centre F qui transforme $\overrightarrow{MP}$ en $\overrightarrow{PM'}$. La droite NN' est donc la tangente à la parabole parallèle à MM'. Son point de contact A qui appartient au diamètre PJ (n° 532) est par suite le milieu du segment PJ.

ÉQUATION DE LA PARABOLE

● **542. Parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.** — Prenons (fig. 465) pour origine le sommet de la parabole et pour axe de coordonnées Ox et Oy l'axe de la parabole et sa tangente au sommet. Si p désigne le paramètre de la parabole, le foyer est le point F $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la directrice D la droite

$x = -\frac{p}{2}$. Tout point M (x, y) du plan se projette en $\varphi\ (-\frac{p}{2}, y)$ sur la directrice et on a (n° 31) :

$$MF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \quad \text{et} \quad M\varphi^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

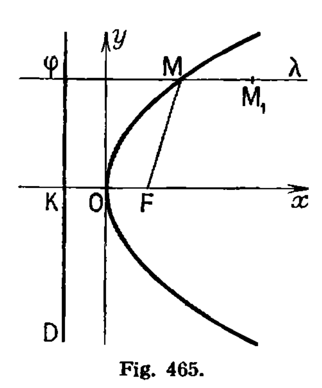


Fig. 465.

Pour que le point M appartienne à la parabole de foyer F et de directrice D il faut et il suffit que $\overline{MF}^2 = \overline{M\varphi}^2$ donc que : $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

Soit : $\boxed{y^2 = 2px.}$ (1)

Cette relation est l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Notons que cette relation est valable même si p est négatif. Le coefficient p est alors la mesure algébrique du vecteur $\overline{KF}$ sur l'axe Ox (paramètre algébrique).

L'équation (1) montre que la courbe représentative de la fonction $y = ax^2$ ou $x^2 = 2.\frac{1}{2a}y$ est une parabole d'axe Oy, tangente à Ox et de paramètre $\frac{1}{2a}$.

• **543. Régions du plan limitées par la parabole.** — Désignons par M_1 (X,Y) un point quelconque de la droite Mλ parallèle à Ox (fig. 465). Comme $Y = y$ on a : $Y^2 - 2pX = y^2 - 2pX = -2p(X - x)$.

Or quel que soit le signe de p le point M_1 est intérieur à la parabole pour $p(X - x) > 0$, extérieur pour $p(X - x) < 0$. Il en résulte que :
Un point est extérieur ou intérieur à la parabole suivant qu'en ce point l'expression $y^2 - 2px$ est positive ou négative.

• **544. Paraboles homofocales.** — Deux ou plusieurs paraboles sont dites *homofocales* si elles ont même foyer et même axe (fig. 466). Prenons pour origine O le foyer d'une parabole et l'axe Ox suivant l'axe de cette parabole. La directrice a pour équation $x = -p$ et la relation $\overline{MO}^2 = \overline{M\varphi}^2$ donne :

$$x^2 + y^2 = (x + p)^2.$$

Soit :

$$y^2 = 2px + p^2.$$

Lorsque p varie de $-\infty$ à $+\infty$ on obtient une famille de paraboles homofocales de foyer O et d'axe Ox.

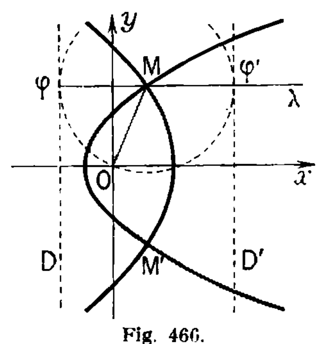


Fig. 466.

1° Par un point donné M du plan passent deux paraboles Γ et Γ′ de cette famille. Leurs directrices D et D′ sont les parallèles à Oy tangentes en φ et φ′ au cercle de centre M passant par O. Les tangentes en M à ces deux paraboles sont les bissectrices de l'angle OMφ. Elles sont donc rectangulaires et les paraboles sont orthogonales en M ainsi qu'en M′ symétrique de M par rapport à Ox :

Les paraboles d'une famille de paraboles homofocales constituent un réseau orthogonal.

2° Il existe une parabole et une seule de cette famille tangente à une droite donnée Δ non parallèle à Ox. Sa directrice D passe par le symétrique φ du foyer O par rapport à Δ. Par conséquent :

Une parabole est définie par la donnée de son foyer, de son axe et d'une tangente non parallèle à cet axe.

SUJETS D'EXAMEN

— Parabole. Définition. Intersection avec une droite. Discussion. (*Strasbourg*, ME et MT.)

— Tangentes à la parabole issues d'un point donné. (*Espagne*, ME.)

— Théorèmes de Poncelet dans la parabole. (*Besançon*, ME et MT.)

EXERCICES

Construire une parabole (on se bornera à déterminer son foyer et sa directrice connaissant :

● **656.** Le foyer et deux points de la courbe.

● **657.** Le foyer et deux tangentes.

● **658.** Le foyer, un point et une tangente.

● **659.** La directrice et deux points de la courbe.

● **660.** La directrice et deux tangentes.

● **661.** La directrice, un point et une tangente.

● **662.** La directrice, un point et la paramètre.

● **663.** La direction de l'axe et trois tangentes.

● **664.** La direction de l'axe, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

● **665.** La direction de l'axe, deux points et la tangente en l'un d'eux.

● **666.** Deux tangentes et leurs points de contact.

● **667.** Le foyer, un point et la direction de l'axe (ou le paramètre).

● **668.** 1° Déterminer l'enveloppe de la tangente au sommet Δ d'une parabole Γ de foyer donné F passant par un point donné A.

2° Construire Γ connaissant, de plus, un point de Δ, ou la direction de Δ ou encore la longueur de la normale en A comprise entre la courbe et l'axe.

● **669.** 1° Une parabole Γ de foyer F passe par le point donné A et admet pour tangente au sommet une droite donnée Δ. Montrer que le cercle de diamètre AF est tangent à Δ et trouver le lieu de F.

2° Construire Γ connaissant en outre son paramètre ou un point de son axe.

● **670.** 1° Construire les points communs et la tangente commune à deux paraboles Γ et Γ' de même foyer F et de directrices respectives D et D'.

2° Evaluer l'angle sous lequel se coupent Γ et Γ' en fonction de l'angle α de leurs axes orientés. Dans quel cas Γ et Γ' sont-elles orthogonales?

● **671.** 1° Construire les points communs à deux paraboles Γ et Γ' de même directrice D et de foyers respectifs F et F'.

2° Déterminer les tangentes communes à Γ et Γ'.

● **672.** On considère une corde AB d'une parabole de foyer Γ et on désigne par I et J les projections de milieu M de AB sur la directrice D et sur l'axe de la parabole.

1° Montrer que la droite IF est perpendiculaire à AB.

2° La médiatrice de AB coupe l'axe en P. Démontrer que JP est égal au paramètre de la parabole.

● **673.** Un cercle variable passe par deux points fixes A et B et recoupe en M une droite donnée Δ passant par B. Déterminer l'enveloppe de la tangente en M au cercle ABM.

● **674.** On donne un triangle isocèle ABC de base BC. Un cercle variable passant par B et C recoupe en P la droite AC et coupe en M et M' la bissectrice extérieure de l'angle BAC.

1° Evaluer en fonction de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ les angles (MB, MP) et (M'B, M'P).

2° Trouver l'enveloppe des droites PM et PM'. Préciser ses éléments.

● **675.** Soient deux points fixes A et B qui se projettent en α et β sur une droite variable Δ telle que $\overline{A\alpha}^2 - \overline{B\beta}^2 = k^2$ (k longueur donnée).

1° Déterminer le lieu du milieu M de $\alpha\beta$.

2° Trouver l'enveloppe de Δ.

● **676.** Deux cercles inégaux O et O' découpent des cordes égales AB et CD sur une droite variable Δ. Soient I et J les milieux de AB et de CD.

1° Lieu du milieu M de IJ et enveloppe de la médiatrice de IJ?

2° En déduire l'enveloppe de Δ. Limiter les arcs utiles.

● **677.** 1° Deux paraboles se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à leur axe. Démontrer qu'elles découpent des cordes de même milieu sur toute sécante à ces deux courbes.

2° Trouver le lieu du milieu des cordes d'une parabole issues d'un point donné P de son plan.

● **678.** 1° Construire les normales à une parabole issues d'un point de son axe.

2° Construire les points M d'une parabole tels que la normale MN limitée à son point d'intersection N avec l'axe ait une longueur donnée.

● **679.** Démontrer que toute affinité orthogonale par rapport à la tangente au sommet d'une parabole Γ ou par rapport à une parallèle à cette tangente transforme la parabole Γ en une parabole de même axe Γ'. Déterminer la relation entre les paramètres p et p' de Γ et de Γ' et le rapport k de l'affinité.

● **680.** Soit A le point commun aux tangentes en B et C à une parabole Γ. Cette parabole peut être considérée comme l'enveloppe de la droite MN qui joint les points M et N qui divisent respectivement les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans un même rapport. En déduire que :

Toute projection parallèle sur un plan d'une parabole Γ *ou toute affinité orthogonale dans son plan transforme la parabole* Γ *en une parabole* Γ'. Construire le foyer et la directrice de Γ' connaissant les points A', B' et C' homologues de A, B et C.

● **681.** Un point variable M d'une parabole de foyer F se projette en H sur la tangente au sommet. Les perpendiculaires menées du sommet A et du point H à la droite AM coupent respectivement MH en K et AF en P.

Démontrer que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{KH} = 4\,\overrightarrow{AF}$. En déduire l'enveloppe de HP et le lieu géométrique du point K.

● **682.** On donne un point fixe A et une droite Δ. La perpendiculaire à Δ en un point variable K coupe en M la perpendiculaire menée par A à AK.

Trouver le lieu du milieu I de MK et celui du point M.

● **683.** Un point fixe P se projette en A sur une droite Δ. La perpendiculaire à Δ en un point variable H et la perpendiculaire menée de A à PH se coupent en M. Déterminer le lieu de M.

● **684.** On donne une droite fixe Δ, un point fixe F situé à la distance d de Δ et une longueur a. Un point M du plan se projette en H sur Δ. Déterminer dans chacune des hypothèses $a < d$, $a = d$ et $a > d$ le lieu du point M lorsque :
1° $MF + MH = a$ 2° $MF - MH = a$ 3° $MH - MF = a$.

● **685.** 1° Lieu des pieds des normales et des points de contact des tangentes issues d'un point P de leur axe aux paraboles homofocales de foyer F et d'axe Fx.
2° Une parabole variable Γ se déduit d'une parabole Γ_0 par translation parallèle à son axe. Trouver le lieu des pieds des normales et le lieu des points de contact des tangentes à Γ issues d'un point fixe P de son axe.

● **686.** On mène dans une parabole, la corde AB parallèle à la tangente en A' et la corde A'B' parallèle à la tangente en A. Démontrer que le point M commun à ces deux cordes est situé au quart de chacune d'elles.

● **687.** Une parabole variable a pour sommet un point fixe A et reste tangente à une droite donnée Δ. Le foyer F de cette parabole se projette en H sur la droite Δ.
1° Montrer que le cercle FAH est tangent à Δ.
2° Trouver le lieu du milieu de FH et celui du foyer F.

● **688.** 1° Soit M un point variable sur une parabole de sommet A. La perpendiculaire en A à AM coupe la directrice D en J et la perpendiculaire en J à D coupe AM en P. Evaluer le rapport de $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AM}$ et trouver le lieu de P.
2° Trouver l'enveloppe des directrices des paraboles Γ admettant un sommet donné A et passant par un point donné M.

● **689.** On considère les paraboles γ admettant une directrice donnée D et passant par un point donné A.
1° Lieu du foyer F de ces paraboles. Construire celles qui passent par un point donné M. Discuter et montrer que M doit se trouver à l'intérieur d'une courbe Γ.
2° La demi-droite AF coupe Γ en P. Démontrer que la parabole γ de foyer F est tangente en P à Γ et en déduire l'enveloppe des paraboles γ.

● **690.** On donne un point fixe F et un point variable P sur une droite fixe D. On mène les bissectrices Px et Px' de l'angle (D, PF).
1° Lieu des projections H et H' du point F sur les droites Px et Px'? Trouver l'enveloppe Γ des droites Px et Px' et de la droite joignant leurs points de contact M et M' avec cette enveloppe.
2° Déterminer le lieu du milieu de MM' et celui du point N commun aux normales en M et M' à Γ.
3° Lieu des projections Q et Q' du point F sur ces normales.

● **691.** Une corde variable issue d'un point fixe P coupe en A et B une parabole Γ de foyer F. Les points A, B et P se projettent en α, β et J sur la directrice Δ de Γ. On désigne par θ l'angle aigu de AB et de Δ.
1° Montrer que le cercle de diamètre $\alpha\beta$ engendre un faisceau d'axe radical JP et démontrer que le produit $\overline{PA}.\overline{PB}\cos^2\theta$ est constant. En déduire que :
2° *Pour que quatre points* A, B, C, D *d'une parabole appartiennent à un même cercle il faut et il suffit que les cordes* AB *et* CD *soient également inclinées sur l'axe* ou que le centre de gravité du quadrangle ABCD appartienne à cet axe.

● **692.** Utiliser la propriété précédente pour déterminer :
1° Le quatrième point d'intersection D d'une parabole et d'un cercle passant par trois points A, B, C de cette parabole.
2° Les points d'intersection C et D d'une parabole et d'un cercle passant par deux points A et B de cette parabole (on recherchera le milieu de CD).

● **693.** 1° On mène d'un point extérieur P la tangente PM et la sécante PAB à une parabole. La parallèle à l'axe issue de M coupe AB en I. Démontrer par projection sur la directrice que : $\overline{PI}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$ et $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{IA^2}{IB^2}$

2° Construire une parabole passant par trois points A, B, C connaissant la direction de l'axe ou la tangente en l'un de ces points.

3° Construire une parabole passant par les quatre sommets d'un quadrilatère convexe ABCD.

● **694.** On mène d'un point fixe P les tangentes PM et PM' à une parabole variable Γ dont le foyer F et l'axe Fx sont fixes. Soit Q le symétrique de P par rapport à F.

1° Comparer les triangles FMP et FPM' et montrer que le quadrangle PMQM' est harmonique. Lieu du centre ω du cercle PMM'.

2° Lieu du milieu I de MM' et lieu de la projection K du point Q sur la droite MM'?

3° Déterminer l'enveloppe de la droite MM' et limiter cette enveloppe. Etudier de même l'enveloppe de la droite ωI.

● **695.** Soient OX et OY la parallèle à l'axe et la tangente en un point O d'une parabole Γ. On désigne par M et M' les points de contact des tangentes issues d'un point P de OX, par N et N' les intersections de ces tangentes et de OY et par I l'intersection de MM' et de OX.

1° Comparer les triangles OPN et ONF et montrer que le quadrangle FNPN' est harmonique.

2° Soit G le point où OX recoupe le cercle FPN. Démontrer que $\overline{IM}^2 = 4\,\overline{OG}.\overline{OI}$. En déduire que, rapportée aux axes obliques OX et OY, l'équation de la parabole est de la forme $Y^2 = 2pX$.

3° Etablir la réciproque.

● **696.** Soit A le point commun aux tangentes en B et C à une parabole Γ de foyer F et de directrice Δ. On désigne par O le centre du cercle ABC, par A' le symétrique de A par rapport à F et par β et γ les projections de B et C sur Δ.

1° Montrer que les cercles FAB et FAC sont respectivement tangents à AC et à AB et déterminer la nature du quadrangle AA'BC.

2° La droite BC et la tangente en A au cercle O se coupent en un point ω centre de la similitude inverse qui transforme $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{AC}$. Chercher les homologues de β et de F et montrer que Δ passe par ω.

3° Démontrer que les tangentes à la parabole Γ issues de ω sont les bissectrices de l'angle (ωA, ωB) et que leurs points de contact sont situés sur AF.

● **697.** On désigne par D et E les milieux des côtés AB et AC du triangle ABC et par P un point variable de la droite BC. Les droites PE et PD coupent respectivement les droites AB et AC en M et N.

1° Etudier la correspondance entre M et N et montrer que l'enveloppe de la droite MN est la parabole Γ tangente en B et C à AB et AC. Construire son foyer F et sa directrice Δ. Démontrer que : $\overline{FA}^2 = \overline{FB}.\overline{FC}$ et $\dfrac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

2° Trouver les lieux géométriques de l'orthocentre H du triangle AMN, de la projection K du point F sur MN, du centre O du cercle AMN et du milieu Q de MN.

3° Montrer que les lieux des pieds I et J des bissectrices issues de F du triangle FMN sont deux droites perpendiculaires au point ω commun à Δ et à BC.

● **698.** Soit A le point de rencontre des tangentes en B et C à une parabole Γ. On se propose de comparer les aires de portions de plan limitées à l'intérieur du triangle ABC par l'arc BC de la parabole.

1° On mène la tangente parallèle à BC qui touche l'arc BC en M et qui coupe AB en D et AC en E. Montrer que l'aire du triangle MBC est le double de celle du triangle ADE ainsi que de la somme des aires des triangles MBD et MCE.

2° On opère sur les triangles MBD et MCE comme on vient de le faire sur le triangle ABC, et on répète indéfiniment cette opération. Montrer que l'aire S du segment BMC est les deux tiers de celle du triangle ABC.

3° Exprimer S en fonction de BC $= b$ et de la distance h de M à la droite BC.

● **699.** 1° On *donne* deux points fixes A et F dont la distance est désignée par $2d$. Deux droites D_1 et D_2 rectangulaires se coupent en A.

a) On suppose D_1 et D_2 fixes; montrer qu'il existe une parabole (P) admettant F pour foyer et D_1 et D_2 pour tangentes; construire la directrice de cette parabole.

b) A et F restant fixes, D_1 et D_2 tournent autour de A en restant rectangulaires; la parabole (P) se déforme : montrer que sa directrice passe en un point fixe et trouver le lieu de son sommet.

c) A et F restant *seuls* donnés, construire les paraboles (P) passant par un point donné M. Dans quelle région du plan doit se trouver M pour que le problème soit possible?

2° On remplace les droites D_1 et D_2 par deux droites Δ_1, Δ_2 tournant autour de A et faisant entre elles un angle constant α, et on étudie la parabole variable (Π) ayant F pour foyer et Δ_1 et Δ_2 pour tangentes. A et F restant fixes :

a) montrer que la directrice de (Π) reste tangente à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon en fonction de *d* et de α;

b) construire les paraboles (Π) passant par un point donné M. Étudier le nombre de solutions suivant la position de M dans le plan. *(Toulouse.)*

● **700.** Dans un plan fixe Q, on donne une parabole P, de foyer F, de directrice D dont on désigne le paramètre par *p*.

La droite Δ, parallèle à la directrice D et issue de F, coupe la parabole P aux points A et B. Un cercle variable C, ayant pour centre un point O de la parabole P, est tangent à Δ en un point H.

1° Démontrer que le cercle C reste tangent au cercle E de diamètre AB.

2° Le cercle α, de diamètre HA, et le cercle β, de diamètre HB, recoupent le cercle C aux points M et N, respectivement. Démontrer que la droite HM passe par un point fixe I et que la droite HN passe par un autre point fixe J (on pourra utiliser l'inversion de centre H, de puissance $\overline{HA}.\overline{HB}$). Déterminer le lieu Γ des points M et N quand C varie. *(Saint-Louis.)*

● **701.** Soient Ox, Oy deux droites perpendiculaires et (Δ) une droite fixe qui les rencontre.

1° I étant un point de (Δ), construire la droite (D), passant par I, coupant Ox en M, Oy en N, I étant le milieu de MN.

2° I décrivant la droite (Δ), montrer que le cercle circonscrit au triangle OMN passe par un deuxième point fixe F autre que O. Montrer que la droite (D) enveloppe une parabole (P) de foyer F dont on construira la tangente au sommet et la directrice. On précisera la position de Ox et Oy par rapport à (P).

3° O et (Δ) sont fixes. Les deux droites, perpendiculaires entre elles, Ox et Oy, tournent autour de O. A chaque position de Ox correspond une parabole (P). Montrer que toutes les paraboles (P) ont même foyer et que leurs directrices passent par un point fixe. Construire les paraboles (P) passant par un point M donné. Discuter. *(Lille.)*

● **702.** On considère dans un plan un angle droit xOy et un point F intérieur à cet angle. On désigne par (P) la parabole de foyer F et de directrice Ox et par (Q) la parabole de foyer F et directrice Oy.

1° Montrer qu'il existe une droite (T), tangente commune aux deux paraboles (P) et (Q). Déterminer les points de contact A et B de la droite (T) avec la parabole (P) d'une part, avec la parabole (Q) d'autre part. Trouver le lieu des points A et B lorsque, Ox et Oy restant fixes, le point F varie à l'intérieur de l'angle. Calculer la longueur AB en fonction de la distance OF $= r$ et de l'angle V que fait la droite OF avec la bissectrice de l'angle xOy.

2° Montrer qu'il existe deux points C et D qui sont communs aux deux paraboles Les construire géométriquement. Calculer la longueur CD en fonction de r et de V. Trouver le lieu des points F du plan pour lesquels cette longueur a une valeur donnée *h*. *(Poitiers.)*

● **703.** 1° Étant données une parabole (P) et une sécante (D) de cette parabole, on sait que la détermination des points M', M'' où cette sécante coupe la parabole se ramène à la construction des cercles passant par deux points et tangents à une droite. Déduire de cette construction le lieu géométrique décrit par le milieu K de M'M'' lorsque la droite (D) se déplace parallèlement à elle-même, la parabole (P) restant fixe.

2° Soient $T\alpha$, $T\beta$ les tangentes menées par un point T à la parabole (P); soient A et B leurs points de contact respectifs et F le foyer de la parabole. Montrer que les triangles AFT, TFB sont semblables. En déduire le lieu décrit par le point F lorsque (P) varie de manière que les droites $T\alpha$, $T\beta$ restent fixes, le point A étant fixe sur $T\alpha$ et le point B décrivant la droite $T\beta$.

3° Construire le foyer d'une parabole dont on donne trois tangentes ainsi que le point de contact de l'une d'elles.

Construire le foyer et la directrice d'une parabole dont on donne deux tangentes TA, TB et leurs points de contact respectifs A et B.

Calculer le paramètre p de cette parabole en fonction des longueurs TA $= a$. et TB $= b$ dans le cas particulier où l'angle ATB est droit. *(Guyane.)*

● **704.** Dans un plan fixe, on fait correspondre à tout point M le point M′ tel que le triangle OMM′ soit directement semblable au triangle donné OAA′. On suppose connus les angles AOA′ $= \alpha$ et OAA′ $= \beta$.

1° Construire M et M′, connaissant le milieu de MM′.

2° Construire M et M′, sachant qu'ils sont respectivement sur deux droites données (D) et (D′). Discuter.

3° Montrer que le lieu de M, quand le cercle OMM′ reste tangent à une droite (δ), est une parabole; connaissant la distance d du point O à la droite (δ), calculer le paramètre de la parabole et l'angle que fait son axe avec (δ).

4° Montrer que lorsque M décrit une droite donnée (δ), la droite MM′ enveloppe une parabole Π; connaissant la distance d du point O à la droite (δ), calculer le paramètre de la parabole et l'angle que fait son axe avec (δ).

Montrer que lorsque la droite (δ) tourne autour d'un point fixe, la parabole Π reste tangente à une droite fixe.

5° Quand M décrit un cercle Γ, M′ décrit un cercle Γ'. Calculer l'angle que font entre elles les tangentes menées de O à Γ quand Γ et Γ' sont tangents extérieurement. *(Bordeaux.)*

● **705.** 1° M et M′ étant les points de contact des tangentes à une parabole (Π), de foyer F, issues d'un point P, les triangles FPM et FM′P sont-ils semblables? Établir que FM.FM′ $= \overline{FP}^2$.
En déduire que le cercle circonscrit au triangle PMM′ passe par le symétrique U de P par rapport à F. (On pourra utiliser le symétrique de M′ par rapport à la médiatrice de PU.)

2° Le point P étant fixe, la parabole (Π) varie de manière que son foyer F et son axe (Δ) restent fixes.

a) La tangente et la normale en M à (Π) coupent (Δ) respectivement en T, N. Montrer que TF = FN. En déduire que la perpendiculaire en N à MN passe par un point fixe qu'on précisera.

b) Enveloppe des normales en M et M′ à (Π)? Éléments de cette enveloppe.

c) Soit L l'intersection des normales en M et M′. Montrer que le cercle MLM′ passe par deux points fixes. Lieu de L?

d) Enveloppe de MM′? *(Grenoble.)*

● **706.** On considère un triangle ABC, inscrit dans un cercle Γ, et le point D diamétralement opposé à A sur Γ. Soit (P) la parabole de foyer D, et dont la tangente au sommet est BC.

1° Montrer que les trois côtés du triangle ABC sont tangents à (P).

2° Construire leurs points de contact L, M, N avec (P), situés respectivement sur BC, AC, AB.

3° Montrer que les cercles BDN et CDM sont tangents à BC. Ils se coupent en D et en un autre point E. Quel est le lieu de E lorsque A et D décrivent le cercle Γ, supposé fixe ainsi que BC?

4° ND coupe Γ en un deuxième point Q; montrer que la droite CQ est parallèle à AB.

5° Démontrer que les perpendiculaires au côté BC menées par les sommets du triangle ABC passent chacune par le milieu d'un côté du triangle LMN. *(Dijon.)*

● **707.** On donne un segment de droite AB; M pris entre A et B décrit ce segment; d'un même côté de AB on construit les carrés de côtés AM, MB, soient AMCD, MBEF, de centres I et J.

1° Quels sont les segments de droite décrits par I et J? Montrer que les trois droites AE, BD, IJ se coupent en un point P de MC et que $\overline{PM}^2 = \overline{PC}.\overline{PF}$.

2° En prenant pour axe la médiatrice de AB (qu'on appelera Oy) et AB comme axe des x, posant AB $= 2a$, on déterminera le lieu du point P, arc de parabole dont on précisera les éléments.

3° Soient ω le point de rencontre des lieux de I et J, O le milieu de AB. Montrer que ω, I, J, M, O sont sur un même cercle. Montrer que J se déduit de I par une rotation d'un droit autour de O. En déduire que l'enveloppe de IJ est la parabole trouvée au 2°.

4° Peut-on généraliser l'énoncé pour que tous les lieux décrits le soient en entier? *(Lille.)*

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

FOYERS ET DIRECTRICES

• **545. Relations entre les trois coniques.** — L'ellipse, l'hyperbole et la parabole que nous venons d'étudier séparément sont désignées sous le nom général de *coniques*. Il résulte des théorèmes n°s 427, 472 et 523 que :

***Une conique est le lieu des centres des cercles passant par un point fixe* F *et tangents à un cercle fixe* F' *ou à une droite fixe* D.**

L'ellipse et l'hyperbole, appelées *coniques à centre*, correspondent au cas d'un point F intérieur ou extérieur au cercle F'(2*a*). Si, dans une telle conique (fig. 467), le foyer F et le sommet le plus voisin A restant fixes, le point F' s'éloigne indéfiniment sur l'axe focal AF, le cercle directeur (F') vient se confondre avec la droite D, perpendiculaire en K à AF. La parabole apparaît ainsi comme le cas limite d'une conique à centre dont l'excentricité tend vers 1. Les propriétés angulaires des tangentes à la parabole se déduisent des propriétés des tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole en supposant le foyer F' situé à l'infini dans la direction AF. Par définition, nous dirons que la parabole est une conique dont l'excentricité est égale à 1. D'où la classification des coniques :

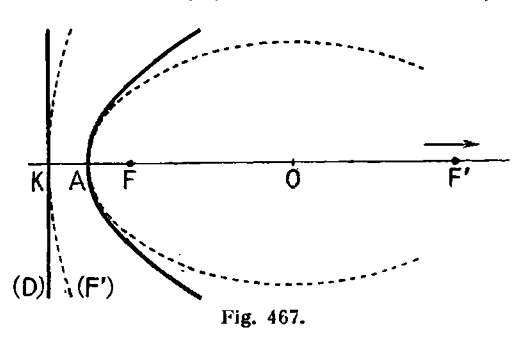


Fig. 467.

$0 \leqslant e < 1$: *Ellipse*	$e = 1$: *Parabole*	$e > 1$: *Hyperbole*

Nous allons montrer que l'on peut définir toute conique d'excentricité non nulle d'une manière analogue à la parabole.

• **546. Théorème fondamental.** — ***Toute conique, autre qu'un cercle, est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe* F *et à une droite fixe* D *est un nombre constant égal à l'excentricité de la conique.***

Dans le cas de la parabole, ce théorème se confond avec la définition (n° 507).
Plaçons-nous (fig. 468) dans le cas d'une conique lieu des centres des cercles passant par le foyer F et tangents au cercle directeur F' (2a). Pour qu'un cercle de centre M et de rayon MF et le cercle directeur F' (2a) soient tangents, il faut et il suffit que la distance de leurs centres MF' soit égale à la somme ou à la différence de leurs rayons MF et 2a, donc que l'on ait :

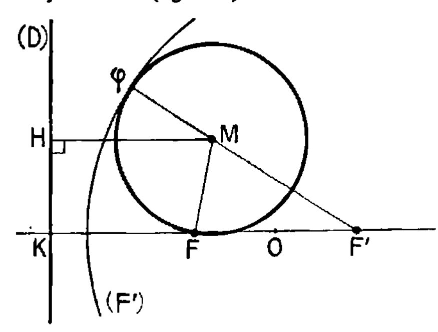


Fig. 468.

$$MF' = |MF \pm 2a|$$

ou :

$$MF'^2 = (MF \pm 2a)^2.$$

Cette condition s'écrit : $MF'^2 = MF^2 + 4a^2 \pm 4a \,.\, MF.$

c'est-à-dire : $$|(MF'^2 - 4a^2) - MF^2| = 4a.MF \qquad (1)$$

Or $(\overline{MF}'^2 - 4a^2)$ est la puissance du point M par rapport au cercle F' (2a) et $\overline{MF}^2$ sa puissance par rapport au cercle-point F. En désignant par H la projection du point M sur l'axe radical D du cercle F'(2a) et du cercle-point F, on a (n° 291) :

$$|(MF'^2 - 4a^2) - MF^2| = 2\,FF'.MH = 4c.MH \qquad (2)$$

Compte tenu de cette relation, vérifiée quel que soit M, la condition nécessaire et suffisante (1) s'écrit : $4c.MH = 4a.MF$.

c'est dire : $$\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{MF}{MH} = e.}$$

La démonstration n'est plus valable si F et F' sont confondus car la droite D est alors rejetée à l'infini et $e = 0$.

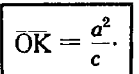
• **547. Directrices d'une conique à centre.** — La droite D ainsi définie est appelée *directrice relative au foyer* F.

La directrice **D** ***associée au foyer*** **F** ***d'une conique à centre est l'axe radical du cercle-point*** **F** ***et du cercle directeur*** **(F').**

Il existe de même (fig. 469 et 470) une directrice D' associée au foyer F', axe radical du cercle-point F' et du cercle directeur F. Les deux directrices sont symétriques par rapport au centre O de la conique. D'autre part la directrice D est, dans l'homothétie (F, 2), l'homologue de l'axe radical du cercle principal O et du cercle point F, donc (n° 340, 1°) :

La directrice associée au foyer **F** ***est la polaire du point*** **F** ***par rapport au cercle principal de la conique.***

L'axe focal $x'x$ étant orienté dans le sens OF, le pied K de la directrice est défini par la relation : $\overline{OF}.\overline{OK} = a^2$ soit :



$$\overline{OK} = \frac{a^2}{c}.$$

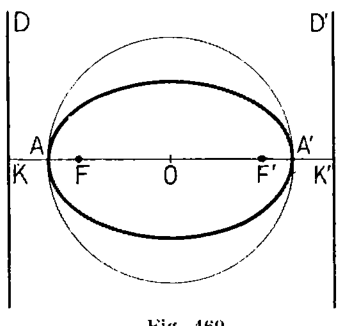


Fig. 469.

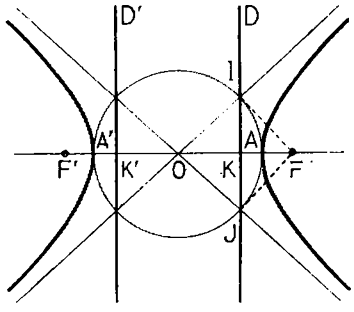


Fig. 470.

Dans le cas d'une hyperbole (fig. 470), on a $c > a$ et par suite OK $< a$. La directrice coupe le cercle principal aux deux points de contact I et J des tangentes issues de F, c'est-à-dire sur les asymptotes (n° 477). Il en résulte que :

Les projections d'un foyer sur les asymptotes d'une hyperbole sont situées sur la directrice associée à ce foyer.

• **548. Théorème.** — ***Une conique à centre est définie par un foyer* F, *la directrice* D *associée à ce foyer et son excentricité* e.**

D'après le théorème n° 546, les sommets A et A' de l'axe focal sont les points de la droite AK tels que : $\frac{AF}{AK} = -\frac{A'F}{A'K} = -e$. Le cercle principal étant le cercle de diamètre AA', la conique est donc déterminée par son foyer F et son cercle principal. Il en résulte de plus que (n° 272) :

***Le cercle principal d'une conique est le lieu des points du plan dont le rapport des distances à un foyer* F *et à sa projection* K *sur la directrice associée* D *est égal à l'excentricité* e.**

Son centre O est donc (n° 262) le point qui divise le vecteur $\overrightarrow{FK}$ dans le rapport e^2. Ce cercle partage le plan en deux régions. Celle qui contient le point F correspond aux points P du plan tels que PF $< e$ PK, l'autre qui contient le point K correspond aux points P tels que PF $> e$ PK (n° 272).

Notons que si G désigne, le symétrique de F par rapport à D, l'homothétie (F, 2) montre que le cercle directeur F' est le lieu des points du plan dont le rapport des distances à F et à G est égal à e.

• **549. Corollaire.** — ***Le lieu géométrique des points du plan dont le rapport des distances à un point fixe* F *et à une droite fixe* D *est un nombre donné* k *est la conique de foyer* F, *de directrice associée* D *et d'excentricité* k.**

Si $k = 1$ on a affaire à la parabole de foyer F et de directrice D.

Si $k \neq 1$, le théorème fondamental (nº 546) montre que la conique de foyer F, de directrice associée D et d'excentricité k est précisément le lieu demandé.

● **550. Remarque.** — Le théorème fondamental (nº 546) et le corollaire précédent montrent que, le cas du cercle mis à part, il y a identité entre les coniques et les courbes lieux des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant.

Il en résulte la possibilité d'effectuer l'étude des coniques en utilisant cette façon de les définir. Nous nous contenterons d'exposer les propriétés nouvelles, liées à la notion de directrice, en signalant toutefois les propriétés déjà étudiées qui en découlent simplement.

● **551. Construction par points d'une conique à centre.** — Soit à construire les points d'une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e situés sur une droite Hλ perpendiculaire en H à D. Le problème a été étudié dans le cas de la parabole (nº 528). Supposons donc $e \neq 1$ (fig. 471 et 472). Déterminons d'abord les sommets A et A′ situés sur l'axe focal. Les tangentes en A et A′ à la conique coupent la droite FH en deux points α et α' tels que $\dfrac{\alpha F}{\alpha H} = \dfrac{\alpha' F}{\alpha' H} = \dfrac{AF}{AK} = e.$

La relation $\dfrac{MF}{MH} = e$ montre que tout point M de la conique, situé sur Hλ appartient au cercle ω, lieu des points dont le rapport des distances à F et à H est égal à e. Ce cercle admet pour diamètre $\alpha\alpha'$ et son centre ω est situé sur la médiatrice de AA′ c'est-à-dire sur l'axe non focal $y'y$.

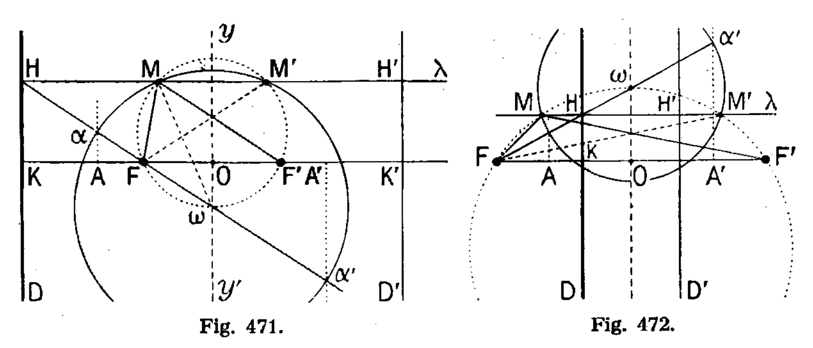


Fig. 471. Fig. 472.

Les intersections M et M′ de Hλ et du cercle ω sont, lorsqu'elles existent, les points demandés. Ils sont symétriques par rapport à $y'y$.

● **552. Remarques.** — 1º Introduisons le second foyer F′ et la directrice D′ respectivement symétriques de F et D par rapport à $y'y$. On a : $MF = e\,MH$ et $MF' = e\,MH'$.

D'autre part $HH' = KK' = 2\,OK = \dfrac{2a^2}{c}$ soit $e\,HH' = \dfrac{2a}{c} \times \dfrac{c}{a} = 2a.$

a) Si $e < 1$, les points H et H′ sont de part et d'autre de M (fig. 471), donc :

$$MF + MF' = e\,(MH + MH') = e\,HH' \quad \text{soit :} \quad MF + MF' = 2a.$$

b) Si $e > 1$, les points H et H' sont d'un même côté de M (fig. 472), donc :

$$MF' - MF = e \, |MH' - MH| = e\,HH' \quad \text{soit :} \quad |MF' - MF| = 2a.$$

On retrouve les relations de définition de l'ellipse et de l'hyperbole (nos 420 et 465).

2° La division $(\alpha\alpha'FH)$ est harmonique et ω est le milieu de $\alpha\alpha'$. Donc (n° 261) $\overline{HF}.\overline{H\omega} = \overline{H\alpha}.\overline{H\alpha'} = \overline{HM}.\overline{HM'}$. Les points F, ω, M et M' appartiennent à un même cercle, centré sur $y'y$, et passant par suite par F'. Le point ω étant le milieu de l'arc $F\omega F'$ la droite $M\omega$ est donc une bissectrice de l'angle FMF', intérieure si $e < 1$, extérieure si $e > 1$. La droite $M\omega$ est par suite la normale en M à la conique. Cette propriété qui permet de construire la tangente en M à la conique montre que *le cercle* ω *est bitangent en* M *et* M' *à la conique.*

• 553. Intérieur et extérieur d'une conique. — 1° Lorsque $e = 1$, on sait (n° 522) qu'un point M est intérieur ou extérieur à la parabole suivant que l'on a $\frac{MF}{MH} < 1$ ou $\frac{MF}{MH} > 1$.

2° Lorsque $e < 1$, la conique est une ellipse (fig. 471) et tout point M_1 du segment MM' est intérieur à l'ellipse et, ainsi que F, intérieur au cercle ω. On a donc (n° 548): $\frac{M_1F}{M_1H} < e$. Tout point M_2 extérieur au segment MM' ou tout point M_2 de la droite $H\lambda$ si elle ne coupe pas le cercle ω est extérieur à l'ellipse et au cercle ω, donc: $\frac{M_2F}{M_2H} > e$.

3° Lorsque $e > 1$, la conique est une hyperbole (fig. 472) et les deux points M et M' existent toujours car H est intérieur au cercle ω. Tout point M_1 des prolongements du segment MM' est intérieur à l'hyperbole et extérieur au cercle ω. Comme F est extérieur au cercle ω on a : $\frac{M_1F}{M_1H} < e$. Tout point du segment MM' est extérieur à l'hyperbole et intérieur au cercle ω. On a donc : $\frac{M_2F}{M_2H} > e$. On en déduit que :

Un point est intérieur ou extérieur à une conique donnée suivant que le rapport de ses distances au foyer F *et à la directrice associée* D *est inférieur ou supérieur à l'excentricité de cette conique.*

Tout point de la directrice est par suite extérieur à la conique. Autrement dit une directrice est extérieure à la conique.

• 554. Intersection d'une conique et d'une droite. — 1° Supposons (fig. 473) la droite donnée Δ parallèle à la directrice D et perpendiculaire en P à l'axe focal $x'x$. Tout point M de la droite Δ est situé à la distance MH = PK de D. Pour qu'il soit sur la conique il faut et il suffit que $MF = e.PK$. En coupant Δ par le cercle de centre F et de rayon $e.PK$, on obtient les points M et M' cherchés.

Ces points existent si FP est inférieur au rayon $e.PK$ donc si $\frac{PF}{PK} < e$, c'est-à-dire si le point P est intérieur à la conique (n° 553).

2° Supposons (fig. 474) que la droite donnée Δ coupe en I la directrice D

et soit α l'angle aigu de Δ et D. Pour tout point M de Δ on a $MH = MI \sin \alpha$. Pour que ce point appartienne à la conique, il faut et il suffit que :

$$MF = e\,MH = e\,MI \sin \alpha \quad \text{donc que :} \quad \frac{MF}{MI} = e \sin \alpha.$$

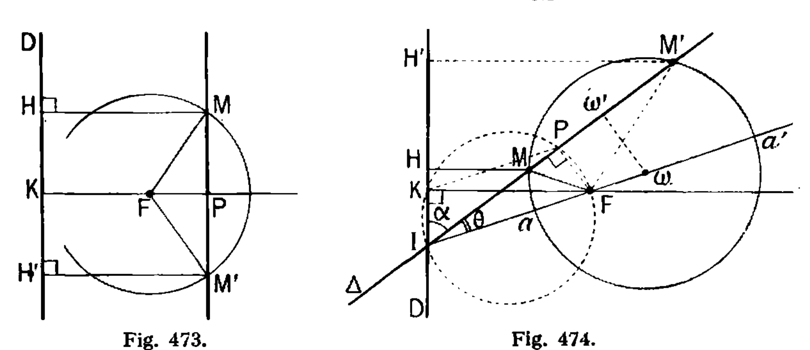


Fig. 473. Fig. 474.

Les points M et M' cherchés sont donc les intersections de Δ avec le cercle ω de diamètre aa', lieu des points dont le rapport des distances à F et à I est égal à $e \sin \alpha$. Toutefois si $e \sin \alpha = 1$, l'un de ces points est rejeté à l'infini, ce qui a lieu lorsque Δ est parallèle à une asymptote.

Discussion. — Soit θ l'angle aigu de la droite Δ avec la droite IF. La distance $\omega\omega'$ de Δ au point ω est égale à $\omega I \sin \theta$ et le rayon du cercle ω est égal à ωa. Pour que la droite Δ coupe la conique il faut et il suffit que : $\omega I \sin \theta \leqslant \omega a$ ou $\sin \theta \leqslant \frac{\omega a}{\omega I}$.

La division $(IFaa')$ étant harmonique et ω le milieu de aa', on a (n° 262) :

$$\frac{\omega a}{\omega I} = \frac{\omega F}{\omega a} = \frac{aF}{aI} = e \sin \alpha.$$ On obtient donc la condition : $\boxed{\sin \theta \leq e \sin \alpha.}$

Les projections K et P du point F sur D et sur Δ sont situées sur le cercle de diamètre IF et l'on a : $PF = IF \sin \theta$ et $PK = IF \sin \alpha$. La condition précédente qui s'écrit :

$$IF \sin \theta \leqslant e\,IF \sin \alpha \quad \text{devient donc :} \quad PF \leqslant e\,PK \quad \text{soit} \quad \frac{PF}{PK} \leq e.$$

Le lieu des points P tels que $\frac{PF}{PK} = e$ est le cercle principal (ou la tangente au sommet quand $e = 1$) de la conique. La condition $\frac{PF}{PK} < e$ exprime que P et F doivent se trouver dans la même région du plan limitée par le cercle principal (n° 548).

• **555. Sécantes focales.** — Soit Δ une droite issue du foyer F et coupant la directrice D en I (fig. 475). Désignons par α l'angle aigu de D et Δ. Comme ici $\theta = 0$, la condition $\sin \theta < e \sin \alpha$ est vérifiée et la droite Δ coupe en général la conique en deux points M et M' qui se projettent en H et H' sur D. D'autre part $MF = e\,MH = e\,MI \sin \alpha$ et $M'F = e\,M'I \sin \alpha$. On a donc :

$$\frac{MF}{MI} = \frac{M'F}{M'I} = e \sin \alpha.$$ La division (IFMM') est harmonique.

Un foyer et la directrice associée divisent harmoniquement toute sécante focale à une conique.

On peut donc dire que I et F sont conjugués par rapport à la conique et que la directrice est la polaire du foyer par rapport à la conique.

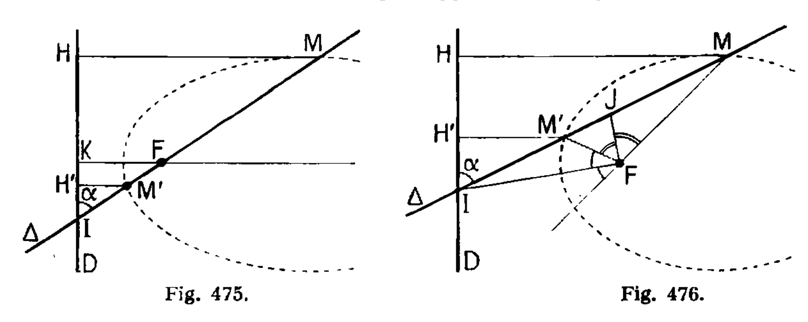


Fig. 475. Fig. 476.

Si la droite Δ issue de F est parallèle à une asymptote le point M′ est rejeté à l'infini et le point M est alors le milieu du segment IF.

• **556. Sécantes quelconques.** — Soit Δ une sécante ne passant pas par F, coupant la conique en M et M′, la directrice D en I et faisant un angle aigu α avec cette directrice (fig. 476). En désignant par H et H′ les projections de M et M′ sur D on a, comme au paragraphe précédent :

$$\frac{MF}{MI} = \frac{M'F}{M'I} = e \sin \alpha \quad \text{soit :} \quad \frac{IM}{IM'} = \frac{FM}{FM'}.$$

Dans le triangle FMM′ le point I divise le côté MM′ en deux segments IM et IM′ proportionnels aux côtés adjacents FM et F′M′. Donc :

***Lorsqu'une sécante* MM′ *à une conique coupe en* I *la directrice associée au foyer* F, *la droite* FI *est bissectrice de l'angle* MFM′.**

La droite FI est bissectrice extérieure ou intérieure de l'angle MFM′ suivant que les points M et M′ appartiennent à une même branche ou à deux branches distinctes de la conique.

• **557. Tangente à la conique.** — Supposons (fig. 476) que les points M et M appartiennent à une même branche de la conique. Lorsque le point M′, se déplaçant sur la courbe, tend vers M, la bissectrice intérieure FJ de l'angle MFM′ tend vers FM. La droite MM′ devient la tangente en M à la courbe et la droite FI devient la perpendiculaire en F au rayon vecteur FM (fig. 477) :

La portion d'une tangente à une conique comprise entre son point de contact et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit.

Pour construire la tangente en M à la conique de foyer F et de directrice D, il suffit donc de joindre le point M au point I intersection de la directrice D et de la perpendiculaire en F à FM. Il en résulte que :

• **558. Corollaires.** — 1° ***Les tangentes aux extrémités d'une corde focale* MM' *et la perpendiculaire en* F *à cette corde concourent en un point de la directrice.***

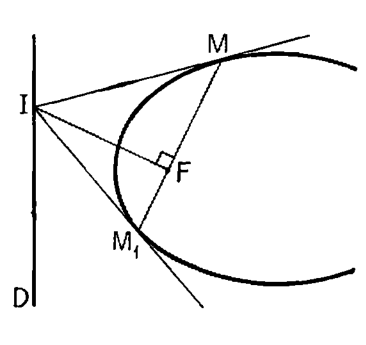


Fig. 477.

Le foyer F est donc (fig. 477) le pied de la hauteur relative au côté MM' du triangle IMM' formé par les tangentes à la conique issues d'un point quelconque I de la directrice.

2° Si le point M s'éloigne indéfiniment sur la conique, la position limite de la tangente IM est une asymptote (n° 482) et la position limite de FM est parallèle à cette asymptote. La droite FI devient donc la perpendiculaire en I à cette asymptote. On retrouve ainsi que (n° 547) :

Les projections d'un foyer sur les asymptotes d'une hyperbole sont situées sur la directrice relative à ce foyer.

CERCLES ASSOCIÉS A LA DIRECTRICE

• **559. Définition.** — Considérons (fig. 478) une droite (D) et un cercle (C), de rayon R dont le centre O est situé à distance OH $= d$ de la droite D. On dit que :

Le cercle* C *et la droite* D *sont associés dans le rapport $k = \frac{R}{d}$.

Deux cercles O et O' associés dans le même rapport à une droite D se déduisent l'un de l'autre par translation si OO' est parallèle à D, par homothétie de centre ω si la droite OO' coupe D en ω.

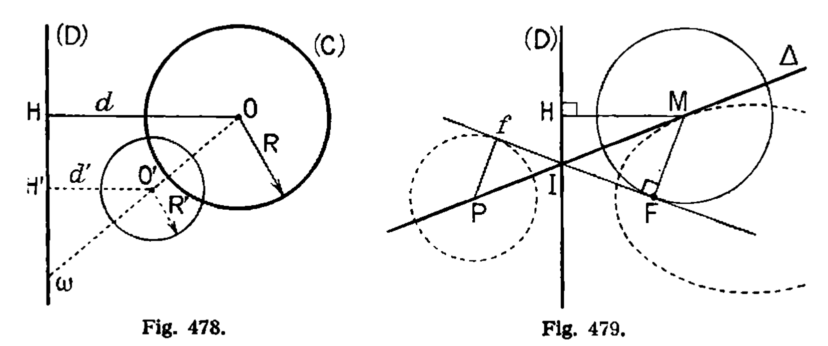


Fig. 478. Fig. 479.

• **560. Théorèmes.** — 1° ***Une conique d'excentricité* e *est le lieu des centres des cercles passant par un foyer* F *et associés dans le rapport* e *à la directrice* D *relative à* F.**

Pour qu'un cercle de centre M et de rayon MF (fig. 479) soit associé dans le

rapport e à la directrice D, il faut et il suffit que $\frac{MF}{MH} = e$, donc que M appartienne à la conique.

***2° Pour qu'une droite* Δ*, coupant la directrice* D *en* I*, soit tangente à la conique il faut et il suffit que la droite* IF *soit tangente à un cercle centré sur* Δ *et associé à* D *dans le rapport* e.**

Si le centre M de cercle appartient à la conique, c'est en effet une condition nécessaire et suffisante pour que l'angle IFM soit droit (n° 557). Si le centre est un point P quelconque de Δ, l'homothétie de centre I qui transforme P en M montre que la droite IF doit être tangente à ce cercle.

● **561. Construction par points et tangentes d'une conique.** — Soit à construire un point quelconque M de la conique définie par son foyer F, sa directrice associée D et son excentricité e. Construisons un cercle quelconque (m), associé à D dans le rapport e et soit h la projection de son centre m sur D (fig. 480)

Désignons par f un point quelconque du cercle (m) se projetant en k sur D et soit ω l'intersection de Ff et de D. L'homothétie de centre ω qui transforme f en F, transforme le trapèze rectangle $mfkh$ en une trapèze semblable MFKH. Donc : $\frac{MF}{MH} = \frac{mf}{mh} = e$.
Le point M est donc un point de la conique. En menant la perpendiculaire en F à FM qui coupe D en I on obtient la tangente IM au point M (n° 557).

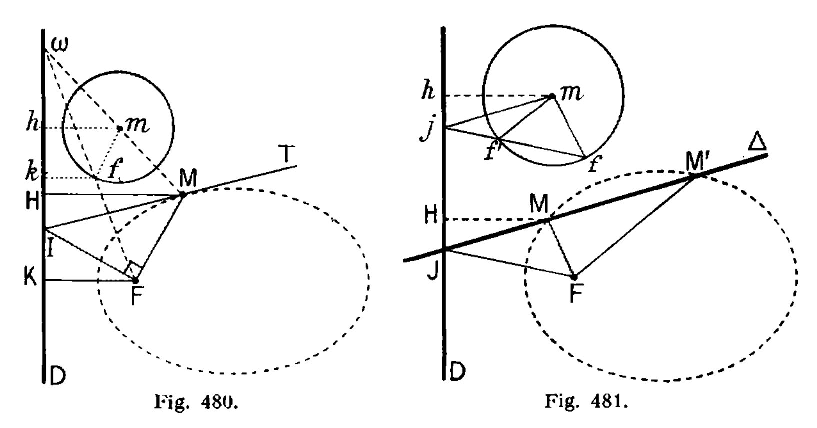


Fig. 480. Fig. 481.

Notons que le cercle principal de la conique est associé dans le rapport e à chaque directrice car $\frac{OA}{OK} = a : \frac{a^2}{c} = \frac{c}{a} = e$. On peut donc utiliser le cercle principal comme cercle (m).

● **562. Intersection de la conique et d'une droite.** — Soit à déterminer les points de la conique situés sur une droite donnée Δ qui coupe la directrice D en J (fig. 481). Dans l'homothétie ω du paragraphe précédent, l'homologue du point J est le point j où la parallèle à Δ menée par m coupe D. Construisons le point j et menons par ce point la parallèle à JF qui coupe le cercle (m) en f et f'. La construction précédente appliquée à f, puis à f' donne les points M et M' de la conique situés sur Δ. Pour les obtenir, il suffit de couper Δ par les parallèles à mf et à mf' issues de F.

● **563. Tangentes parallèles à une direction donnée.** — Soit I le point d'intersection de la directrice D et de la tangente en M à la conique. Dans l'homothétie ω (fig. 482) qui transforme M en *m*, l'homologue de I est le point *i* où la parallèle à MI issue de *m* coupe D. Le triangle *imf*, homothétique du triangle IMF est rectangle en *f* et *if* est tangente au cercle (*m*).

Pour obtenir les tangentes parallèles à une direction donnée δ, on construit la droite *mi* parallèle à δ, puis les tangentes *if* et *if'* au cercle (*m*). La construction du n° 561 appliquée à *f* puis à *f'*, donne les points de contact des tangentes parallèles à δ. Il suffit de mener FI parallèle à *fi* puis, IM et FM respectivement parallèles à *im* et *fm*.

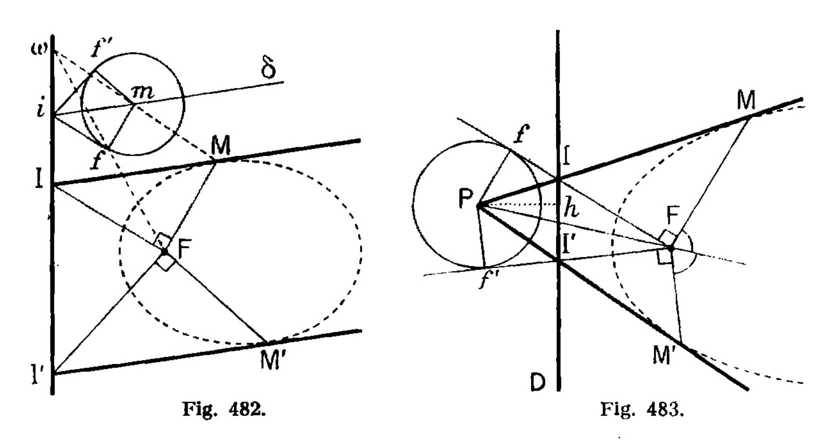


Fig. 482. Fig. 483.

● **564. Tangentes issues d'un point donné.** — Soit à construire les tangentes à la conique issues d'un point donné P (fig. 483).

Pour qu'une droite PM, coupant la directrice D en I, soit tangente à la conique il faut et il suffit (n° 560) que la droite IF soit tangente au cercle de centre P associé dans le rapport *e* à la directrice D. Construisons ce cercle et les tangentes F*f* et F*f'*, issues du foyer F. Ces tangentes coupent la directrice D en I et I'. Les tangentes cherchées sont les droites PI et PI'. Leurs points de contact respectifs M et M' sont leurs intersections avec les perpendiculaires en F à F*f* et F*f'*. Il suffit de mener FM et FM' respectivement parallèles à P*f* et P*f'*.

Notons que la droite FP est bissectrice de l'angle *f*P*f'*. Elle est donc également bissectrice de l'angle à côtés parallèles MFM'. On retrouve ainsi le premier théorème de Poncelet.

SUJETS D'EXAMEN

— Lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite fixes est constant. (*Montpellier*, ME.)

— Définition de l'ellipse : 1°) par ses deux foyers; 2°) par un foyer et la directrice correspondante. Équivalence de ces deux définitions. (*Bordeaux*, ME et MT.)

EXERCICES

Construire une conique connaissant :

● **708.** Un foyer, la directrice associée et un point de la courbe.

● **709.** Un foyer, la directrice associée et une tangente.

● **710.** Une directrice, deux points et l'excentricité.

● **711.** Une directrice, l'excentricité, une tangente et son point de contact.

● **712.** Un foyer, deux points et l'excentricité.

● **713.** Un foyer, l'excentricité, une tangente et son point de contact.

● **714.** 1° On connaît la directrice D, l'excentricité et une tangente d'une conique. Trouver le lieu du foyer F associé à D.
2° Construire une conique connaissant une directrice, l'excentricité et deux tangentes.

● **715.** 1° Trouver le lieu du foyer F d'une conique dont on connaît deux points A et B ainsi que la directrice D associée à F.
2° Préciser sur ce lieu les foyers des paraboles, des ellipses et des hyperboles.

● **716.** Construire une conique Γ connaissant une directrice D et de plus :
1° Trois points de la courbe.
2° Deux points et la tangente en l'un d'eux.
3° Un point et le centre de la courbe.

● **717.** 1° Construire une conique connaissant une directrice, l'excentricité, une tangente et un point de la courbe.
2° Construire une ellipse connaissant une directrice, un sommet du petit axe et un point de la courbe.

● **718.** 1° Une conique de foyer F donné passe par deux points A et B. Montrer que la directrice D associée à F passe par l'un ou l'autre de deux points fixes.
2° Construire une conique de foyer F connaissant trois points de la courbe ou deux points et la tangente en l'un d'eux.

● **719.** Le cercle qui a pour centre un point M d'une hyperbole et qui passe par le foyer F coupe la directrice D associée à F en deux points R et R'. Démontrer que les droites MR et MR' sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

● **720.** Trouver le lieu des foyers des hyperboles dont on donne :
1° Deux points et les directions asymptotiques.
2° Une directrice, une tangente et une direction asymptotique.

Construire une hyperbole connaissant :

● **721.** Un foyer, la directrice associée et une direction asymptotique.

● **722.** Une directrice, une asymptote et la longueur de l'axe.

● **723.** Une directrice, une asymptote et un point de la courbe.

● **724.** Un foyer, un point et les directions asymptotiques.

● **725.** Un foyer, deux points et une direction asymptotique.

● **726.** Construire une hyperbole de directrice D et admettant une direction asymptotique Δ connaissant en outre : 1° Deux points de la courbe.
2° Deux tangentes. 3° Un point et une tangente.

● **727.** Démontrer qu'une conique à centre Γ est déterminée par un foyer F, la directrice non associée D' et son excentricité. Construire Γ.

● **728.** 1° Trouver le lieu du centre M d'un cercle passant par un point fixe F et coupant une droite donnée D sous un angle donné α.
2° Enveloppe du cercle (M).

● **729.** On donne une droite fixe D et un point F. Un cercle variable de centre M passe par F et est vu, de la projection H de M sur D, sous l'angle donné 2α. Trouver le lieu du point M et l'enveloppe du cercle (M).

● **730.** Trouver le lieu du centre M d'un cercle variable tangent à une droite fixe D et :

1° Vu d'un point fixe F sous un angle donné 2α.

2° Coupant la perpendiculaire en F à MF sous l'angle α.

● **731.** On donne un point fixe A et deux points B et C qui varient sur une droite fixe D de telle sorte que (AB, AC) = α (angle constant).

1° Lieu géométrique du centre ω du cercle ABC.

2° Lieux des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC. Cas où l'angle α est droit.

● **732.** 1° Trouver le lieu des points P d'où l'on voit une parabole de foyer F et de directrice D sous un angle donné (PM, PM') = α.

2° Evaluer en fonction de α les angles (FP, FM) et $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})$.

● **733.** On considère un trapèze variable ABCD dont la base AB est fixe et tel que BC = CD = DA. Déterminer les lieux des sommets C et D.

● **734.** 1° Déterminer les points communs à deux coniques de même foyer F, de directrices respectives D et D' et d'excentricités e et e'.

2° Peut-on utiliser cette construction pour rechercher les centres des cercles passant par un point donné F et tangents à deux cercles (ou droites) donnés?

● **735.** Démontrer que les points communs à deux coniques de même directrice D, de foyers respectifs F et F' et d'excentricités e et e' sont situés sur un même cercle centré sur la droite FF'.

● **736.** On considère deux coniques Γ et Γ' de foyers F et F', d'excentricités e et e' et dont les directrices D et D' sont perpendiculaires en O.

1° Démontrer que les points M communs aux deux coniques vérifient la relation : $\frac{\overline{MF}^2}{e^2} + \frac{\overline{MF'}^2}{e'^2} - \overline{MO}^2 = 0$, et appartiennent en général à un même cercle C.

2° On désigne par J, l'intersection de OF et l'axe non focal de Γ, par J' l'intersection de OF, et de l'axe non focal de Γ'. Démontrer que le centre ω du cercle C précédent est l'intersection de FJ' et de F'J.

● **737.** 1° Les points d'intersection de deux paraboles de foyers F et F' et dont les directrices sont perpendiculaires en O appartiennent à un cercle dont le centre ω est le quatrième sommet du parallélogramme FOF'ω.

2° Lorsque les deux paraboles se coupent en quatre points A, B, C, D le point I commun à leurs axes est le centre de gravité du quadrangle ABCD. (Cf. exercice 691).

● **738.** 1° Une corde variable AB passe par le foyer F d'une conique Γ. Trouver le lieu du point I conjugué harmonique de F par rapport à A et B et le lieu du point P commun aux tangentes en A et B.

2° Deux cordes AB et CD de Γ passe par F. Démontrer que les points de rencontre M et N des côtés opposés du quadrilatère ACBD appartiennent à la directrice Δ associée à F.

● **739.** 1° D'un point fixe I de la directrice Δ d'une conique Γ on mène une sécante variable AB à cette conique. Trouver le lieu du point J conjugué harmonique de I par rapport à A et B et le lieu du point P commun aux tangentes en A et B à la conique.

2° Deux cordes AB et CD de la conique Γ se coupent en I sur la directrice. Démontrer que les points de rencontre M et N des côtés opposés du quadrilatère ACBD appartiennent à la perpendiculaire en F à FI.

● **740.** 1° Démontrer le second théorème de Poncelet pour une conique de foyers F et F' en établissant que le point P commun aux tangentes en M et M' est le centre d'un cercle inscrit dans le quadrilatère MFM'F' ou en montrant que le produit des symétries par rapport à PM, PF, PM' et PF' est la transformation identique.

2° Étendre ces démonstrations à la parabole ou en faire une démonstration directe.

● **741.** On considère un point fixe F, une droite fixe D et le point G symétrique de F par rapport à D. A tout point m du plan on associe le point M centre du cercle (M) orthogonal en F et m au cercle FGm de centre I. Soit H la projection de M sur D, et F' l'intersection de Mm et de FG.

1° Établir que les points m, H, G sont alignés et que les triangles MFH et mFG sont directement semblables. Comparer les rapports $\frac{MF}{MH}$, $\frac{mF}{mG}$ et $\frac{F'F}{F'G}$.

2° En déduire que si $\frac{MH}{MF} = k$, le lieu de M est une ellipse ou une hyperbole de foyer F et dont le cercle directeur F′ fait partie du faisceau de cercles de points limites F et G.

● **742.** On donne une conique Γ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e ainsi qu'un angle orienté aigu α. Une corde variable AB est vue du foyer F sous l'angle $(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}) = 2\alpha$ ou $2\alpha + \pi$ suivant que A et B appartiennent à une même branche de Γ ou non. Les tangentes en A et B se coupent en P, la droite AB coupe D en I et coupe FP en J. On désigne par H, K et L les projections de P, F et J sur D.

1° Démontrer que l'angle IFP est droit et en utilisant les cercles de centres P et J associés à D dans le rapport e, et établir les relations.

$$\frac{PF}{PH} = \frac{e}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{JF}{JL} = e \cos \alpha.$$

2° En déduire les lieux γ et γ' du point P et du point J et l'enveloppe de la droite AB.

3° Soit φ la projection de F sur AB. Établir la similitude des triangles FφK et FJL et retrouver ainsi le lieu de φ et l'enveloppe de AB.

● **743.** On considère les ellipses E qui ont une directrice donnée D, une excentricité donnée $e < 1$, et qui passent par un point donné M.

1° Quel est le lieu des foyers F, relatifs à D, des ellipses E?

2° Construire les ellipses E admettant pour tangente en M une droite donnée MT.

3° Construire les ellipses E passant par un second point donné N. Discuter la possibilité du problème selon la position de N.

4° La discussion du 3° fait apparaître une ellipse S. Si N est sur S, il existe une seule ellipse E passant par N. Montrer qu'elle est tangente à S en N.

(Espagne.)

● **744.** On considère toutes les ellipses E qui ont un foyer fixe F, qui sont tangentes à une droite fixe D et dont la longueur de l'axe non focal est donnée et égale à $2b$.

1° Calculer la puissance de F par rapport au cercle directeur de centre F′ et en déduire que les ellipses E sont tangentes à une deuxième droite fixe D′.

2° Trouver le lieu du centre de ces ellipses, ainsi que l'enveloppe de l'axe non focal.

3° Montrer que la directrice relative au foyer F passe par un point fixe et que la deuxième directrice enveloppe une parabole.

4° Prouver que toutes les ellipses E sont vues de deux points fixes sous un angle droit (ces points sont situés sur la perpendiculaire de F à D).

5° On considère toutes les coniques C qui ont un foyer fixe F et dont les directrices passent par un point fixe A.

Montrer que celles de ces coniques qui sont tangentes à une droite donnée D sont aussi tangentes à une deuxième droite que l'on déterminera. Réciproquement les coniques qui ont un foyer fixe F et qui sont tangentes à deux droites fixes ont leurs directrices correspondant à ce foyer passant par un point fixe.

(Bordeaux.)

● **745.** On donne une droite Δ et un point fixe A à la distance $AH = h$ de la droite Δ. Les côtés d'un angle α de sommet A coupent Δ en B et C. L'angle α pivote autour de A, *en restant constant.*

1° Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC décrit une portion de conique dont on précisera la nature. (On pourra chercher la relation qui existe entre α, OA et la distance OI de O à Δ). Distinguer deux cas selon que α est aigu ou obtus. Cas où $\alpha = \pi/2$.

2° Soient M et N les pieds des hauteurs du triangle ABC issues de B et C. Montrer que chacune des droites HM et HN reste fixe. En déduire que l'enveloppe des hauteurs BM et CN se compose de deux paraboles dont on définira le foyer et dont on calculera le paramètre en fonction de h et de α. Calculer les distances de A à chacun des points d'intersection P et Q de ces deux paraboles.

3° On transforme la figure par une inversion de centre A, de puissance $\overline{AH}^2 = h^2$. Construire les figures inverses de la droite Δ et du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que ce dernier cercle est tangent à un cercle fixe. Construire ce cercle. Ne pouvait-on prévoir ce résultat?

(Poitiers.)

● **746.** Soient, en axes rectangulaires Ox, Oy, une ellipse de foyers F et F′ ($x = \pm c$, $y = 0$), d'axes $2a$ et $2b$, et une droite D passant par l'origine et de coefficient angulaire m.

1° Une parallèle D′ à D coupe l'ellipse en M et M′. Lieu Δ du milieu de MM′ lorsque D′ se déplace parallèlement à D. Solutions algébrique et géométrique.

2° Soient I et J les points de rencontre de la directrice relative à F avec la droite D et avec la droite Δ. Démontrer que $\overline{KI}.\overline{KJ} = -\overline{KO}.\overline{KF}$ (K est l'intersection de la directrice et de l'axe focal).

3° Montrer que le cercle circonscrit au triangle OIJ passe par un point fixe lorsque D tourne autour de O. En déduire l'orthocentre du triangle OIJ.

4° La parallèle à OI menée par F coupe en R la droite Δ. On appelle P et P′ les points de rencontre de l'ellipse et de la droite Δ. Démontrer que $\overline{OP}^2 = \overline{OR}.OJ$.

(La Réunion.)

● **747.** On considère les coniques (C) ayant un foyer F fixe et dont la directrice correspondante passe par un point fixe P.

1° Parmi les coniques (C), construire les paraboles passant par un point donné M. Où doit se trouver M pour que le problème admette une, deux solutions? Montrer que, quel que soit M, ces paraboles sont tangentes à une droite fixe.

2° Parmi les coniques (C), construire les ellipses d'excentricité e donnée passant par un point donné M. Où doit se trouver M pour que le problème admette une, deux, zéro solutions?

3° Parmi les coniques (C), on considère les ellipses de petit axe égal à une longueur $2b$ donnée. Déterminer le lieu de leur centre, l'enveloppe de leur petit axe et des tangentes aux extrémités de leur petit axe.

4° Parmi les coniques (C), on considère les ellipses d'excentricité e donnée. Déterminer le lieu de leur centre et des sommets de leur petit axe, démontrer que leur petit axe et les tangentes aux extrémités de leur petit axe passent par un point fixe.

(Nancy.)

● **748.** Soient un segment AB, Δ sa médiatrice, ω le centre d'un cercle variable (ω) passant par A et B. Le cercle (ω) coupe Δ en D et D′ et les droites BD et BD′ coupent respectivement la tangente en A à (ω) en C et C′.

1° Montrer que AD et AD′ sont bissectrices de l'angle BAC. En déduire que le lieu de C et C′ est une hyperbole (H) de foyer A et de directrice Δ. Préciser les éléments de cette hyperbole. Déterminer en particulier le foyer F autre que A.

2° Soit P le pôle de la droite BC par rapport à (ω). Montrer que la droite CP coupe AB en Q symétrique en A par rapport à B. En déduire que la tangente autre que CA menée de C à (ω) coupe AB en F. Construire les tangentes à (H) en C et en C′; quel est leur point d'intersection?

3° Le point C étant du même côté que A par rapport à Δ, démontrer que les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ du triangle ABC vérifient la relation $a^2 = b(b + c)$. Montrer que l'on doit avoir $b < a < 2b$.

(Bordeaux.)

● **749.** Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$. Sur $x'Ox$, deux points fixes F et F′ ont respectivement pour abscisses $(+ c)$ et $(- c)$, c nombre positif donné.

Un cercle variable Γ passant par F et F′ coupe l'axe $y'Oy$ en deux points N et T (dont les rôles seront interchangeables au cours du problème).

1° Construire un point M du cercle Γ tel que $NF = e.NM$, e étant un nombre positif donné < 1.

La parallèle à $x'Ox$ passant par M coupe NF en un point K. Comparer les triangles NMF et NKM. Évaluer le rapport $\frac{NF}{NK}$. Lieu de K. En déduire le lieu de M, dont on précisera les divers éléments. Quelle est la tangente en M à ce lieu? $\left(\text{On posera } \frac{c}{e} = a\right)$.

2° La droite MT coupe à nouveau le lieu de K en un point I. Montrer que le quadrilatère MFIK est inscriptible dans un cercle C.

En supposant fixe le cercle Γ initial, on fait une inversion de centre T, de puissance TF^2. Préciser l'inverse du cercle Γ, le position du point M′ inverse de M, celle du transformé du cercle C, enfin celle de l'inverse I′ du point I.

Que devient dans cette inversion le cercle Ω circonscrit au triangle TFI? Que peut-on dire des positions respectives de Γ et Ω? De Ω et Oy? Lieu du centre de Ω quand le cercle Γ varie?

(Lille.)

● **750.** Soient Ox et Oy deux axes rectangulaires : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$.

On considère le point fixe A de l'axe Ox tel que $\overline{OA} = 3a$ ($a > 0$) et un point *variable* B de la *demi-droite* Oy tel que $\widehat{OAB} = \theta$. On désigne par (φ) le cercle lieu des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$ et par (H) l'hyperbole de *foyer* A qui admet (φ) pour cercle *principal*.

On obtient ainsi, lorsque B se déplace sur Oy, une famille de cercles (φ) et une famille d'hyperboles (H) associées à ces cercles.

1° Lieux géométriques des sommets et du centre ω de l'hyperbole (H). Lieu du second foyer. Calculer, en fonction de θ, le rayon du cercle (φ) et la distance ωA. Déterminer l'angle des asymptotes d'une hyperbole (H).

2° Enveloppes des directrices des hyperboles (H). On dessinera avec soin ces enveloppes.

3° Quel doit être θ pour que l'hyperbole (H_0) correspondante ait une asymptote parallèle à Ox? Déterminer l'abscisse de l'intersection I de la directrice associée au foyer A et de l'axe Ox. Montrer que Ox coupe (H_0) en un point E. Déterminer $\frac{EA}{EI}$ et l'abscisse de E.

4° Soit T le point du cercle (φ) tel que $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega T}) = 60°$. Lieu de T. Enveloppe de l'asymptote de H qui passe par T.

5° Existe-t-il des hyperboles (H) tangentes à la droite $y = 8a$; à la droite $y = ka$ ($ka > 0$)? Discuter suivant les valeurs de k. *(Grenoble.)*

● **751.** On donne un cercle (O) de centre O, de rayon R, un point F non situé sur ce cercle tel que OF = d et l'on considère les coniques (Γ) qui ont comme foyer F et pour cercle principal tout cercle ayant pour diamètre une corde de (O) portée par une droite passant par F.

1° Lieux géométriques du centre et du deuxième foyer de (Γ)? Quelle est la nature de (Γ) suivant la position de F par rapport à (O)?

2° Montrer que, quelle que soit la conique (Γ) : les tangentes aux sommets de l'axe focal sont tangentes à une conique fixe (Γ_0); la directrice associée à F est tangente à une parabole fixe (P); la deuxième directrice est tangente à la parabole (P') symétrique de (P) par rapport à O.

3° Calculer en fonction de la distance du centre de (Γ) au point O l'excentricité de (Γ). Quelle est, lorsque (Γ) est une ellipse, son excentricité maximum? lorsque (Γ) est une hyperbole, son excentricité minimum? Comment faut-il prendre F pour qu'il existe parmi les coniques (Γ) une hyperbole équilatère? un cercle?

Lorsque (Γ) est une ellipse, calculer son petit axe.

4° Montrer que : lorsque (Γ) est une hyperbole, ses asymptotes sont tangentes à un cercle fixe; lorsque (Γ) est une ellipse, les tangentes aux sommets du petit axe sont tangentes à un cercle fixe.

5° Combien peut-il exister de coniques (Γ) tangentes à une droite donnée? (On se contentera d'indiquer la construction du cercle principal en supposant le problème possible sans chercher à discuter.) *(Liban.)*

VINGT-TROISIÈME LEÇON

PROPRIÉTÉS COMMUNES

• **565. Equation d'une conique à centre.** — Considérons (fig. 484) une conique définie par un foyer F, la directrice correspondante D et son excentricité $e \neq 1$. Désignons par K la projection de F sur D, par A et A' les sommets de l'axe focal et par O le milieu de AA'. Prenons pour axes de coordonnées Ox orienté dans le sens OF et Oy perpendiculaire en O à Ox. En posant $\overline{OA} = a$, $\overline{OF} = c = ae$, on obtient, puisque la division (AA'FK) est harmonique (nº 547) : $\overline{OK} = \dfrac{a^2}{c}\cdot$ Le foyer F est donc le point F $(c, 0)$ et la directrice D a pour équation : $x = \dfrac{a^2}{c}\cdot$

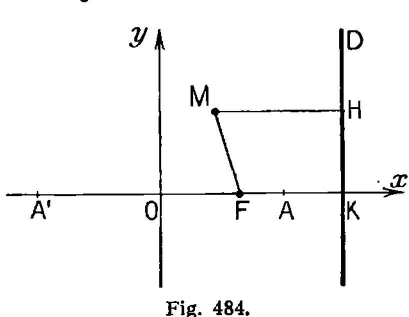


Fig. 484.

Soit M (x, y) un point quelconque du plan et H $\left(\dfrac{a^2}{c}, y\right)$ sa projection sur la directrice D. Pour que ce point M appartienne à la conique il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MH}} = e \quad \text{ou :} \quad \overline{MF}^2 = \frac{c^2}{a^2}\overline{MH}^2.$$

Soit (nº 31) : $$(x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

ou en réduisant : $$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

Soit finalement : $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1} \qquad (1)$$

Dans le cas de l'ellipse, on a : $a > c$ et $a^2 - c^2 = b^2$, d'où :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Dans le cas de l'hyperbole on a : $a < c$ et $a^2 - c^2 = -b^2$, d'où :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

• **566. Remarque.** — L'équation d'une conique à centre, rapportée à ses axes, est donc de la forme : $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1$ (4)

Réciproquement, si les coordonnées d'un point M vérifient une telle relation, le lieu du point M est une conique d'axes Ox et Oy. En effet :

1° Si α et β sont positifs on peut poser $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, le lieu est l'ellipse d'axe focal $AA' = 2a$ si $a > b$, d'axe focal $BB' = 2b$ si $b > a$.

2° Si $\alpha = a^2$, $\beta = -b^2$ on a affaire à une hyperbole d'axe focal $AA' = 2a$, et si $\alpha = -a^2$, $\beta = b^2$ on obtient une hyperbole d'axe focal $BB' = 2b$.

3° Lorsque α et β sont tous deux négatifs l'équation (4) est impossible.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

• **567. Théorème.** — ***Etant donnés deux points fixes*** A ***et*** A′ ***et un nombre algébrique*** k ***le lieu des points*** M ***dont la projection*** H ***sur la droite*** AA′ ***vérifie la relation :*** $\overline{HM}^2 = k\,\overline{HA}\cdot\overline{HA'}$ ***est une conique d'axe*** AA′.

Prenons pour axes Ox et Oy l'axe $\overrightarrow{A'A}$ et la médiatrice du segment AA′ (fig. 485). Tout point M du plan a pour coordonnées $x = \overline{OH}$ et $y = \overline{HM}$. En posant $\overline{OA} = a$ on a $\overline{HA} = (a - x)$ et $\overline{HA'} = (-a - x)$. Pour que le point M vérifie la relation proposée il faut et il suffit que :

$$y^2 = k(a - x)(-a - x)$$

ou

$$y^2 = k(x^2 - a^2).$$

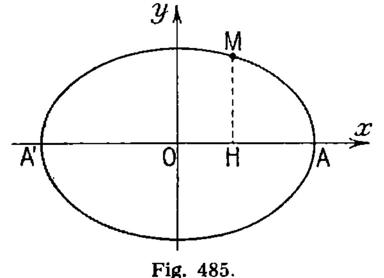


Fig. 485.

Soit : $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ka^2} = 1.$$

Si $k > 0$, on peut poser $ka^2 = b^2$ et le lieu de M est une hyperbole d'axe transverse AA′. Cette hyperbole est équilatère si $k = 1$.

Si $k < 0$, on peut poser : $ka^2 = -b^2$ et le lieu est une ellipse d'axes $AA' = 2a$, $BB' = 2b$. L'axe focal est AA′ si $k < 1$, BB′ si $k > 1$. Pour $k = -1$ le lieu est le cercle de diamètre AA′.

• **568. Théorème.** — ***Le lieu des centres des cercles invariants dans une inversion donnée et tangents à un cercle fixe*** F ***ou à une droite fixe*** Δ ***est une conique.***

Si, par hypothèse, le cercle M invariant dans l'inversion (ω, k), est tangent en N à un cercle F (R), il est également tangent en N′ au cercle F′ (R′) ou à la droite Δ, homologue du cercle F dans l'inversion considérée (n° 380). Si le cercle M est par hypothèse tangent en N′ à une droite donnée Δ il est également tangent en N au cercle F (R), homologue de Δ dans l'inversion (ω, k).

1° Etudions d'abord (fig. 486) le cas où le cercle M est tangent aux cercles F (R) et F' (R') en deux points N et N' homologues dans l'inversion (ω, k). La parallèle menée par F à la droite ωNN' coupe F'N' en φ. Le triangle MNN' étant isocèle,

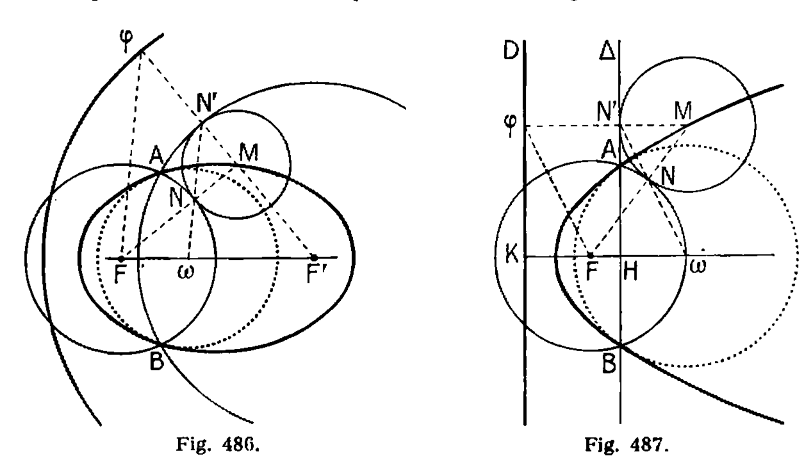


Fig. 486. Fig. 487.

il en est de même du triangle MFφ et on a : Mφ = MF. D'autre part le théorème de Thalès donne : $\frac{F'\varphi}{F'F} = \frac{F'N'}{F'\omega}$ soit $F'\varphi = \frac{F'F.F'N'}{F'\omega}$. La longueur F'$\varphi$ est donc une constante $2a$ et le cercle de centre M passant par F est tangent en φ au cercle fixe F' ($2a$). Lorsque N décrit le cercle F (R) et N' le cercle F' (R') le point φ décrit le cercle F' ($2a$). Donc :

Le lieu du point M *est la conique* Γ *de foyer* F *et de cercle directeur* F' ($2a$).

2° Si (fig. 487) le cercle M est tangent au cercle F (R) et à la droite Δ en deux points N et N' homologues dans l'inversion (ω, k), la parallèle menée par F à la droite ωNN', coupe la droite MN' en un point φ tel que $\overrightarrow{N'\varphi} = \overrightarrow{\omega F}$. Le lieu de φ est une droite D parallèle à Δ. Le triangle MFφ homothétique du triangle MNN' est isocèle et on a MF = Mφ. Lorsque N décrit le cercle F et N' la droite Δ, le point φ décrit la droite D :

Le lieu du point M *est la parabole* Γ *de foyer* F *et de directrice* D.

Le paramètre KF de cette parabole est égal à la distance Hω du point ω à la droite Δ car on a : $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{\varphi N'} = \overrightarrow{F\omega}$ donc $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{H\omega}$.

• **569. Corollaires.** — 1° ***Le lieu des centres des cercles orthogonaux à un cercle fixe*** ω (ρ) ***et tangents à un cercle fixe*** F (R) ***ou à une droite fixe*** Δ ***est une conique*** Γ.

Ces cercles sont en effet invariants dans l'inversion (ω, ρ^2).

Lorsque le cercle ω (ρ) coupe en A et B le cercle F (R) ou la droite Δ (fig. 486 et 487) les points A et B appartiennent à la conique Γ car lorsque N vient en A il en est de même de M. Or la droite ωN, parallèle à Fφ, est perpendiculaire à la tangente en M à Γ. La droite ωA, position limite de ωN, est donc la normale en A à Γ. *Le cercle* ω *est bitangent en* A *et* B *à la conique* Γ.

2° ***Le lieu des points dont la différence des carrés des distances à un point fixe* ω *et à une droite fixe* Δ *est un nombre constant* k *est une parabole* Γ.**

La relation $\overline{M\omega}^2 - \overline{MH}^2 = k$ montre que le point ω a pour puissance k par rapport au cercle de centre M tangent en H à Δ. Ce cercle M est donc invariant dans l'inversion (ω, k).

Lorsque $k = \rho^2$, *la parabole* Γ *est le lieu des points* M *dont la distance à la droite* Δ *est égale à la longueur* MT *de la tangente au cercle bitangent* ω (ρ).

3° Les cercles tangents à deux cercles donnés (ou à un cercle et une droite donnés) sont invariants dans l'une ou l'autre des deux inversions qui échangent ces deux cercles. Il en résulte que :

***Le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles* F *et* F′ *se compose en général de deux coniques homofocales de foyers* F *et* F′.**

***Le lieu des centres des cercles tangents à un cercle* F *et à une droite* Δ *se compose en général de deux paraboles homofocales de foyer* F.**

Lorsque le cercle F est tangent en A au cercle F′ ou à la droite Δ, une de ces coniques dégénère en la droite AF.

PROPRIÉTÉS DES TANGENTES

• 570. Théorème. — *Une conique est déterminée par un foyer et trois tangentes.*

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les symétriques du foyer F par rapport aux trois tangentes données (fig. 488). Ces trois points sont en général situés sur un cercle de centre F′ et il existe une conique unique Γ de foyer F et cercle directeur F′ tangentes aux trois droites données.

Si le point F appartient au cercle circonscrit au triangle ABC formé par trois droites, les points φ_1, φ_2 et φ_3 sont alignés sur une droite D et la conique Γ est dans ce cas la parabole de foyer F et de directrice D.

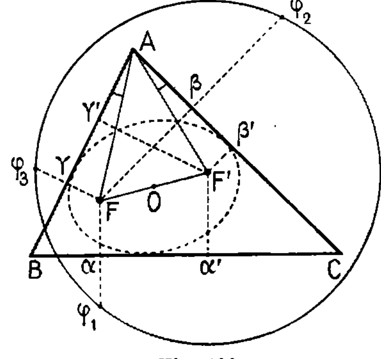


Fig. 488.

Les foyers F et F′ d'une conique Γ inscrite à un triangle ABC sont dits *inverses* dans le triangle ABC. L'égalité des angles tels que (AB, AF) et (AF′, AC) détermine le point F′ inverse d'un point donné F non situé sur le cercle ABC. Les projections α, β, γ et α', β', γ' de F et F′ sur les côtés du triangle appartiennent à un même cercle O, cercle principal de la conique Γ. Les égalités $\overline{F\alpha}.\overline{F'\alpha'} = \overline{F\beta}.\overline{F'\beta'} = \overline{F\gamma}.\overline{F'\gamma'}$ montrent que les distances orientées des points F et F′ aux côtés du triangle ABC sont inversement proportionnelles.

• 571. Théorème. — *La portion d'une tangente variable à une conique, comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer sous un angle de droites constant.*

Cette propriété résulte du n° 439 pour l'ellipse, du n° 488 pour l'hyperbole et du n° 537 pour la parabole.

• 572. Réciproque. — ***L'enveloppe d'un segment variable*** PQ ***compris entre deux droites fixes*** $x'x$ ***et*** $y'y$ ***et vu d'un point fixe*** F ***sous un angle de droites constant est une conique de foyer*** F ***tangente à*** $x'x$ ***et*** $y'y$.

Désignons par H, K et L les projections du point F sur les droites PQ, $x'x$ et $y'y$. Les quadrangles FHPK et FHQL étant inscriptibles, on obtient :

$$(FP, FQ) = (FP, FH) + (FH, FQ) = (KP, KH) + (LH, LQ)$$
$$= (KP, LQ) - (KH, LH).$$

Posons $(KP, LQ) = (x'x, y'y) = \alpha$. Pour que l'angle (FP, FQ) soit égal à un angle constant θ, il faut et il suffit que $(HK, HL) = \alpha - \theta$. Si $\alpha - \theta$ est différent de 0 à $k\pi$ près, le lieu de H est un cercle de centre O et l'enveloppe de PQ est la conique de foyer F admettant le cercle O pour cercle principal. Si $\alpha = \theta$, le lieu de H est une droite Δ et l'enveloppe de PQ est la parabole de foyer F admettant Δ pour tangente au sommet. Comme le cercle O (ou la droite Δ) passe par K et L, les droites $x'x$ et $y'y$ sont tangentes à la conique enveloppe.

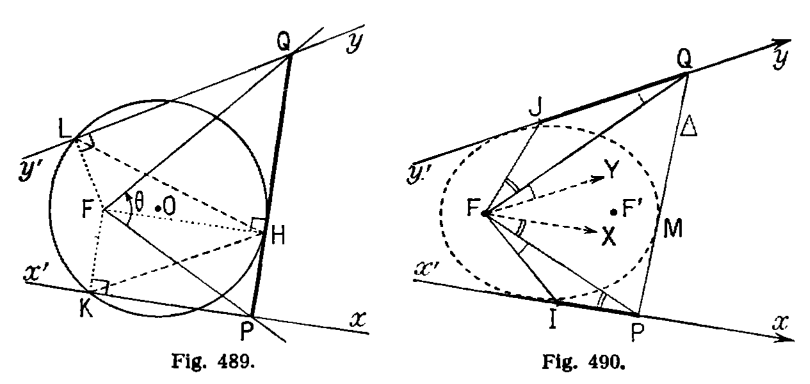


Fig. 489. Fig. 490.

• 573. Segments déterminés sur deux tangentes fixes. — Considérons (fig. 490) une conique de centre O de foyers F et F' et deux tangentes fixes $x'x$ et $y'y$ respectivement parallèles à FX et FY. Une tangente variable Δ coupe $x'x$ en P et $y'y$ en Q. Lorsque Δ devient parallèle à $y'y$, le point P vient en I et l'angle constant (FP, FQ) vient coïncider avec (FI, FY). Lorsque Δ devient parallèle à $x'x$ le point Q vient en J et l'angle (FP, FQ) vient coïncider avec (FX, FJ). Des égalités :

$$(FP, FQ) = (FI, FY) = (FX, FJ)$$

on déduit :

$$(FP, FI) = (FQ, FY) \quad \text{et} \quad (FP, FX) = (FQ, FJ)$$

et par suite :

$$(FP, FI) = (QF, QJ) \quad \text{et} \quad (PF, PI) = (FQ, FJ).$$

Les triangles IPF et JFQ sont directement semblables et : $IP . JQ = FI . FJ$. D'autre part, si les tangentes $x'x$ et $y'y$ sont orientées, le produit $\overline{IP} \cdot \overline{JQ}$ garde un signe constant. Donc :

Le produit $\overline{\mathrm{IP}}\cdot\overline{\mathrm{JQ}}$ ***des segments déterminés par une tangente variable*** Δ ***sur deux tangentes fixes*** $x'x$ ***et*** $y'y$ ***d'une conique à centre est constant.***

Lorsque $x'x$ et $y'y$ sont les asymptotes d'une hyperbole, les points I et J sont en O centre de l'hyperbole et on retrouve la relation $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OF}}^2$ du n° 497.

● **574. Cas où les tangentes fixes sont parallèles.** — Si $x'x$ et $y'y$ sont parallèles les points I et J sont les points de contact A et B de ces tangentes. Le produit $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}$ est donc constant et égal en valeur absolue à FA.FB ou à AF.AF'.

1° Lorsque la conique est une ellipse admettant OC pour demi-diamètre conjugué de OA (fig. 491) on voit, en prenant la droite PQ parallèle à AB, que $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{OC}}^2$. Si AB est le grand axe de l'ellipse le produit $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}$ est égal au carré b^2 du demi-petit axe. Dans ce cas les angles PFQ et PF'Q sont droits et le

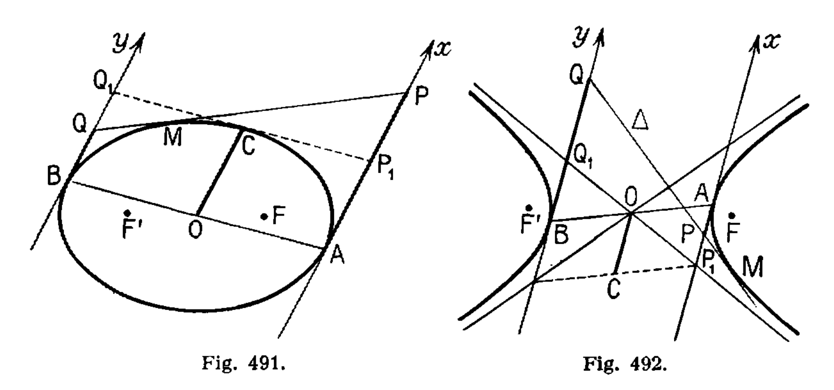


Fig. 491. Fig. 492.

cercle de diamètre PQ passe par F et F'. Si AB est le petit axe de l'ellipse le produit $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}$ est égal au carré a^2 du demi-grand axe. La puissance des points A et B par rapport au cercle ω de diamètre PQ est égale à : $\overrightarrow{\mathrm{AP}}.\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{AF}}^2 = \overline{\mathrm{AF}}'^2$. Les points A et B ayant même puissance par rapport au cercle ω et aux cercles points F et F', il en résulte que le cercle diamètre PQ appartient au faisceau de cercles de points limites F et F'.

2° Lorsque la conique est une hyperbole de diamètre AB admettant OC pou demi-diamètre conjugué de OA, on voit en prenant pour P_1Q_1 une des asymp totes de l'hyperbole que $\overline{\mathrm{AP}_1} = -\overline{\mathrm{BQ}_1} = \overline{\mathrm{OC}}$. Donc $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}} = -\overline{\mathrm{OC}}^2$ Si AB est l'axe transverse de l'hyperbole le produit $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}$ est égal à $-b^2$. Dans ce cas les angles PFQ et PF'Q sont droits et le cercle de diamètre PQ passe par F et F'.

Remarque. — La relation $\overline{\mathrm{OC}}^2 = \mathrm{AP.BQ} = \mathrm{AF.AF'}$ montre que le produit des rayons vecteurs AF et AF' d'un point A d'une conique à centre est égal au carré $\overline{\mathrm{OC}}^2$ du demi-diamètre conjugué de OA.

• **575. Réciproque.** — ***L'enveloppe d'une droite* PQ *qui détermine sur deux droites parallèles* Ax *et* By *des segments dont le produit* $\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$ *est constant est une conique tangente en* A *et* B *à* Ax *et à* By.**

Si le produit $\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$ est égal à k^2, il existe une ellipse Γ de diamètre AB et de centre O, admettant pour demi-diamètre conjugué de OA le segment $OC = k$ parallèle à Ax. Si le produit $\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$ est égal à $-k^2$ il existe une hyperbole Γ, de diamètre AB admettant pour demi-diamètre non transverse conjugué de OA, le segment $OC = k$ parallèle à Ax.

D'après le paragraphe précédent la tangente à la conique Γ, issue d'un point P de Ax et distincte de PA, coupe By en un point Q' tel que : $\overline{AP}\cdot\overline{BQ'} = \overline{AP}\cdot\overline{BQ}$. Les points Q et Q' sont donc confondus et les différentes droites PQ sont les tangentes à la conique Γ.

PROPRIÉTÉS DES NORMALES

• **576. Projection de la normale sur les rayons vecteurs.** — Considérons une conique de foyers F et F' (fig. 493). La normale au point M de cette conique coupe l'axe focal $x'x$ en N. Désignons par φ le symétrique du foyer F par rapport à la tangente en M, par H et H' les projections des foyers F et F' sur cette tangente et par α l'angle aigu formé par MN et les droites MF et MF'.

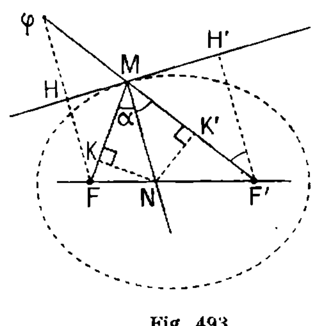


Fig. 493.

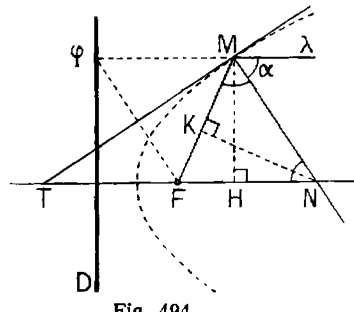


Fig. 494.

La similitude des triangles F'MN et F'φF donne :

$$\frac{MN}{\varphi F} = \frac{MF'}{\varphi F'} \quad \text{ou :} \quad \frac{MN}{2FH} = \frac{MF'}{2a} \qquad \text{soit} \qquad MN = \frac{FH.MF'}{a}.$$

La projection MK du segment MN sur la droite MF est égale à MN cos α. Comme $MF' \cos\alpha = F'H'$ et $FH.FH' = b^2$. On obtient donc :

$$MK = MN\cos\alpha = \frac{FH.MF'\cos\alpha}{a} = \frac{FH.F'H'}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

La longueur MK est donc constante et égale à $\frac{b^2}{a} = p$. Cette longueur est appelée *paramètre* de la conique à centre.

Dans une parabole (fig. 494) le triangle FMN est isocèle et la projection MK de MN sur MF est égale à HN, c'est dire (n° 531) au paramètre de la parabole.

La projection sur un rayon vecteur de la portion de normale à une conique comprise entre la courbe et l'axe focal est constante et égale au paramètre de cette conique.

Lorsque le rayon vecteur MF est perpendiculaire en F à l'axe focal, le point K est en F (fig. 495). Donc :

Le paramètre d'une conique est égal à la longueur de la demi-corde focale perpendiculaire à l'axe focal de cette conique.

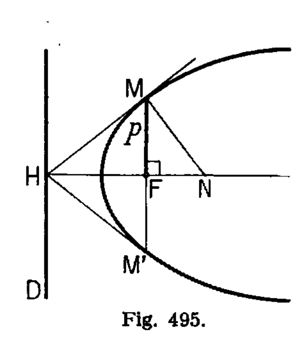


Fig. 495.

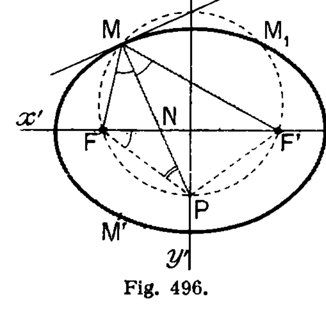


Fig. 496.

• 577. **Segments déterminés sur la normale.** — D'après le théorème de Thalès on obtient (fig. 493) compte tenu de l'égalité MF = Mφ :

$$\frac{NF}{M\varphi} = \frac{NF'}{MF'} = \frac{FF'}{\varphi F'} = \frac{2c}{2a} \quad \text{donc :} \quad \frac{NF}{MF} = \frac{NF'}{MF'} = \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

L'intersection P de la normale MN avec l'axe non focal $y'y$ (fig. 496) est située sur le cercle MFF' car MN est bissectrice de l'angle FMF' et $y'y$ est la médiatrice de FF'. Les deux triangles PNF et PFM sont inversement semblables, d'où : $\frac{PN}{PF} = \frac{PF}{FM} = \frac{NF}{PM} = \frac{c}{a}$. (2)

On en déduit que :

$$\boxed{PM = \frac{a}{c}PF} \qquad (3)$$

D'autre part : $\frac{PN}{PM} = \frac{PN}{PF} \times \frac{PF}{PM} = \frac{c^2}{a^2}$. Les vecteurs $\vec{PM}$ et $\vec{PN}$ étant de même sens il en résulte que : $\frac{\overline{MP}}{a^2} = \frac{\overline{NP}}{c^2} = \frac{\overline{MN}}{a^2 - c^2}$ (4)

donc compte tenu de la relation $a^2 - c^2 = b^2$:

***Les trois segments* MP, MN *et* NP *déterminés par les axes sur la normale en* M *à une conique sont proportionnels à* a^2, b^2 *et* c^2.**

La puissance du point N par rapport au cercle MFF′ donne :

$$\overline{NF}.\overline{NF'} = \overline{NM}.\overline{NP} = \overline{NM}.\frac{c^2}{a^2 - c^2}\overline{MN} = \frac{c^2}{c^2 - a^2}\overline{MN}^2.$$

D'où :
$$\boxed{\overline{MN}^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\,\overline{NF}.\overline{NF'}} \qquad (5)$$

Dans la parabole (fig. 494) on sait que la sous-normale $\overline{HN}$ est égale au paramètre p et que le foyer F est le milieu de l'hypoténuse NT du triangle MNT.

Donc : $\overline{MN}^2 = \overline{NH}.\overline{NT} = 2\overline{HN}.\overline{FN}$. Soit $\boxed{\overline{MN}^2 = 2p\ \overline{FN}}$ (6)

● **578. Cercles focaux.** — Par tout point M d'une conique à centre (fig. 496) passent deux cercles de centres respectifs N et P bitangents à la conique. Le premier qui est tangent en M et M′ est appelé *cercle focal de première espèce* et le second qui est tangent en M et M_1 est appelé *cercle focal de seconde espèce.*

Par tout point M d'une parabole (fig. 494) passe un cercle de centre N, bitangent à la courbe en M et M′ et appelé *cercle focal de la parabole.*

1° Le cercle ω envisagé au 1° du n° 569 est un cercle focal de première espèce de la conique Γ (fig. 486 et 487). Les formules (5) et (6) du n° 577 montrent que le rayon ρ d'un tel cercle vérifie la relation :

$$\rho^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\overline{\omega F}.\overline{\omega F'} \quad \text{ou} \quad \rho^2 = -2p.\overline{\omega F}$$

suivant que Γ est une conique à centre ou une parabole.

2° Le cercle ω utilisé dans la construction du n° 551 est un cercle focal de seconde espèce de la conique (fig. 471 et 472). La formule (3) du n° 577 montre que le rayon ρ d'un tel cercle vérifie la relation : $\rho = \frac{a}{c}\omega F$ ou $\frac{\rho}{a} = \frac{F\omega}{FO}$. Il en résulte que :

Le cercle focal de seconde espèce de centre ω *est l'homologue du cercle principal* O (*a*) *dans la similitude directe de centre* F *qui transforme* $\overrightarrow{FO}$ *en* $\overrightarrow{F\omega}$. Cette similitude transforme les sommets A et A′ de la conique en α et α′ extrémités du diamètre du cercle ω passant par F. Les lieux de α et α′ sont donc les tangentes aux sommets A et A′ de la conique.

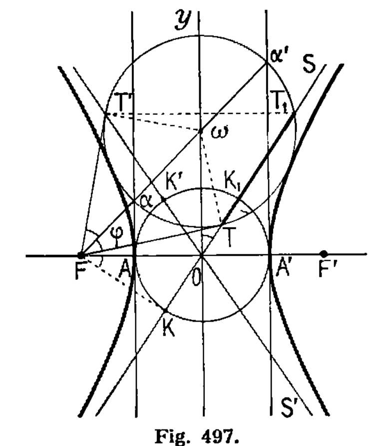


Fig. 497.

Lorsque la conique est une hyperbole (fig. 497) le cercle focal de seconde espèce ω est vu du foyer F sous un angle constant $TFT' = 2\varphi$ tel que : $\sin\varphi = \frac{\rho}{\omega F} = \frac{a}{c}$.

L'angle aigu φ est donc le complément du demi-angle des asymptotes. Les points de contact T et T′ des tangentes issues de F se déduisent du point ω dans l'une ou l'autre des similitudes directes (F, cos φ, ∓ φ). Les lieux de T et T′, lorsque ω décrit l'axe $y'y$, sont les perpendiculaires en K et K′ aux tangentes FK et FK′ au cercle principal, c'est-à-dire (n° 477) les asymptotes OS et OS′ de l'hyperbole.

Soit T_1 le point où le cercle ω recoupe l'asymptote OS. La rotation (F, 2φ) transforme T en T' et la rotation (O, -2φ) transforme T' en T_1. Le produit de ces deux rotations est la translation qui transforme K en K_1. Il en résulte que le vecteur $\overline{TT_1}$ est constant et de module $2a$. Le cercle ω découpe donc des segments de longueur constante $2a$ sur les asymptotes.

● **579. Application à la similitude.** — Lorsque deux points M et M' décrivent deux divisions rectilignes semblables admettant le point fixe F pour centre de similitude directe, le centre ω de tout cercle lié au triangle FMM' décrit une droite δ (nº 248) et le rayon ρ du cercle ω est dans un rapport constant avec la distance ωF. Le cercle ω est donc un cercle de seconde espèce de la conique Γ de foyer F admettant pour cercle principal le cercle (ω_0) dont le centre est la projection de F sur δ. Autrement dit la conique Γ est l'enveloppe du cercle ω.

EXERCICES

● **752.** Préciser la nature et les éléments des coniques lieux des centres des cercles tangents à deux cercles inégaux donnés F (R) et F' (R') tels que FF' $= 2c$ suivant que les cercles sont extérieurs, sécants ou intérieurs.

● **753.** Reprendre l'étude précédente lorsque les cercles donnés sont :
1º Tangents intérieurement ou tangents extérieurement;
2º Egaux, sécants ou extérieurs.

● **754.** Préciser les éléments des paraboles lieux des centres des cercles tangents à un cercle F (R) et à une droite donnée Δ située à la distance d de F suivant que l'on a : $d > R$, $d = R$, $d < R$ ou $d = 0$.

● **755.** Un cercle variable de centre M passe par un point fixe A et découpe sur une droite donnée Δ un segment BC de longueur constante $2a$.
1º Montrer que le cercle A (a) est orthogonal au cercle de centre M tangent à Δ
2º Trouver le lieu du point M et préciser ses éléments.

● **756.** Un point P décrit la perpendiculaire en A au segment donné AB. La perpendiculaire en P à AP et la perpendiculaire menée de A à BP se coupent en M.
1º Le cercle de centre M et de rayon MP est orthogonal au cercle de diamètre AB. En déduire le lieu de M.
2º Le cercle de centre B et de rayon BA est orthogonal au cercle de diamètre MP. En déduire le lieu du milieu I de MP.

● **757.** On donne un segment AB et une droite quelconque Δ. La perpendiculaire en P à Δ et la perpendiculaire menée de A à BP se coupent en M.
1º On suppose que le point A est sur Δ. Montrer que le cercle de centre M et tangent à Δ est orthogonal au cercle O de diamètre AB. En déduire que le lieu de M est la parabole bitangente au cercle O en A et en A' projection de B sur Δ.
2º Lorsque A se projette en K sur Δ, la translation de vecteur $\overrightarrow{KA}$ tranforme Δ, P et B en Δ', P' et B'. Déterminer comme ci-dessus le lieu de M.

● **758.** Dans le triangle ABC le côté BC est fixe et le point A décrit une parallèle Δ au côté BC. Soit A' la projection de A sur BC et H l'orthocentre du triangle ABC.
1º Le cercle de diamètre AH est orthogonal au cercle de diamètre BC. En déduire le lieu du milieu α de AH et par affinité, celui du point H.
2º Montrer que le sommet D du parallélogramme A'ACD est fixe et que le cercle de centre H et tangent à BC, est orthogonal au cercle de diamètre BD. Retrouver ainsi le lieu de H.

● **759.** 1º Lieu géométrique des foyers F' des coniques de foyer donné F, tangentes à deux droites données Δ et Δ' concourantes ou parallèles.
2º Construire le second foyer F' d'une conique Γ de foyer F, tangente aux trois côtés d'un triangle ABC. Etudier le cas où F est le centre O du cercle ABC, l'orthocentre H du triangle ABC, le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit ou le centre de gravité. Quelle est la nature de Γ lorsque F appartient au cercle ABC?

● **760.** *Théorème de Pascal.* — On considère un hexagone AB'CA'BC' inscrit dans un cercle. Les côtés opposés BC' et B'C se coupent en α, CA' et C'A en β, AB' et A'B en γ. Démontrer que dans la similitude inverse qui tranforme αBB' en αCC', l'homologue du point γ est le point γ' inverse de β dans le triangle αCC' et en déduire que les trois points α, β, γ sont alignés.

● **761.** On considère deux coniques Γ et Γ' ayant un foyer commun F :

1° Construire les tangentes communes à ces deux coniques et montrer que le point P commun à ces tangentes est situé sur la droite qui joint les deux autres foyers.

2° Etudier le cas où l'une des coniques est une parabole.

● **762.** Soient Ox et Oy deux axes rectangulaires et sur Ox les deux points A et A tels que $\overline{OA} = -\overline{OA'} = a$. Deux points variables N et N' décrivent Oy et les droites AN et A'N' se coupent en M. Trouver le lieu du point M sachant que le produit $\overline{ON}.\overline{ON'}$ est constant et égal à b^2 ou à $-b^2$.

● **763.** On donne deux points fixes A et A' et un point variable P qui décrit une droite fixe Δ perpendiculaire en K à la droite AA'. La perpendiculaire menée par A à la droite AP coupe en M la droite A'P. Soit H la projection de M sur AA'.

1° Montrer que $\overline{HM}^2$ et le produit $\overline{HA}.\overline{HA'}$ sont dans un rapport constant.

2° Trouver le lieu de M et discuter sa nature.

● **764.** On considère un trapèze ABB'A' rectangle en A et en A'. Un point variable P décrit la droite AA' et les droites PB' et PB coupent respectivement AB et A'B' en N et N'. Les droites AN' et A'N se coupent en un point M qui se projette en H sur AA'.

1° Montrer que le produit $\overline{AN}.\overline{A'N'}$ est constant et trouver l'enveloppe de NN'.

2° Comparer $\overline{HM}^2$ et $\overline{HA}.\overline{HA'}$ et déterminer le lieu de M.

● **765.** On donne un triangle AA'B de hauteur BK. Une droite variable Δ perpendiculaire en P à AA' coupe AB en N et A'B en N'. Les droites A'N et AN' se coupent en un point M se projetant en H sur AA'.

1° Démontrer que le lieu de M est la conique Γ d'axe AA' qui passe par B.

2° Trouver la nature du faisceau B(AA'MP) et déterminer l'enveloppe de la droite MP. En déduire que la tangente en B à Γ coupe le segment NN' en son milieu I.

3° Démontrer que la droite IM est tangente en M à Γ.

● **766.** Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, une droite fixe Δ, d'équation $x = d$ et sur Ox le point fixe ω tel que $\overline{O\omega} = kd$. Un point M du plan se projette en H sur Δ et on désigne par h une constante donnée.

1° Montrer que le lieu des points M tels que $\overline{M\omega}^2 - k\,\overline{MH}^2 = h$ est une conique Γ de centre O dont on établira l'équation. Discuter sa nature.

2° On suppose que $h = \rho^2$. Montrer que Γ est le lieu des points dont la puissance par rapport au cercle ω (ρ) est égale à $k\,\overline{MH}^2$ et que Γ passe par les points A et B communs à Δ et au cercle ω lorsqu'ils existent.

3° La droite AM recoupe le cercle ω en C et le point H se projette en P sur AM. Montrer que MC $= k$ MP et en déduire que Γ est bitangente au cercle ω.

● **767.** Une conique Γ de foyer F est définie comme lieu des centres M des cercles orthogonaux à un cercle donné ω (ρ) et tangents au cercle donné F (R). On pose ωF $= e$ R et on désigne par MT la longueur de la tangente issue de M au cercle ω, par Δ l'axe radical des cercles ω et F et par H la projection de M sur Δ.

1° Montrer que la condition pour que les cercles M (MT) et F (R) soient tangents s'écrit $|(\overline{MF}^2 - R^2) - (\overline{M\omega}^2 - \rho^2)| = 2R.MT$.

2° Démontrer que MT $= e$MH. Etudier le cas où $\rho = 0$ et le cas où Γ est une ellipse de centre ω.

3° Trouver une propriété de la somme ou de la différence des longueurs des tangentes menées du point M de Γ, à deux cercles focaux centrés sur l'axe focal de la conique Γ.

● **768.** Un cercle variable dont le centre ω décrit la médiatrice du segment donné FF' a pour rayon $r = e\,\omega$F (e constante donnée).

1° Montrer que le pied K de la polaire de F par rapport au cercle (ω) décrit une droite D. Calculer le rapport des longueurs FK et Fω.

2° La perpendiculaire en K à D coupe le cercle (ω) en M et M'. Démontrer que MF = e MK et trouver le lieu Γ de M et M'. Le cercle FMK étant orthogonal au cercle (ω), montrer que ce dernier est bitangent en M et M' à Γ.

3° On désigne par (I) une position donnée du cercle (ω) par L, A et A' les positions correspondantes de K, M et M'. Le cercle FKL est orthogonal aux cercles (ω) et (I) et l'axe radical de ces deux cercles est la médiatrice de KL. Démontrer que la puissance de M par rapport au cercle I est dans un rapport constant avec le carré de la distance MH de M à la droite AA'.

● **769.** 1° Trouver le lieu des extrémités des diamètres perpendiculaires à Ox des cercles centrés sur Ox et bitangents à une conique Γ d'équation : $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1$ d'axe focal Ox ou bitangents à la parabole $y^2 = 2px$.

2° Même problème pour les extrémités des diamètres perpendiculaires à Oy pour les cercles centrés sur Oy et bitangents à Γ.

3° En déduire l'enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'une conique perpendiculaires à un axe de cette conique.

● **770.** 1° Une conique de foyers F et F' et de centre O est tangente aux trois droites Px, Qy et PQ. Les tangentes parallèles à Qy et Px coupent Px et Qy en I et J. On construit le triangle PQS directement semblable au triangle POI. Démontrer que les trois triangles PFQ, PIF' et F'JQ sont directement semblables, qu'il en est de même des triangles POF' et PFS et que le quadrangle FF'PS est harmonique.

2° On se donne les points I, J, P et Q de la figure précédente. Construire les points F et F' et montrer que la conique Γ de foyers F et F' tangente à PQ est également tangente à IP et JQ.

3° Deux points variables M et N décrivent respectivement les droites IP et JQ de telle sorte que $\overline{\text{IM}}.\overline{\text{JN}} = \overline{\text{IP}}.\overline{\text{JQ}}$. Démontrer que l'enveloppe de la droite MN est la conique Γ construite au 2°. (Procéder par identification ou montrer que les angles (FM, FN) et (F'M, F'N) sont constants).

● **771.** En utilisant les résultats de l'exercice précédent :

1° Construire une conique de centre O donné tangente aux trois côtés d'un triangle PQR donné. Cas où O est sur QR ou en R.

2° Deux points variables M et N décrivent respectivement deux droites AB et AC de telle sorte que $\frac{\overline{\text{MA}}}{\overline{\text{MB}}} \cdot \frac{\overline{\text{NA}}}{\overline{\text{NC}}} = k$ (constante donnée). Construire les points I et J tels que $\overrightarrow{\text{IA}} = k\,\overrightarrow{\text{IB}}$ et $\overrightarrow{\text{JA}} = k\,\overrightarrow{\text{JC}}$. Démontrer que le produit $\overline{\text{IM}} \cdot \overline{\text{JN}}$ est constant et que l'enveloppe de la droite MN est la conique Γ ayant pour centre le milieu O de IJ, tangente en B et C à AB et AC. Que devient Γ pour $k = 1$?

● **772.** 1° Démontrer que si le quadrilatère ABCD est circonscrit à un cercle de centre O, il existe une conique de foyers A et C, tangente en B à OB et qui est également tangente en D à OD. En déduire que *dans le quadrilatère* ABCD *la somme de deux des côtés est égale à la somme des deux autres.*

2° Réciproquement si cette condition est réalisée il existe une conique de foyers A et C qui passe par B et D et le point O commun aux tangentes en B et D est le centre d'un cercle inscrit dans le quadrilatère.

● **773.** Une conique variable Γ de centre O est inscrite dans un quadrilatère donné ABCD. On désigne par ω le centre de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{\text{AB}}$ en $\overrightarrow{\text{CD}}$.

1° Les tangentes parallèles à CD et AB coupent respectivement AB et CD en I et J. Démontrer que les divisions AIB et CJD sont semblables.

2° Démontrer que le lieu de O est la droite qui joint les milieux M et N des diagonales du quadrilatère ABCD (*Th. de Newton*).

3° Trouver l'enveloppe de la droite IJ et l'enveloppe du cercle de diamètre IJ.

● **774.** Deux paraboles Γ et Γ' de même foyer F ont pour directrices D et D' et pour paramètres p et $p' = kp$. Leurs axes font entre eux l'angle $(\overrightarrow{\text{F}x}, \overrightarrow{\text{F}x'}) = \alpha$.

1° Construire les points communs à Γ et Γ', leur tangente commune δ et ses points de contact avec Γ et Γ'.

2° D'un point P variable sur δ on mène les tangentes PM à Γ et PM' à Γ'. Évaluer les angles (PM, PM') et $(\overrightarrow{\text{FM}}, \overrightarrow{\text{FM'}})$ et démontrer que FM' = kFM. Que peut-on dire des angles (PF, PM) et (PF, PM')?

3° Montrer que es points M, M′ P et F appartiennent à un même cercle de centre ω tangent en P à δ. Déterminer le lieu du point ω et en déduire celui du point de rencontre N des normales en M et M′ à Γ et Γ'.

4° Soient H et H′ les projections respectives de M sur D et de M′ sur D′. Trouver l'enveloppe de la droite HH′ et celle du cercle de diamètre HH′.

● **775.** On considère deux cercles O(R) et $\omega(\rho)$ et on désigne par (ω') l'homologue du cercle (ω) dans l'inversion (O, R^2). Soit M un point variable du cercle (ω) et p la tangente en M à ce cercle.

1° Montrer que le lieu du pôle P de la droite p par rapport au cercle O est la conique Γ de foyer O admettant le cercle (ω') pour cercle principal. Déterminer la tangente en P à Γ.

2° Démontrer que l'enveloppe de la droite m, polaire de M par rapport au cercle O, est la conique Γ. Discuter la nature de Γ et étudier le cas où le cercle (ω) passe par O.

3° Soit Δ la polaire du point ω par rapport au cercle O et H la projection de P sur Δ. Démontrer (cf. exercice 317) que $\frac{PO}{PH} = \frac{\omega O}{\omega M}$ et retrouver les résultats de la discussion précédente. (La conique Γ et le cercle ω sont dits *polaires réciproques* par rapport au cercle O).

● **776.** On considère les coniques (C) tangentes à deux droites non parallèles données (T_1) et (T_2) et admettant un foyer donné F situé dans l'un des angles aigus formés par les deux droites indéfinies (T_1) et (T_2).

1° Montrer que le cercle directeur du second foyer F′ passe par deux points fixes et que ce second foyer décrit une droite passant par le point de rencontre des tangentes (T_1) et (T_2). Trouver le lieu du centre des coniques (C).

Distinguer sur ces lieux les foyers et les centres d'ellipses et d'hyperboles.

2° Déterminer les foyers F′ pour lesquels la conique (C) est une hyperbole équilatère.

3° Montrer qu'il existe parmi les coniques (C) une seule parabole (P) et construire ses points de contact avec (T_1) et (T_2).

4° Déterminer les coniques (C) qui passent par un point donné A. Discuter le nombre et la nature de ces coniques d'après la position du point A, dans les diverses régions du plan déterminées par les droites (T_1), (T_2) et la parabole (P).

(Nancy.)

● **777.** On donne une parabole définie par son foyer F et sa directrice (D). Soit p son paramètre.

1° Construire les points d'intersection M et M′ de la parabole avec une sécante passant par F. Déterminer le point de contact T de la parabole avec la tangente parallèle à MM′.

2° On considère le cercle (C) de diamètre MM′. Montrer que ce cercle est tangent à la directrice (D) en un point que l'on déterminera. Calculer, en fonction de p et de l'angle α que fait la sécante MM′ avec la directrice (D), le rayon du cercle (C) et la puissance du sommet S de la parabole par rapport à ce cercle. Cette puissance est constante lorsque la sécante MM′ varie.

3° Montrer que, lorsque la sécante MM′ varie, le cercle (C) reste tangent à une courbe fixe (Γ) autre que D, que l'on déterminera. Trouver le lieu du centre du cercle (C).

4° Il existe une deuxième famille de cercles tangents à (D) et à (Γ). Montrer que la droite joignant les points de contact d'un cercle de cette famille avec (D) et (Γ) passe par un point fixe et que ces cercles sont orthogonaux à un cercle fixe que l'on déterminera. *(Clermont.)*

● **778.** On considère tous les cercles (C) du plan caractérisés par la propriété suivante : O désignant un point fixe donné et T, T′ les points de contact des tangentes menées de O au cercle (C), le triangle OTT′ est équilatéral.

1° Lieu des centres des cercles (C) qui passent par un point donné A.

2° Lieu des centres des cercles (C) qui sont tangents à une droite donnée (D) ne passant pas par O.

3° On considère les cercles (C) qui sont centrés sur une droite donnée (Δ) ne passant pas par O. Trouver le lieu géométrique des points T,T′ relatifs à ces cercles ainsi que l'enveloppe de la droite TT′.

4° Construire les cercles (C) centrés sur la droite (Δ) et passant par un point donné M du plan. Discussion. *(Toulouse.)*

● **779.** On donne le foyer F et la directrice D d'une parabole P de paramètre p.

1° Une droite quelconque (Δ) passant par F coupe la parabole en M et M'. Montrer que le point J d'intersection des tangentes à P en M et M' est situé sur D et que le cercle C qui a pour diamètre MM' est tangent à D.

2° Montrer que la puissance du sommet S de P par rapport au cercle C est constante lorsque Δ varie. Calculer cette puissance en fonction de p. Montrer, en utilisant une inversion de pôle S, que tous les cercles C sont tangents à un cercle fixe.

3° Trouver le lieu géométrique du milieu O de MM'.

4° Soient N et N' les points d'intersection de la droite FJ avec la parabole P. Montrer que les tangentes en N et N' se coupent sur Δ et qu'elles sont parallèles aux bissectrices des tangentes JM et JM'. Montrer que le lieu géométrique du point de rencontre Q des tangentes à P en M et N est une conique de foyer F et de directrice D. *(Poitiers.)*

● **780.** Etant donné, dans un plan P, une demi-droite Ox et sur cette demi-droite un point A tel que $OA = a$, on considère la tranformation qui fait correspondre à tout point M du plan un point M' pris sur la bissectrice de l'angle xOM et défini sur cette bissectrice orientée par $\overline{OM'}^2 = OM \times a$.

1° Le point M' est-il bien défini quel que soit M? Peut-il coïncider avec M? Quelle est la figure transformée d'un cercle (C) de centre O?

2° Le plan P étant orienté, on désigne par 2α l'angle des demi-droites Ox et OM et l'on trace l'axe Oy formant avec Ox l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$. Exprimer, dans le système d'axes Ox, Oy, les coordonnées x' et y' de M' et les coordonnées x et y de M en fonction de OM' et de α, puis x et y en fonction de x' et de y'. En déduire le lieu de M' lorsque M décrit :

a) une droite passant par O; *b*) une droite parallèle à Ox; *c*) une droite parallèle à Oy.

3° On considère, inversement, la transformation qui fait passer de M' à M ;

a) M' étant donné, construire géométriquement le point M correspondant ;

b) Lieu de M, lorsque M' décrit une droite passant par O;

c) M' décrivant une perpendiculaire à Ox coupant Ox en un point H' tel que $OH' = d$, exprimer OM en fonction de d et de α; en déduire que M décrit une parabole de foyer O, d'axe Ox. *(Grenoble.)*

● **781.** Deux cercles de rayons R et R', de centres F et F' ($FF' = 2c$), se coupent en des points N et N'. On pose : u = angle FNF' ($0 < u < \pi$).

Une droite variable d coupe les deux cercles suivant une division harmonique. Soient H et H' les projections de F et F' sur d. Déterminer le lieu décrit par les points H et H'.

Montrer que la droite d reste tangente à une ellipse ou à une hyperbole suivant que u est aigu ou obtus. Qu'arrive-t-il si u est droit?

2° On considère une ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a. Déterminer deux cercles de centres F et F', de rayons R et R' respectivement, tels que toute tangente à l'ellipse coupe ces deux cercles suivant une division harmonique.

Quelles sont les limites extrêmes entre lesquelles peuvent osciller les rayons R et R' des deux cercles cherchés?

3° On fait tourner de 90° autour du centre de l'ellipse le segment FF' pour l'amener en $F_1F'_1$.

Déterminer les distances de F_1 et F'_1, à une tangente commune aux deux cercles R et R'. Faire le produit de ces distances.

Quelle est la courbe enveloppée par cette tangente commune lorsqu'on fait varier R? *(Lyon.)*

● **782.** On considère deux cercles O, O', tangents en A, de rayons R, R' ($R' < R$), O' intérieur à O. Soit ω le centre d'un cercle variable qui reste tangent à O en M et à O' en M'.

1° Lieu du point ω. Angle que fait la droite MM' avec la tangente ωT à ce lieu.

2° Montrer que la droite MM' passe par un point fixe, dont on précisera la position. Montrer qu'il existe un cercle qui coupe tous les cercles ω à angle droit (préciser son rayon et la position de son centre).

3° On mène par le point ω la parallèle à MM'; celle-ci rencontre la droite OO', d'une part, et la perpendiculaire à OO' en son milieu I, d'autre part, en deux points, respectivement, P, Q. Calculer en fonction du rayon x du cercle ω la mesure algébrique de IP, le sens positif choisi sur OO' étant celui de O vers O', ainsi que la mesure de IQ. Valeurs maxima et minima de ces deux nombres. *(Egypte.)*

● **783.** Ou considère dans un plan un point fixe O et une droite D. On désigne par d la distance de O à la droite D. A tout point M de D on associe le cercle (M) de centre ω lieu des points K tels que $\frac{KO}{KM} = 2$.

1° Prouver que le lieu de ω lorsque M décrit D est une droite.

2° Déterminer les cercles (M) qui passent par un point donné A du plan. Discuter suivant la position de A dans le plan et indiquer le lieu des points A par lesquels passe un seul cercle (M).

3° La perpendiculaire à D menée par le point M coupe le cercle (M) en P et P'. Trouver le lieu géométrique H des points P et P'. Le comparer au lieu de A défini dans la deuxième question. Prouver que la courbe H et le cercle (M) sont tangents en P et P'. On *pourra* pour cela utiliser — en le démontrant au préalable — le fait que les quatre points O, P, P', ω sont sur un même cercle.

4° Trouver, lorsque M décrit la droite D, le lieu des points de contact T et T' des tangentes menées de O au cercle (M); trouver l'enveloppe de la droite TT'.

5° Soit (M') le cercle de centre ω' inverse du cercle (M) dans l'inversion de centre O de puissance $2d^2$. Montrer que les cercles (M') sont orthogonaux à un cercle fixe, que le rayon du cercle (M') est égal à $\frac{O\omega'}{2}$, et déterminer le lieu de ω' lorsque M décrit D.

(Guyane.)

● **784.** On considère une circonférence (C) et sa tangente (T) en un de ses points, O.

1° Trouver le lieu des centres des circonférences (Γ) tangentes à la fois à (C) et à (T) respectivement aux points M et N, distincts en général de O.

2° Montrer que MN passe par un point fixe I et que les cercles (Γ) sont orthogonaux à un cercle fixe que l'on déterminera.

3° Que deviennent les cercles (Γ) dans l'inversion de centre O et de puissance OI^2?

4° On considère tous les couples de cercles (Γ) orthogonaux entre eux et se coupant aux points A et B. Trouver le lieu des points A et B.

5° Déterminer les deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) tangents à une droite D donnée issue de O. En désignant par P_1 et P_2 les points de contact de ces cercles avec (T), calculer le produit $\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2}$.

6° Montrer qu'il existe un cercle distinct de (C) passant par O et tangent à la fois aux deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) de la question précédente. *(Guyane.)*

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

SECTIONS PLANES D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION

● **580. Généralités.** — Dans l'introduction à l'étude des coniques (nº 416) nous avons montré que toute section d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par le sommet est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Nous allons effectuer une étude plus complète d'une telle section en utilisant la méthode classique de Dandelin.

Considérons une surface conique de révolution de sommet S, d'axe Sz et de demi-angle au sommet θ. Désignons par P un plan donné faisant avec Sz l'angle $\varphi \leq 1^D$. Lorsque le plan P passe par S (fig. 498) il coupe le cône suivant deux génératrices distinctes, deux génératrices confondues ou au seul point S selon que l'angle φ est inférieur, égal ou supérieur à θ, c'est-à-dire selon que le plan P

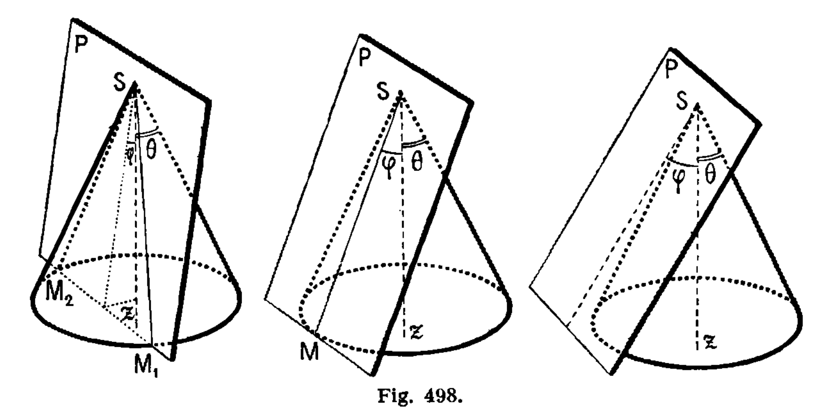


Fig. 498.

est sécant, tangent ou extérieur au cône S. D'autre part lorsque le plan P est perpendiculaire en O à l'axe Sz il coupe le cône suivant un cercle de centre O. Dans ce qui suit nous écarterons ces cas particuliers et nous supposerons donc que le plan P ne contient pas le sommet S du cône et n'est pas perpendiculaire à l'axe Sz de ce cône.

● **581. Théorème.** — ***La section d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.***

La figure formée par le cône de révolution S et le plan sécant P admet pour plan de symétrie, le plan méridien issu de l'axe Sz et perpendiculaire au plan P

(fig. 499). Ce plan de symétrie coupe le cône suivant deux génératrices Su et Sv dont l'une au moins Su coupe le plan P en A. Désignons par Ax la trace du plan de symétrie ASz sur le plan P. La droite Ax est la projection de Sz sur le plan P et fait avec Sz l'angle aigu φ. L'axe Sz coupe une des bissectrices de l'angle SAx en un point ω centre d'un cercle tangent en C à Su, en C′ à Sv et en F à Ax. La sphère (ω) admettant le cercle FCC′ pour grand cercle est inscrite dans le cône suivant un petit cercle γ, d'axe Sz et de diamètre CC′. Le rayon ωF étant perpendiculaire au plan P, la sphère (ω) est tangente en F au plan P. Le plan (π) qui contient le cercle γ est perpendiculaire au plan de symétrie SAx et coupe le plan P suivant une droite D perpendiculaire en K à Ax et à CC′.

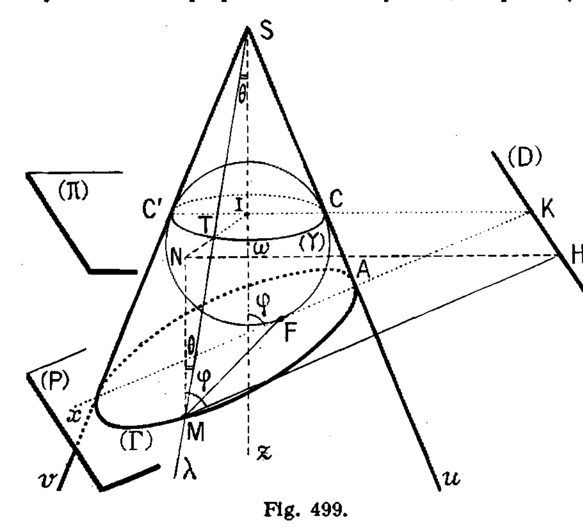


Fig. 499.

1° Tout point M commun au plan P et au cône S appartient à une génératrice du cône qui coupe γ en T. Soient N et H les projections de M sur le plan (π) et sur la droite D. Les droites MN et MH étant respectivement parallèles à Sz et Ax, les angles aigus NMT et NMH sont respectivement égaux à θ et à φ ce qui montre que :

$$MN = MT \cos\theta = MH \cos\varphi.$$

Or les segments MT et MF sont égaux comme tangentes issues de M à la sphère (ω). On en déduit que $MF \cos\theta = MH \cos\varphi$ soit :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Le point M *appartient donc à la conique* Γ *de foyer* F, *de directrice associée* D *et d'excentricité* $e = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta}$.

2° Réciproquement soit M un point quelconque de cette conique Γ. Menons par la droite SM un plan Q coupant le cône suivant deux génératrices $S\lambda_1$ et $S\lambda_2$ non parallèles au plan P. D'après ce qui précède, ces génératrices coupent le plan P en deux points distincts M_1 et M_2 de la conique Γ. Le point M qui appartient à la conique Γ et à la droite M_1M_2 intersection des plans P et Q coïncide avec l'un des points M_1 ou M_2. Donc :

Tout point de la conique Γ *fait partie à l'intersection du cône* S *et du plan* P.

• **582. Nature de la section.** — Menons par le sommet S le plan P′ parallèle au plan P. Trois cas peuvent se présenter :

1° Le plan P′ est extérieur au cône. On a : $\varphi > \theta$ et $\cos\varphi < \cos\theta$.

Donc $e = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta} < 1$. La conique Γ est une ellipse.

2° Le plan P′ est tangent au cône On a $\varphi = \theta$ et $\cos\varphi = \cos\theta$. Donc $e = 1$. La conique Γ est une parabole.

3° Le plan P′ coupe le cône suivant deux génératrices. On a : $\varphi < \theta$ et $\cos\varphi > \cos\theta$ donc $e > 1$. La conique Γ est une hyperbole.

Une section plane d'un cône de révolution est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que le plan issu du sommet et parallèle au plan sécant est extérieur, tangent ou sécant au cône.

Notons que lorsque le plan sécant P se déplace parallèlement à lui-même les sections obtenues sont homothétiques l'une de l'autre par rapport à S.

• **583. Section elliptique.** — Dans ce cas fig. 500) la section Γ appartient à une même nappe du cône. Le plan P coupe les deux génératrices du plan de symétrie uSv en A et A′, extrémités du grand axe de l'ellipse Γ. Il existe deux sphères ω et ω′ inscrites dans le cône et tangentes en F et F′ au plan P. Ces

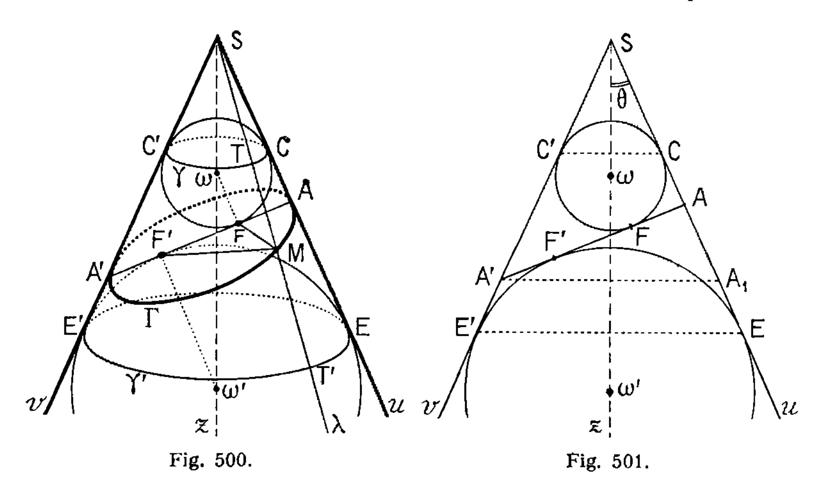


Fig. 500. Fig. 501.

sphères sont situées de part et d'autre du plan P et leurs cercles de contact γ et γ′, de diamètres CC′ et EE′ coupent la génératrice SM en deux points T et T′ de part et d'autre de M. Comme MT = MF et MF′ = MT′ on a :

$$MF + MF' = MT + MT' = TT' = CE.$$

L'ellipse Γ *admet pour foyers les points de contact* F *et* F′ *des sphères inscrites au cône et tangentes à son plan. Son grand axe* AA′ *est égal au segment déterminé sur une génératrice du cône par les cercles de contact de ces sphères.*

D'autre part (fig. 501) désignons par A_1 le point où la parallèle à CC' menée par A' coupe la génératrice SA. Les égalités AF = AC, A'F' = A'E' et AA' = CE montrent que les deux divisions AFF'A' et CAA_1E sont égales. Par suite on a :

$$AA_1 = FF' = 2c \qquad \text{et} \qquad |SA - SA'| = |SA - SA_1| = AA_1 = 2c.$$

• **584. Problème.** — ***Placer une ellipse donnée sur un cône de révolution donné.***

Remarquons d'abord que si le problème admet une solution il en admet une infinité. En effet si une ellipse Γ, égale à l'ellipse donnée, est située sur le cône S il en est de même de toutes celles qui s'en déduisent par rotation autour de l'axe Sz du cône et par symétrie par rapport au sommet S de ce cône.

Construisons la figure 501 connaissant l'angle $uSv = 2\theta$ et les éléments de Γ. Dans le triangle $AA'A_1$ de hauteur AH, on connaît deux côtés $AA' = 2a$, $AA_1 = 2c < 2a$ et l'angle AA_1A' égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$. On peut construire ce triangle (fig. 502), problème qui admet une solution unique car $AA' > AA_1$. La médiatrice zz' de $A'A_1$ coupe le prolongement de A_1A

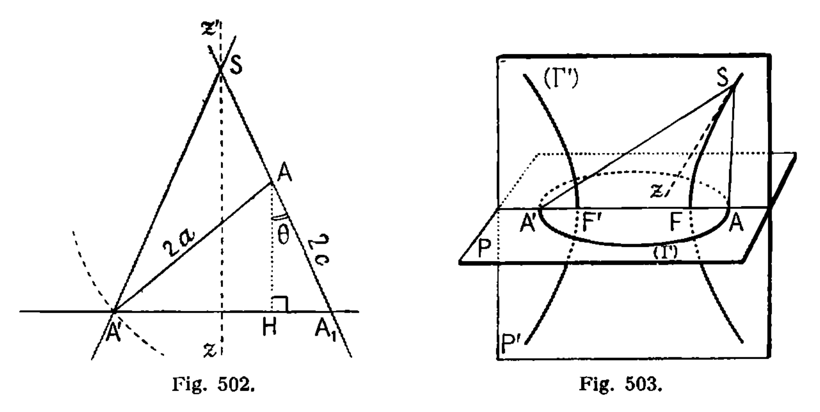


Fig. 502. Fig. 503.

en un point S tel que ASA' = 2θ. Le cône de révolution de sommet S, d'axe Sz et de génératrice SA est égal au cône donné. Le plan P, issu de AA' et perpendiculaire au plan ASA', coupe ce cône suivant une ellipse de grand axe $AA' = 2a$, de distance focale $AA_1 = 2c$, égale à l'ellipse donnée.

On peut donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône de révolution donné.

• **585. Cônes de révolution contenant une ellipse donnée.** — Soit Γ une ellipse de foyers F et F' et de grand axe AA', située dans un plan P (fig. 503). Le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ appartient au plan P' perpendiculaire au plan P suivant AA' et (n° 583) vérifie la relation :

$$|SA - SA'| = FF' = 2c.$$

Le point S appartient donc à l'hyperbole Γ' du plan P', de foyers A et A' et de sommets F et F'.

Réciproquement soit S un point quelconque de l'hyperbole Γ' et Sz la tangente en S, bissectrice intérieure de l'angle ASA'. Le cône de révolution de sommet S, d'axe Sz et d'angle au sommet ASA' coupe le plan P suivant une

ellipse de sommets A et A' et dont la distance focale $|SA - SA'|$ est égale à FF'. Cette ellipse coïncide avec Γ. Autrement dit :

Le cône de sommet S et de directrice Γ est un cône de révolution.

• **586. Définition.** — ***Une ellipse et une hyperbole sont dites focales lorsqu'elles sont situées dans deux plans perpendiculaires et telles que les foyers de l'une soient les sommets de l'axe focal de l'autre.***

Il est clair que l'une de ces deux courbes est déterminée dès que l'on connaît l'autre. On peut donc énoncer le théorème :

Le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une ellipse Γ ***est l'hyperbole focale*** Γ'.

Notons que l'hyperbole Γ' est aussi l'enveloppe des axes des cônes de révotion contenant Γ.

• **587. Section hyperbolique.** — Dans ce cas (fig. 504) on a $\varphi < \theta$. Le plan sécant P coupe les deux génératrices Su et Sv en deux points A et A' n'appartenant pas à une même nappe du cône. Il existe encore deux sphères ω et ω' inscrites dans le cône et tangentes en F et F' au plan P. Ces deux sphères étant

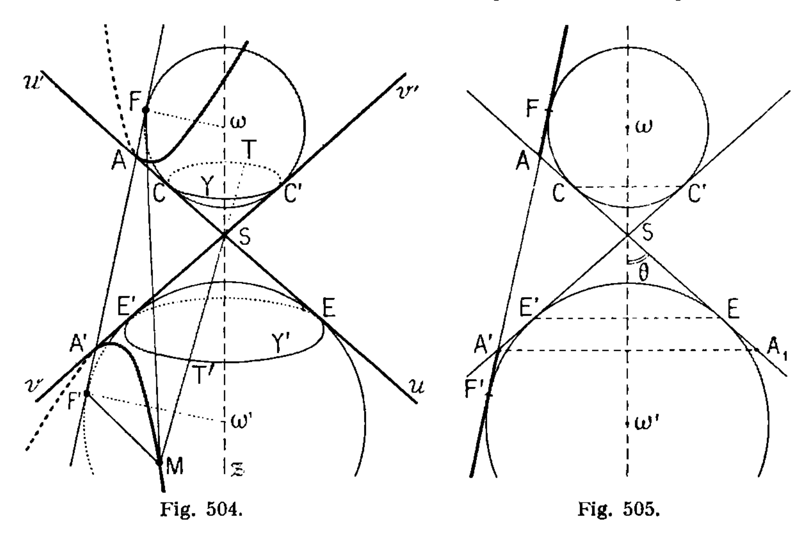


Fig. 504. Fig. 505.

situées d'un même côté du plan P, leurs cercles de contact γ et γ' de diamètres CC' et EE' coupent la génératrice SM en deux points T et T' situés d'un même côté du point M. Comme MF = MT et MF' = MT' on obtient :

$$|MF' - MF| = |MT' - MT| = TT' = CE.$$

L'hyperbole Γ *admet pour foyers les points de contact* F *et* F' *des sphères inscrites dans le cône* S *et tangentes au plan* P. *Son axe focal* AA' *est égal au segment déterminé sur une génératrice du cône par les cercles de contact de ces sphères.*

Désignons (fig. 505) par A_1 le point où la parallèle à CC′, issue de A′, coupe la génératrice SA. Les égalités $AA' = CE$, $AF = AC$ et $A'F' = A'E' = A_1E$ montrent que les deux divisions FAA′F′ et $ACEA_1$ sont égales. Par suite

$$AA_1 = FF' = 2c \quad \text{et} \quad SA + SA' = SA + SA_1 = AA_1 = 2c.$$

● **588. Problème.** — ***Placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné.***

Remarquons d'abord comme au n° 584 que lorsque ce problème admet une solution, il en admet une infinité.

Construisons la figure 505 connaissant l'angle $A'SA_1 = 2\theta$ et les éléments de Γ. Dans le triangle AA_1A' de hauteur AH on connaît deux côtés $AA' = 2a$, $AA_1 = 2c > 2a$ et l'angle $AA_1A' = \frac{\pi}{2} - \theta$. On peut toujours construire le triangle rectangle AHA_1 (fig. 506) et placer le point A′ si le cercle A (2a) coupe la droite A_1H c'est-à-dire si :

$$2a \geqslant AH = 2c\cos\theta \quad \text{donc si} \quad a \geqslant c\cos\theta \qquad (1)$$

(On obtient en général deux positions pour A′ mais on peut se borner, en supposant $SA \leqslant SA'$, à celle pour laquelle l'angle $AA'A_1$ est inférieur ou égal à un droit). Comme $AA' < AA_1$, la médiatrice zz' de $A'A_1$ coupe le segment AA_1 en un point S tel que $\widehat{A'SA_1} = 2\theta$. Le cône de révolution de sommet S, d'axe Sz et de génératrice SA est égal au cône donné. Le plan P, issu de AA′ et perpendiculaire au plan ASA′, coupe ce cône suivant une hyperbole Γ d'axe focal $AA' = 2a$, de distance focale $AA_1 = 2c$, égale à l'hyperbole donnée.

Soit 2α l'angle des asymptotes de cette hyperbole. Comme $a = c\cos\alpha$ (n° 477) la condition de possibilité (1) s'écrit : $c\cos\alpha \geqslant c\cos\theta$ c'est-à-dire : $\alpha \leqslant \theta$.

Pour qu'on puisse placer une hyperbole sur un cône de révolution donné, il faut et il suffit que l'angle de ses asymptotes soit au plus égal à l'angle au sommet du cône.

Si $\alpha = \theta$, le plan de l'hyperbole est parallèle à un plan méridien du cône.

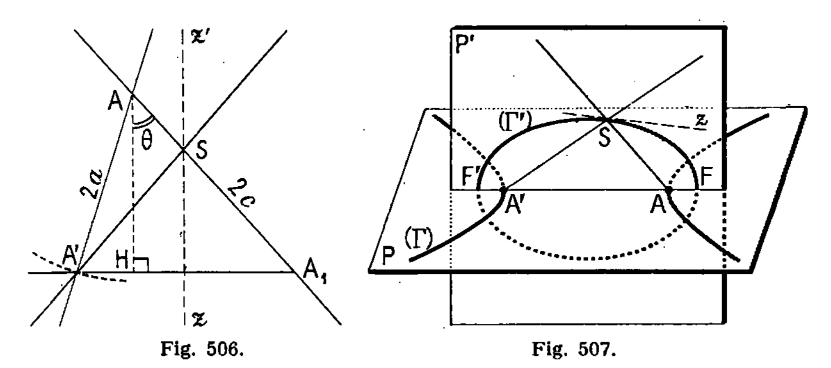


Fig. 506. Fig. 507.

● **589. Cônes de révolution contenant une hyperbole donnée.** — Soit Γ une hyperbole de foyers F et F′, d'axe focal AA′, située dans un plan P (fig. 507). Le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ se trouve dans le plan P′ perpendiculaire au plan P suivant AA′ et on doit avoir (n° 587) :

$$SA + SA' = FF' = 2c.$$

Le point S appartient donc à l'ellipse Γ′ focale de l'hyperbole Γ (n° 586).

Réciproquement le cône de révolution ayant pour sommet un point quelconque S de cette ellipse Γ′, pour axe la tangente Sz à Γ′ et pour génératrices SA et SA′, coupe le plan P suivant une hyperbole de sommets A et A′ et de distance focale SA + SA′ = FF′. Cette hyperbole coïncide avec Γ.

Le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une hyperbole Γ est l'ellipse focale Γ′.

L'ellipse Γ′ est aussi l'enveloppe des axes des cônes de révolution qui contiennent l'hyperbole Γ.

• **590. Section parabolique.** — Dans ce cas (fig. 508) on a $\varphi = \theta$ et MF = MH. La section Γ est la parabole de foyer F, de directrice D et de paramètre p = FK. Le plan P de Γ est parallèle à la génératrice Sv du cône et il en est de même de l'axe Ax de la parabole Γ. Il n'y a cette fois qu'une seule sphère ω, inscrite dans le cône et tangente au plan P car l'axe Sz du cône est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle SAx. Cette sphère qui touche le cône suivant le cercle γ, est tangente en F à Ax, en C à Su, en C′ à Sv. Le triangle SωA est rectangle en ω et (fig. 509) on en déduit que :

$$SC = SC' \quad ; \quad AC = AF = \frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad \widehat{A\omega F} = \theta.$$

Remarquons que SC′ et MH étant parallèles, les points C′, T et H sont alignés sur l'intersection du plan SC′M et du plan du cercle γ. Comme ST = SC′ les deux triangles semblables STC′ et MTH sont isocèles. On a donc MT = MH et on retrouve ainsi l'égalité MF = MT = MH.

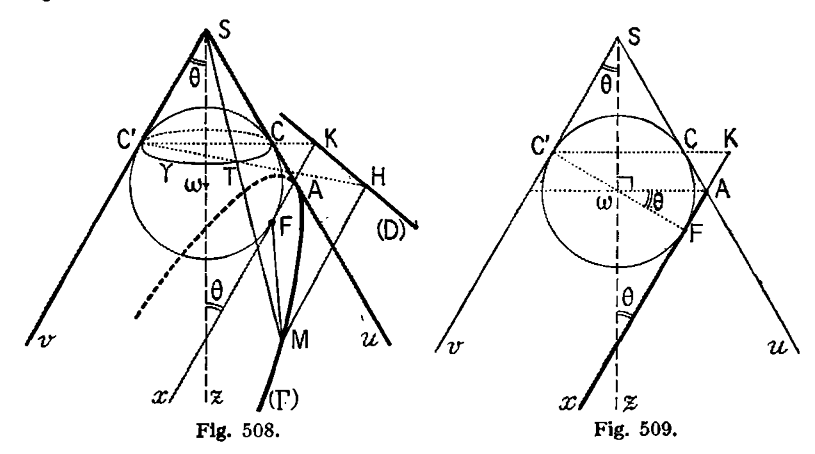


Fig. 508. Fig. 509.

• **591. Problème.** — ***Placer une parabole donnée sur un cône de révolution donné.***

Comme aux n°s 584 et 588 on voit que lorsque ce problème admet une solution, il en admet une infinité. Construisons la figure 509 connaissant l'angle au sommet 2θ du cône donné et le paramètre p de la parabole Γ. Déterminons d'abord le triangle rectangle ωAF dans lequel AF = $\frac{p}{2}$ et $\widehat{A\omega F} = \theta$, puis le cercle de centre ω tangent en F à AF. La

tangente AC et la tangente en C′, parallèle à AF, se coupent en S. Le cône de révolution d'axe Sω et de génératrices SC et SC′ est égal au cône donné. Le plan P, issu de AF et perpendiculaire au plan ASω, coupe ce cône suivant une parabole de foyer F et de sommet A égale à la parabole donnée Γ :

On peut toujours placer une parabole sur un cône de révolution donné.

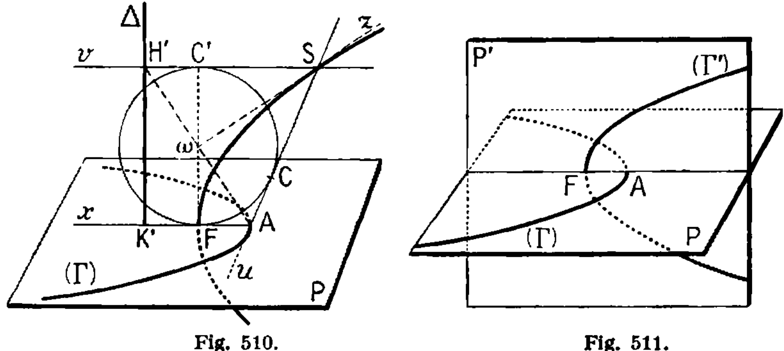


Fig. 510. Fig. 511.

• 592. Cônes de révolution contenant une parabole donnée. — Soit Γ une parabole de foyer F et de sommet A située dans un plan P (fig. 510). Le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ se trouve dans le plan P′ perpendiculaire au plan P suivant l'axe A*x* de la parabole Γ. Désignons par ω le cercle tangent en F à A*x* et en C et C′ aux génératrices S*u* et S*v* du cône S situées dans le plan P′. L'angle AωS étant droit, la droite Aω coupe S*v* en un point H′ symétrique de A par rapport à Sω. Le point H′ appartient à la droite Δ perpendiculaire au plan P en K′ symétrique de A par rapport à F. Comme d'autre part SA = SH′ le point S est équidistant de A et de Δ. Il appartient donc à la parabole Γ′ de foyer A et de directrice Δ.

Réciproquement soit S un point quelconque de Γ′ se projetant en H′ sur Δ. Le milieu ω de AH′ se projette en F sur A*x* et appartient à la bissectrice intérieure S*z* de l'angle ASH′. Il est donc équidistant de A*x*, SH′ et SA et le cercle de centre ω, tangent en F à A*x*, est tangent à SH′ et SA. Le cône de révolution d'axe S*z* admettant SA et SH′ pour génératrices est coupé par le plan P suivant une parabole de foyer F et de sommet A, c'est-à-dire suivant la parabole Γ. Les paraboles égales Γ et Γ′, de même axe A*x*, situées dans deux plans perpendiculaires et telles que le foyer de l'une soit le sommet de l'autre sont dites *focales* l'une de l'autre (fig. 511). Il en résulte que :

***Le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une parabole* Γ *est la parabole focale* Γ′.**

Remarquons que l'axe S*z* du cône S est la tangente en S à Γ′. Cette parabole est donc l'enveloppe des axes des cônes de révolution contenant Γ.

• 593. Sections planes d'un cylindre de révolution. — Les méthodes utilisées aux nos 581 et 583, pour le cône s'appliquent au cas d'un cylindre de révolution.

La figure formée par un cylindre de révolution d'axe *z′z* et un plan P coupant les génératrices sous l'angle aigu φ, admet pour plan de symétrie le plan méri-

dien issu de $z'z$ et perpendiculaire au plan P (fig. 512). Ce plan de symétrie contient les génératrices $u'u$ et $v'v$ qui coupent le plan P en A et A'. La droite AA' est la projection de $z'z$ sur le plan P et fait avec $z'z$ l'angle φ.

L'axe $z'z$ coupe la bissectrice intérieure de l'angle A'Au en un point ω, cenetre d'une sphère tangente en F au segment AA', en C à Au et en C' à A'v. Cette sphère, tangente en F au plan P, est inscrite dans le cylindre suivant un cercle γ de diamètre CC' et dont le plan (π) est perpendiculaire au plan de symétrie Azz'. Les deux plans P et (π) se coupent suivant une droite D perpendiculaire en K à AA' et à CC'.

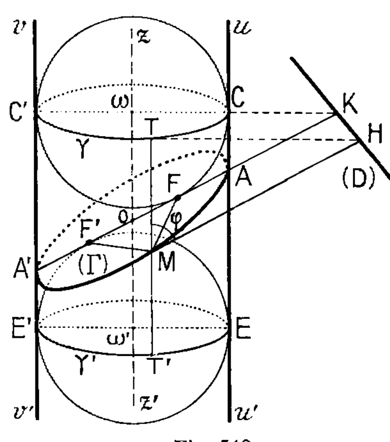


Fig. 512.

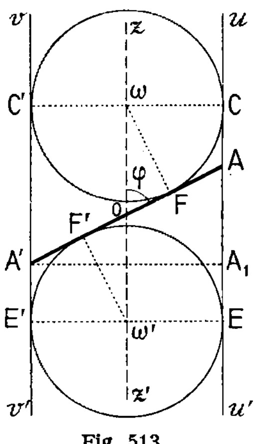


Fig. 513.

Tout point M commun au cylindre et au plan P appartient à une génératrice $y'y$ coupant le cercle γ en T. Le point M se projette en T sur le plan (π), en H sur la droite D et l'angle aigu en M du triangle rectangle MTH est égal à φ, d'où : MT = MH cos φ. Or MT = MF comme tangentes issues de M à la sphère ω. On en déduit que : MF = MH cos φ ou $\frac{MF}{MH} = \cos\varphi$.

Le point M *appartient donc à l'ellipse* Γ *de foyer* F, *de directrice* D *et d'excentricité* : $e = \cos\varphi$.

Tout point M de cette ellipse Γ fait partie de l'intersection car le plan Mzz' contient deux génératrices du cylindre qui coupent le plan P en deux points distincts M_1 et M_2 de Γ. Le point M appartenant à Γ et à la droite M_1M_2 commune aux plans P et Mzz' coïncide avec l'un des deux points M_1 ou M_2.

• **594. Théorème.** — ***La section d'un cylindre de révolution par un plan coupant les génératrices sous un angle*** φ ***est une ellipse d'excentricité*** $e = \cos\varphi$.

Il est clair que le segment AA' = $2a$ est le grand axe de cette ellipse. D'autre part, il existe une deuxième sphère ω', symétrique de la sphère ω par rapport au milieu O de AA', tangente en F' au plan P et inscrite dans le cylindre suivant le cercle γ' de diamètre EE'. Les cercles γ et γ' étant situés de part et d'autre

du plan P, coupent la génératrice $\lambda'\lambda$ en deux points T et T' de part et d'autre de M. Comme MF' = MT', on en déduit que :

$$MF + MF' = MT + MT' = TT' = CE.$$

L'ellipse Γ *admet pour foyers les points de contact* F *et* F' *des sphères inscrites dans le cylindre et tangentes à son plan. Son grand axe* AA' = 2*a* *est égal au segment déterminé sur une génératrice du cylindre par les cercles de contact de ces sphères.*

Désignons par A_1, le point où la parallèle à CC', menée par A', coupe *uu'* (fig. 513). Les égalités AA' = CE, AF = AC et A'F' = A'E' = A_1E montrent que les divisions AFF'A' et CAA_1E sont égales. Donc $AA_1 = FF' = 2c$.

Dans le triangle rectangle AA_1A' on a d'autre part :

$\overline{A'A_1}^2 = \overline{A'A}^2 - \overline{AA_1}^2 = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$, donc $A'A_1 = 2b$.

Le petit axe de l'ellipse Γ *est égal au diamètre du cylindre.*

Cette dernière propriété résulte d'ailleurs du fait que le diamètre BB' du cylindre perpendiculaire en O au plan AO*z* est un axe de symétrie de la figure. Il coïncide avec le petit axe de l'ellipse Γ.

● **595. Remarques.** — 1° Une ellipse d'excentricité *e* ne peut par suite être placée sur un cylindre donné que si son petit axe est égal au diamètre du cylindre. Tout plan faisant avec l'axe de ce cylindre un angle φ tel que cos φ = *e* coupe alors le cylindre suivant une ellipse Γ égale à l'ellipse donnée.

2° Tout cylindre de révolution contenant une ellipse donnée Γ a un diamètre égal au petit axe de Γ. Son axe *z'z* passe par le centre O de Γ. Il se projette sur le plan P de cette ellipse suivant l'axe focal O*x* et fait avec O*x* un angle φ tel que $\cos\varphi = \frac{c}{a} = \frac{OF}{OA}$.

Il y a donc deux positions possibles pour z'z : ce sont les asymptotes de l'hyperbole focale de l'ellipse Γ (n° 586).

● **596. Propriétés projectives des coniques.** — Considérons une conique Γ intersection d'un plan P et d'un cône de révolution de sommet S. Désignons par γ la section de ce cône par un plan π perpendiculaire à son axe :

***La conique* Γ *est l'homologue du cercle* γ *dans la projection ou perspective de centre* S *du plan* π *sur le plan* P.**

Il en résulte qu'une conique possède toutes les propriétés du cercle qui se conservent en projection centrale. Citons le théorème du n° 97, les théorèmes de Pascal (n° 296) et de Brianchon (n° 391) ainsi que leurs corollaires relatifs aux quadrilatères ou triangles inscrits ou circonscrits à une conique.

La division harmonique se conservant en projection, on peut étendre aux coniques la définition des points conjugués (n° 335) et les propriétés des pôles et polaires (n° 337 à 352).

SUJETS D'EXAMEN

— Sections planes d'un cône de révolution. (*Aix* ME et MT.)
— Sections planes d'un cylindre de révolution. (*Buenos Aires*, ME.)
— Sections d'un cône de révolution par un plan parallèle à un plan tangent au cône. (*Alger* ME et MT.)

EXERCICES

● **785.** On considère un cône de révolution S et un point fixe intérieur F.
1° Déterminer les coniques de foyer F situées sur le cône.
2° Discuter la nature des coniques trouvées et trouver le lieu des foyers des paraboles situées sur le cône.

● **786.** On donne un cône de révolution et une droite Δ orthogonale à l'axe du cône.
1° Déterminer les coniques de directrice Δ situées sur le cône.
2° Etudier la nature des coniques trouvées.

● **787.** 1° Soit θ le demi-angle au sommet d'un cône de révolution S. Déterminer l'angle φ que fait avec l'axe de ce cône un plan P coupant le cône suivant une hyperbole équilatère. Discuter.
2° Lieux des foyers des hyperboles équilatères situées sur S.

● **788.** Un plan P coupe un cône de sommet S suivant une conique Γ qui se projette suivant une courbe Γ' sur le plan π perpendiculaire en S à l'axe du cône Démontrer que Γ' est une conique de foyer S. Préciser sa directrice et son excentricité.

● **789.** Deux cônes de révolution ont leurs sommets S et S' dans un plan perpendiculaire à la direction commune de leurs axes. On désigne par α et β les demi-angles au sommet de ces cônes.
1° Montrer que la projection de l'intersection Γ de ces deux cônes sur le plan P est en général un cercle.
2° Etudier le cas où $\alpha = \beta$ et déterminer dans ce cas la courbe Γ.

● **790.** 1° Trouver le plan d'une conique Γ située sur un cône de révolution donné connaissant son centre O.
2° Démontrer que deux cônes de révolution égaux dont les axes sont parallèles se coupent suivant une conique dont on précisera le centre et le plan.

● **791.** Deux cônes de révolution S et S' sont circonscrits à une même sphère Σ suivant les cercles γ et γ'.
1° Montrer que tout point M commun à S et à S' est le centre d'une sphère orthogonale à la sphère Σ suivant un cercle μ tangent à γ et à γ'. Réciproque?
2° En déduire que le point M appartient au plan polaire par rapport à Σ de l'un ou l'autre des centres d'inversion I ou J des cercles γ et γ' et montrer que le lieu de M se compose de deux coniques Γ et Γ'.

● **792.** Un cône de sommet S est coupé suivant une hyperbole par un plan P parallèle aux génératrices $S\lambda$ et $S\mu$.
1° Les droites $S\lambda$ et $S\mu$ sont les directions asymptotiques de Γ et le plan $MS\lambda$ coupe le plan P suivant une droite $M\lambda'$ parallèle à $S\lambda$.
2° En déduire que les asymptotes de Γ sont les intersections du plan P par les plans tangents au cône S suivant $S\lambda$ et $S\mu$.

● **793.** Une sphère Σ et un plan P sont tangents en F. On considère les cônes de révolution de sommets S circonscrits à la sphère Σ et coupés par le plan P suivant une conique Γ de centre O donné.
1° Lieu géométrique du centre ω de la deuxième sphère inscrite dans le cône et tangente au plan P. Lieu du point S?
2° Limiter les lieux précédents et distinguer sur le lieu de S les points pour lesquels la conique Γ est une ellipse ou une hyperbole.

● **794.** Une sphère Σ et un plan P sont tangents en F. On considère les cônes de révolution de sommets S circonscrits à la sphère Σ et coupant le plan P suivant une conique tangente à deux droites données D_1 et D_2.
1° Montrer que les cônes S sont tangents à deux plans fixes et trouver le lieu de leurs sommets.
2° En déduire le lieu du second foyer F' de la conique Γ et celui du centre de la sphère ω' tangente en F' au plan P et inscrite dans le cône.

● **795.** On considère une sphère Σ, un plan fixe P non tangent à Σ et dans ce plan un point fixe F.

1° Lieu des sommets S des cônes circonscrits à Σ et coupant le plan P suivant une conique Γ admettant F pour foyer.

2° Lieu des centres des sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan P.

● **796.** 1° Un point M décrit une conique Γ de foyer F et soient S et S' deux point de la conique focale Γ'. Démontrer que l'une des expressions $|MS - MF|$ ou $(MS + MF)$ est constante et qu'il en est de même de $|MS - MS'|$ ou $(MS + MS')$. Distinguer, suivant les positions de F, S et S' sur Γ'.

2° Démontrer que si A et C appartiennent à Γ, B et D à la conique focale Γ', la somme de deux côtés du quadrilatère ABCD est égale à la somme des deux autres.

● **797.** On donne un cône de révolution S coupé par un plan P suivant une conique Γ. Une sphère quelconque Σ, inscrite dans le cône suivant le cercle γ, coupe le plan P suivant un cercle ω et le plan de γ coupe le plan P suivant une droite Δ. D'un point variable M de Γ on mène la tangente MT au cercle ω et on projette M en H sur Δ.

1° Montrer que $MT = e\,MH$ (où e désigne l'excentricité de Γ). Les cercles ω obtenus en faisant varier Σ sont les *cercles focaux* de première espèce de la conique Γ.

2° Si la droite Δ coupe le cône S en A et B, le cercle ω correspondant est bitangent en A et B à la conique Γ.

3° Soient MT et MT' les tangentes à deux cercles focaux ω et ω' et d la distance des droites Δ et Δ' correspondantes. Montrer que l'on a : $MT + MT' = ed$ ou $|MT - MT'| = ed$ suivant que M est compris entre les droites Δ et Δ' ou non.

● **798.** Une sphère variable S de centre ω passe par deux points fixes A et B et est tangente en M au plan fixe P.

1° Trouver le lieu (C) du point M et le lieu (Γ) du point ω.

2° Montrer que le cercle γ passant par A, B, et M est tangent en M au plan P et que l'enveloppe de l'axe Δ de ce cercle est la courbe Γ.

● **799.** Reprendre le problème précédent en remplaçant le plan P par une sphère Σ.

● **800.** On considère une sphère fixe (Σ_0) et on envisage les sphères (S) de centre ω tangentes à (Σ_0) et invariantes dans chacune de deux inversions données de centres I et J.

1° Montrer que les sphères S sont orthogonales à toutes les sphères d'un faisceau de sphères Φ.

2° Trouver le lieu des points de contact M des sphères (S) avec (Σ_0) et le lieu Γ des centres ω de ces sphères.

3° Démontrer qu'il existe une infinité de sphères Σ tangentes à toutes les sphères S et orthogonales aux sphères d'un faisceau Φ' (on pourra procéder par inversion). Etablir que le lieu Γ' des centres des sphères Σ est la conique focale de Γ.

● **801.** 1° Démontrer que toute sphère tangente à deux sphères O_1 et O_2 est invariante dans l'une des inversions échangeant ces deux sphères.

2° Déduire de l'exercice précédent que le lieu des centres des sphères tangentes à trois sphères données O_1, O_2 et O_3 se compose, dans le cas le plus favorable, de quatre coniques Γ. Montrer que les plans de ces coniques sont issus de l'axe radical des trois sphères et que leurs axes focaux sont concourants dans le plan $O_1O_2O_3$.

3° Montrer que les coniques Γ', focales des coniques Γ, passent par O_1, O_2 et O_3. Que représentent les foyers des coniques Γ' pour les grands cercles des sphères données situés dans le plan de leurs centres?

● **802.** Une courbe Γ est la projection centrale (ou perspective) sur un plan d'un cercle ou d'une conique donnée γ.

1° Démontrer que les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à Γ se coupent au point de rencontre des droites joignant les points de contact des côtés opposés.

2° Soit A le point commun aux tangentes en B et C à Γ. Une tangente variable à Γ coupe AB en M et AC en N. Démontrer que l'expression $\dfrac{\overline{MA}.\overline{NA}}{\overline{MB}.\overline{NC}}$ est une constante k et en déduire (cf. exercice 771) que *toute projection sur un plan d'un cercle ou d'une conique est une conique.* Etudier le cas où $k = 1$.

3° Soit D le point de contact de MN avec Γ. Démontrer que MN est la polaire de A par rapport à DB et DC et établir qu'une conique est définie par trois points et les tangentes en deux de ces points.

● **803.** Une conique Γ est définie par trois de ses points A, B et C et le point ω commun aux tangentes en A et B. On construit la tangente CT, polaire de ω par rapport aux droites CA et CB. (cf. exercice 802).

1° Justifier le construction suivante par points et tangentes de Γ : on mène par ω une sécante arbitraire coupant CA, CB et CT en α, β et t. Les droites Aβ et Bα se coupent en un point M de Γ et la droite Mt est la tangente en M à Γ.

2° Construire le point D diamétralement opposé à C sur Γ et le centre O de Γ et achever la détermination des foyers de Γ.

3° Montrer que les diagonales du quadrilatère dont les côtés consécutifs sont les tangentes en A, C, B et M à Γ se coupent au point I commun à AB et à CM.

4° Montrer que l'on peut déterminer le point ω connaissant les cinq points A, B, C, D et E de Γ et que l'on peut, connaissant cinq tangentes à Γ, déterminer la droite AB joignant les points de contact de deux d'entre elles. (On peut aussi utiliser les théorèmes de Pascal et de Brianchon relatifs à un pentagone inscrit ou circonscrit). En déduire qu'*une conique est définie par cinq points ou par cinq tangentes.*

● **804.** On considère un triangle ABC. Le cercle inscrit de centre I, de rayon r, est fixe. Il est tangent en F au côté BC dont le support est fixe. Le sommet A décrit une droite D parallèle au côté BC. La hauteur, constante, relative à BC est égale à h.

1° Démontrer que, pour tous les triangles ABC ainsi définis, il existe un rapport constant entre le demi-périmètre p et la longueur a du côté BC (on pourra utiliser l'aire du triangle ABC). En déduire la valeur du produit FB.FC en fonction de r et de h (cette valeur est constante).

2° On fait tourner autour de IF le cercle inscrit et la tangente en F, engendrant ainsi une sphère S et un plan P. On considère les cônes de sommet A tangents à la sphère S. Quelle est la nature des sections de ces cônes par le plan P? En préciser les éléments.

3° On revient à la figure primitive. Sur le cercle (O) de centre O, circonscrit au triangle ABC, on désigne par M le milieu de l'arc BC ne contenant pas le point A. Montrer que le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A a une valeur constante. En déduire le lieu du point M.

4° Montrer que le cercle (O) est tangent à un cercle fixe, passant par F, lui-même tangent à D (on pourra utiliser une inversion de pôle F).

5° Quel est le lieu géométrique du point O? *(Caen.)*

● **805.** Par un point O pris dans un plan (P) on mène une droite OD dans le plan et la perpendiculaire ON en O au plan (P). *Ces deux droites sont supposées fixes dans tout ce qui suit.*

1° On considère le cône (S) de révolution de sommet O, d'axe OD et dont le demi-angle au sommet est noté x. Déterminer la nature de la conique (H) section du cône (S) par le plan (Q) parallèle au plan (P) et coupant ON en O' tel que OO' $= h$ et $h = c \sin x$, : désignant une longueur donnée et fixe. Quel est le lieu des foyers F et F' de (H) quand, c restant fixe, x varie?

2° M étant un point quelconque de (H), calculer la longueur OM $= r$ en fonction de c et du cosinus de l'angle aigu y que fait avec ON le plan (R) passant par OD et M. En déduire que le lieu du point M, lorsque x varie, le plan (R) restant fixe, est un cercle (C) dont la projection orthogonale sur le plan (P) est une ellipse (E). Préciser la position des foyers G et G' de (E).

3° Démontrer que la tangente MT en M à (H) est perpendiculaire à la tangente MT' en M au cercle (C).

4° m désignant la projection orthogonale de M sur le plan (P) montrer que le produit des distances de G et G' à la normale en m à (E) est égal à h^2 et en déduire que le dièdre d'arête MT et dont les faces passent respectivement par G et G' est droit. *(Guyane.)*

● **806.** On donne un plan (P), un point F à une distance p du plan (P) ($p \neq 0$) et l'on considère les sphères (S) passant par F et tangentes au plan (P).

1° Construire (S) connaissant le point de contact. Quel est le lieu géométrique des centres des sphères (S) situés dans un plan (Q) passant par F et perpendiculaire au plan (P)? En déduire une génération simple de la surface (γ) lieu des centres de toutes les sphères (S). Déterminer les sections de cette surface par des plans parallèles à (P).

2° On considère les sphères (S) dont les centres sont situés dans un plan (λ) passant par F :

a) Lieu des points de contact de ces sphères et du plan (P).

b) Montrer que le lieu des centres de ces sphères est une ellipse (E). Que représente cette ellipse pour la surface (γ)?

3° Calculer les longueurs des axes et l'excentricité de l'ellipse (E) en fonction de p et de l'angle u du plan (λ) et du plan (P) $\left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right)$.

4° Déterminer la section de la surface (γ) par un plan donné quelconque (λ') non parallèle à (P). Lieu du centre de cette section quand le plan (λ') se déplace parallèlement à un plan fixe. *(Lyon.)*

● **807.** α) Sur la circonférence d'un cercle, de centre I et de rayon r, sont marqués cinq points : i, p, p', i', et O. Les quatre premiers sont des sommets successifs d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle; ces quatre points forment un trapèze isocèle dont les côtés non parallèles (ip et $i'p'$) concourent en un point S. Le cinquième point, O, est celui des deux points de la circonférence situé à l'intersection avec l'axe de symétrie OIS de la figure et tel que I soit compris à l'intérieur du segment OS.

Exprimer, en fonction du rayon r, la longueur $Op = Op' = a$; vérifier les relations

$$2r = a(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \qquad OS = a\sqrt{2}.$$

β) On considère la pyramide régulière SABCD dont la base est un carré ABCD de côté $2a$ et dont les faces sont quatre triangles équilatéraux.

1° Exprimer en fonction de a la hauteur SO = h du solide. Déterminer la sphère circonscrite, c'est-à-dire la sphère qui passe par cinq points S, A, B, C, D.

2° Il existe une sphère (O) tangente aux huit arêtes du solide, les points de contact étant situés sur ces arêtes non prolongées. Définir cette sphère par son centre et par son rayon.

3° Déterminer la sphère (de centre I et de rayon r) qui est située à l'intérieur du solide et qui est tangente aux faces et au plan de base. Vérifier que la relation entre r et a n'est autre que celle de la première partie du problème.

4° Les sphères (O) du 2° et (I) du 3° ont en commun un cercle dont on déterminera le centre P, le plan et le rayon en fonction de r. Que peut-on dire du cône ayant ce cercle pour base et le sommet en S? Quel est le second cercle d'intersection de ce cône et de la sphère (I)?

5° Les deux cercles d'intersection de la sphère (I) et du cône (S) précédent définissent une seconde surface conique de révolution dont la position du sommet S' sera précisée par rapport aux points I et P. On considère ensuite un plan tangent à ce nouveau cône (S') et l'on demande d'étudier l'ellipse (E) de section du premier cône (S) par ce plan. On exprimera (en fonction de r) les longueur des axes 2α et 2β, la distance focale 2γ de (E), ainsi que la distance d'un foyer F à la directrice qui lui est associée. *(Nancy.)*

PROBLÈMES DE RÉVISION

● **808.** On donne dans un plan P deux points fixes A et A'. On pose AA' = *d*.

1° Lieu géométrique des points M du plan tels que l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MA}$ soit constant. Ce lieu est en général un arc de cercle (Σ).

2° Lieu géométrique des points M du plan tels que le rapport $\frac{MA'}{MA}$ soit constant. Ce lieu est en général un cercle (Γ), dont on calculera le rayon en fonction de *d* et du rapport $\frac{MA'}{MA} = \lambda$. Montrer que le cercle (Γ) et l'arc (Σ) sont orthogonaux.

3° Par un point M donné du plan passent, en général, un arc de cercle (Σ) et un cercle (Γ).

On fait correspondre au point M le point M' *situé sur* (Σ) et tel que $\frac{M'A'}{M'A} = \frac{MA'}{MA} \times k$, *k* désignant un nombre positif donné différent de 1. Soit (T) la transformation ponctuelle ainsi définie.

Connaissant M, déterminer M'. Examiner le cas où M est situé sur la droite AA'.

Vérifier que les points doubles de la transformation (T) sont les points A et A'.

4° Pour étudier la transformation (T) on vous propose d'effectuer l'inversion de pôle A et de puissance $\overline{AA'}^2$.

Montrer que les cercles (Γ) et (Γ') qui passent respectivement par M et M' ont pour inverses deux cercles (γ) et (γ') de centre A'. Calculer les rayons des cercles (Γ) et (Γ') en fonction de *d*, de $\frac{MA'}{MA} = \lambda$ et de *k*. En déduire que le rapport des rayons des cercles (γ') et (γ) est constant et égal à *k*.

Placer les inverses *m* et *m'* des points M et M' et dire qu'elle est la transformation ponctuelle simple qui les fait correspondre. Lieu géométrique du point M' lorsque M décrit un cercle donné (G) du plan P. *(Poitiers).*

● **809.** 1° On considère dans un plan de cercle (C) et une droite (D); on appelle (F) le faisceau de cercles dont (D) est l'axe radical et dont (C) fait partie. Soit (Γ) la famille de cercles (γ), tangents à (D) et coupant (C) sous un angle constant α; on appellera ω le centre du cercle variable (γ) et M son point de contact avec (D). On désigne par I(M) l'inversion de pôle M et dont la puissance est égale à la puissance du point M par rapport à (C); il est recommandé de faire usage de cette transformation (variable avec le point M) dans tout le cours du problème.

a) Construire (γ), connaissant M et α. Discuter; nombre de solutions.

b) Montrer que l'inversion I(M) transforme chaque cercle (γ) en une de deux droites fixes, parallèles à D.

c) Montrer que si un cercle (γ) coupe un cercle (C_1) de (F) sous un angle α_1, tous les cercles de la famille (Γ) couperont (C_1) sous un angle fixe.

d) En déduire les enveloppes (autres que D) du cercle (γ).

e) Lieux des centres ω des cercles (γ).

2° On considère maintenant une droite fixe (Δ), parallèle à (D), et qui coupe (C) en deux points, A et B. On appelle A' et B' les seconds points d'intersection des sécantes MA et MB avec (C). M étant toujours un point de (D), on demande :

a) de trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle MA'B', lorsque M varie sur (D);

b) de trouver le lieu géométrique des centres de ces cercles. *(Grenoble).*

● **810.** On donne un cercle (O) de centre O et un point F intérieur. Soient (M) les cercles de centre M passant par F et tangents en I au cercle (O); FI recoupe (O) en I_1 et K est la projection de F sur la tangente en I_1 à O.

1° Démontrer :

a) sans utiliser l'inversion,

b) en utilisant une certaine inversion de pôle F, que OI_1 est parallèle à MF et que $2\ FK \times FM = FI \times FI_1$.

2° Soit T le pôle de FI par rapport au cercle (M); on désigne par (T) le cercle de centre T et de rayon TF. Y a-t-il un deuxième cercle (M) auquel corresponde le même cercle (T)? Démontrer :

a) sans utiliser l'inversion,

b) en utilisant la même inversion que précédemment, que les cercles (T) appartiennent à un faisceau de cercles quand le cercle (M) varie.

3° Le lieu de M est une ellipse (Σ) dont on précisera les éléments : foyers et directrices.

4° Le cercle de centre I_1 passant par F recoupe (T) en E, les droites MT et OI_1 se coupent en E_1; démontrer que :

a) E, F et E_1 sont alignés;

b) I, T, E, I_1, E_1 sont sur un même cercle. *(Toulouse.)*

● **811.** Soient une droite fixe D et un point A non situé sur cette droite. On considère l'angle $(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}) = \alpha$, de grandeur constante, pivotant autour de son sommet A. La droite D est coupée respectivement aux points B et C par les axes AX et AY.

1° *a)* Lieu du centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC; lieu du centre I' du cercle exinscrit dans l'angle A de ce triangle.

b) Lieu du point de concours des tangentes en I et I' au lieu précédent.

2° *a)* La bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY})$ coupe la droite D en E. On considère la droite R, perpendiculaire en E à la bissectrice AE; elle coupe AX en M et AY en M'. Lieux des points M et M'.

b) Montrer que les lieux trouvés sont les asymptotes du lieu (1°, *a*) trouvé dans la première question. *(Lyon.)*

● **812.** On considère un segment BC et un point A non situé sur la droite BC. Un point M varie sur le segment BC et l'on porte sur BA, dans le sens $\overrightarrow{BA}$, une longueur BN = BM, sur CA, dans le sens $\overrightarrow{CA}$, une longueur CP = CM.

1° Montrer que lorsque M varie, l'angle NMP reste constant et que le centre F du cercle circonscrit au triangle NMP est un point fixe.

2° Démontrer que les quatre points A, N, P, F sont sur un même cercle et trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque M décrit le segment BC.

3° En déduire les positions des points M, N, P pour lesquelles le segment NP a une longueur minimum;

4° Démontrer que la droite NP reste tangente à une parabole de foyer F. Préciser la tangente au sommet de la parabole, son axe et les tangentes remarquables éventuelles, ainsi que leurs points de contact. *(Athènes.)*

● **813.** On considère une demi-circonférence (C) de diamètre AB = $2a$. Un point M décrit le segment AB. On trace, à l'intérieur de (C), les demi-circonférences de diamètres MA et MB; on mène leur tangente commune extérieure, qui les touche en α et β respectivement.

1° Démontrer que les droites $A\alpha$ et $B\beta$ se rencontrent en un point P situé sur (C). Lieu du milieu Q du segment $\alpha\beta$.

2° On trace la circonférence de diamètre PM, qui rencontre (C) en P et R. Démontrer que les droites PR et $\alpha\beta$ se rencontrent sur la droite AB.

3° On trace la circonférence de centre P et de rayon PM. Quel est l'axe radical de cette circonférence et de (C)?

4° On trace la circonférence (ω) tangente à AB en M et tangente à (C). Lieu de son centre ω? *(La Réunion.)*

● **814.** On donne un diamètre A'D d'un cercle (A) de centre A (de rayon R) et un point I du segment AD $\left(AI = \frac{R}{3}\right)$. Une droite variable passe par I et coupe (A) en M et N.

1° Les tangentes en M et N au cercle (A) se coupent en E. Lieu du point E.

2° Dans l'inversion (I) de centre I et de puissance $\overline{IA} \times \overline{IA'}$, les inverses de M et N sont respectivement M' et N'. Quel est le lieu (B) de ces points? Précisez la position de son centre B.

3° Les tangentes en M' et N' au lieu (B) se coupent en F. Montrez que E, I, F sont alignés. Lieu de F. Précisez en quel point ce lieu coupe la droite AA'.

4° Montrez qu'il existe un cercle (C) de centre C tangent en M au cercle (A) et en M' au cercle (B). Montrez que, quand M varie, ce cercle (C) reste orthogonal à un cercle fixe.

5° Quel est le lieu du point C? *(Besançon.)*

● **815.** 1° Une conique étant définie par son cercle principal (O) et l'un de ses foyers F, comment faut-il choisir les données pour que cette conique soit une hyperbole équilatère? Construire, dans ce cas, le deuxième foyer, les directrices et les asymptotes de cette hyperbole.

2° Étant donnés deux points fixes F et P, on désigne par (H) une hyperbole équilatère variable de foyer F dont le cercle principal (O) passe par P. Quels sont les lieux géométriques de son centre O et de son deuxième foyer?

Montrer que, Δ étant, pour cette hyperbole, la directrice associée au foyer F, les points d'intersection de cette droite Δ et du cercle (O) décrivent des cercles, et trouver l'enveloppe de chacune des asymptotes de l'hyperbole.

3° Montrer que l'hyperbole variable (H) reste tangente à une droite fixe D, et construire le point de contact, connaissant la position du centre O de l'hyperbole. *(Paris.)*

● **816.** Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point F du plan qui a pour coordonnées d et $d\sqrt{3}$ (d longueur donnée).

On considère les ellipses ayant F pour foyer et tangentes à Ox et Oy.

1° Lieux du deuxième foyer F' et du centre de ces ellipses. Montrer que leur petit axe reste tangent à une parabole.

2° On pose $OF' = x$. Calculer en fonction de d et de x les demi-axes de l'ellipse et son excentricité. Pour quelle valeur de x l'excentricité est-elle minimum?

3° Soient M et N les points de contact de l'ellipse avec Ox et Oy. Montrer que les bissectrices de l'angle MFN sont fixes. En déduire que la droite MN passe par un point fixe I. Montrer que la directrice associée à F passe par I. *(Nancy.)*

● **817.** On considère deux droites rectangulaires Ix et Iy et un point F de leur plan.

1° Soient (C) les coniques tangentes à ces deux droites et dont l'un des foyers est en F.

a) Quel est le lieu des centres de ces coniques?

b) Quel est le lieu de leur deuxième foyer F'?

Y a-t-il une parabole parmi les coniques (C)? On distinguera sur chacun des lieux *a*) et *b*), les parties qui correspondent à des ellipses et celles qui correspondent à des hyperboles.

2° Quelle est l'enveloppe de l'axe non focal des coniques (C)?

3° Démontrer qu'il existe, en dehors de I, un point fixe J tel que les tangentes à une conique (C) menées de ce point soient également rectangulaires; démontrer que les directrices associées à F des coniques (C) passent par un point fixe de la droite IJ.

4° Déterminer, parmi les coniques (C), une ou plusieurs coniques (s'il en existe) qui sont tangentes à une droite donnée D du plan. Soit (Γ) une telle conique.

5° On suppose que les points I et F et la droite D restant fixes, l'angle droit xIy prend toutes les positions possibles autour de I. Démontrer que, dans ces conditions, les cercles principaux des coniques (Γ) définies au 4° passent par deux points P et P' et que le milieu du segment FI se trouve sur PP'.

Démontrer que les coniques (Γ) restent toutes tangentes à une deuxième droite fixe D' autre que D.

6° Chercher à quelles conditions D et D' sont perpendiculaires l'une à l'autre (la droite D doit être tangente à une parabole dont on indiquera les éléments). *(Poitiers.)*

● **818.** Soient deux cercles (O) et (O'), de centres O et O', de rayons R et R' (avec $R < R'$), situés dans un même plan et tangents intérieurement en A. Soit D leur tangente commune.

1° D'un point P de D on mène les tangentes PT et PT' aux deux cercles (O) et (O') en T et T' respectivement. Montrer qu'il existe un cercle (I), de centre I, tangent aux deux cercles (O) et (O') en T et T'. Lorsque P décrit D, montrer que (I) reste orthogonal à un cercle fixe, que l'on construira. Trouver le lieu de I. Que représente la droite IP pour ce lieu?

2° Supposons P fixe sur D. Soit Q un autre point de D. On mène par Q des parallèles aux droites PT, PT' qui coupent respectivement (O) et (O') en MN et M'N'. Où doit se trouver Q pour que ces quatre points existent? Montrer qu'ils sont alors sur un cercle (γ), dont on déterminera le centre. Inversement, le cercle (γ) étant donné peut-on construire Q? Discuter.

3° A chaque point P de D, on associe un autre point Q de D tel que le cercle (γ) correspondant soit tangent intérieurement au cercle (O). Montrer que l'angle POQ est droit. Montrer qu'alors le cercle (γ) reste tangent à un deuxième cercle, que l'on déterminera.

4° On suppose maintenant Q fixe et P variable sur D. Le cercle (γ) correspondant à Q existe-t-il quel que soit P? Discuter. Montrer que les polaires de A par rapport à tous les cercles (γ) passent par un point fixe. Lieu du centre du cercle (γ).

(Nancy.)

● **819.** On considère un cercle fixe C de centre O et de rayon a, une droite fixe D passant par O, et sur cette droite un point fixe A à la distance $2a$ du point O. Un cercle variable Γ est tangent en A à D; on désigne par I son centre et par B celui de ses points qui est diamétralement opposé à A.

1° α et β désignant respectivement les angles AOI et IOB, trouver la relation qui existe, quel que soit Γ, entre $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\beta$. Pour quelle valeur de $\operatorname{tg}\alpha$ la valeur de $\operatorname{tg}\beta$ est-elle maximum? Construire l'angle α correspondant à cette valeur de $\operatorname{tg}\alpha$.

2° Soient E le point où le segment OI coupe C, F le point où la parallèle menée de E à D coupe OB, E' et F' les projections des points E et F sur D. Démontrer que F' est le milieu de OE'. Quelle ligne décrit, quand Γ varie, le point F?

3° Quelle doit être la puissance d'une inversion de pôle A pour que, dans cette inversion, le cercle C soit son propre inverse? La puissance d'inversion étant ainsi choisie et l'un des cercles Γ étant dessiné, construire l'inverse de ce cercle Γ. Application à la construction de ceux des cercles Γ qui sont tangents au cercle C.

4° Quelle doit être la puissance d'une inversion de pôle O pour que, dans cette inversion, n'importe quel cercle Γ soit son propre inverse? La puissance d'inversion étant ainsi choisie, quel est l'inverse du cercle C? Application à la construction de ceux des cercles Γ qui sont tangents au cercle C.

N. B. — Les quatre parties du problème sont indépendantes. *(Egypte.)*

● **820.** On donne une sphère (S) de centre O et de rayon R; deux plans tangents (f) et (m), dont les points de contact seront désignés par F et M, se coupent suivant une droite D. On appelle I le milieu du segment FM et H la projection de M sur D.

1° Montrer que la droite D est perpendiculaire au plan FOM. Quelle relation existe-t-il entre OI, OH et R?

2° M décrit un cercle donné (C) tracé sur (S). Le point F étant donné sur (S), déterminer la courbe (C') lieu de I et la courbe (Γ) lieu de H. Le cercle (C) étant fixé, où doit se trouver le point F pour que (Γ) soit une droite?

3° Déterminer, dans les mêmes conditions, la courbe (K) du plan (f) à laquelle la droite D reste tangente lorsque M décrit (C). Discuter la nature de (K) suivant la position de F sur (S). [On pourra laisser de côté le cas où F est sur le cercle (C)].

4° Montrer que, lorsque F n'est pas situé sur (C), la courbe (K) est la section par (f) du cône (ou cylindre) circonscrit à (S) le long de (C). Retrouver ainsi les résultats de la discussion précédente (question n° 3). *(Strasbourg.)*

● **821.** 1° Construire un trapèze isocèle ABCD, connaissant la longueur $2l$ de AB et sachant que BC, CD, DA sont égaux et ont pour longueur a.

2° l étant fixé ainsi que les points A et B, montrer que le lieu de C quand a varie est une branche d'hyperbole (H). Construire les foyers, les directrices, les asymptotes de (H). Quel est l'angle de AB avec une asymptote?

3° Montrer que le lieu de (C) peut être défini de façon *équivalente* par la propriété suivante : l'angle géométrique ABC est le double de l'angle géométrique BAC. Trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ABC quand C varie.

4° Montrer qu'en cherchant les points d'intersection de (H) avec un cercle convenable on peut déterminer un angle égal au tiers d'un angle donné.

On ne demande pas de construire les points d'intersection.

5° En utilisant la définition de (H) au 3°, indiquer à quelle propriété analogue est rattachée la seconde branche de l'hyperbole (H). *(Lille.)*

● **822.** Une parabole (P) varie en gardant fixe sa directrice D et en passant par un point fixe A.

1° Déterminer les lieux :

a) du foyer F;

b) du sommet S;

c) des intersections N et T de l'axe de (P) avec la normale et la tangente en A à (P).

2° Trouver la courbe (Π), lieu du second point d'intersection B de (P) avec la droite AF. Montrer que (P) et (Π) sont tangentes en B.

3° Déterminer la parabole (P) pour qu'elle passe par un second point donné M. Discuter suivant les positions de M : on montrera que l'existence et le nombre des solutions dépend de la position de M par rapport à une courbe que l'on précisera.

Montrer que chaque parabole (P) est tangente à cette courbe en un point que l'on déterminera et qu'en tout point de cette courbe passe une parabole (P) qui lui est tangente. *(Clermont.)*

● **823.** D'un point fixe O pris à l'intérieur d'une parabole donnée, de foyer F et de directrice Δ, on mène la parallèle D à son axe; soit P le point où elle coupe Δ.

1° Construire le point d'intersection I de la droite D avec la parabole, ainsi que la tangente (T) en I à cette dernière.

2° On considère un cercle variable C passant constamment par les points O et P; soient S_1 et S_2 les points où il coupe (T). Soient (T_1) et (T_2) les tangentes, autres que (T), menées des points S_1 et S_2 à la parabole donnée, M_1 et M_2 leurs points de contact, P_1 et P_2 les projections de M_1 et M_2 sur Δ. Démontrer que (T_1) est parallèle à OS_2 (on pourra, pour cela, considérer les angles POS_2, PS_1S_2, PP_1F) et que (T_2) est parallèle à OS_1.

3° Soit Q l'intersection des droites (T_1) et (T_2). Quel est, quand le cercle C varie, le lieu géométrique de ce point Q?

4° Montrer que, parmi les cercles C, il y en a généralement un qui est tel que les droites OS_1 et OS_2 correspondantes soient perpendiculaires. Que peut-on dire de la position correspondante du point Q? Cas d'exception.

5° Démontrer que l'on a toujours $\dfrac{\overline{QM_1}}{\overline{S_2O}} = \dfrac{\overline{M_2Q}}{\overline{M_2S_2}}$.

Qu'en conclut-on pour les points M_1, M_2 et O? *(Paris.)*

● **824.** Soient une droite (D) et un point F non situé sur (D). On désigne par K la projection orthogonale de F sur (D) et l'on pose FK = d.

1° M étant un point quelconque, distinct de F et non situé sur (D), on désigne par (γ) le cercle de diamètre FM. La tangente en F à (γ) coupe la médiatrice Δ de FK en un point I. Montrer que ce point I a même puissance par rapport à (γ) et par rapport à tous les cercles du faisceau qui a pour points limites F et K.

Démontrer qu'il existe un cercle (O) de ce faisceau qui est tangent à (γ). Déterminer son centre O et son point de contact P avec (γ).

2° La droite FP coupe (D) en E et recoupe le cercle (O) en N. Démontrer que le faisceau (O, PNFE) est harmonique. Montrer que MF et ON sont parallèles. Déduire de ce qui précède que les trois points O, M, E sont alignés.

3° H désignant la projection orthogonale de M sur (D), on pose $\dfrac{MF}{MH} = e$.

Evaluer le rapport $\dfrac{\overline{OF}}{\overline{OK}}$, d'abord en fonction du rapport $\dfrac{ON}{OK}$, puis en fonction de e, et calculer le rayon R de (O) en fonction de d et de e. Quelle est la valeur du rapport $\dfrac{PF}{PK}$?

4° On suppose que M décrive une conique (C) de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e. Montrer qu'à tous les points M de cette conique il correspond un même cercle (O), qui est le cercle principal de cette conique. Quel est l'angle que fait la tangente en M à la conique avec la droite FE?

5° Déduire de ce qui précède la solution du problème suivant :

Soit (C) une conique de centre O, $x'Ox$ son axe focal, $y'Oy$ son axe non focal. M étant un point quelconque de la conique, on désigne par λ le coefficient angulaire de OM, par μ le coefficient angulaire de la tangente en M à la conique. Evaluer le produit λμ en fonction de l'excentricité e de (C). *(A. O. F.)*

● **825.** (E) est une ellipse donnée, de centre O, de foyers F et F'. On désigne par a le rayon du cercle principal (O), et par $2c$ la distance FF'.

1° Soit H la projection de F sur une tangente (Δ) à l'ellipse (E). Soient M et M' les points de (Δ) définis par HM = HM' = HF'. Rappeler quel est, lorsque (Δ) varie, le lieu de H. Calculer FM et FM' en fonction de a et c. En déduire que, lorsque (Δ) varie, le lieu de M et M' est un cercle (C) de centre F.

2° Soit I le point de rencontre des tangentes au cercle (C) en M et M'. Par quelle transformation simple peut-on déduire I de H? Montrer que le lieu de I est, lorsque (Δ) varie, un cercle (C').

3° Les droites rectangulaires F'M, F'M' recoupent respectivement (C) aux points P et P'. Montrer que les quatre côtés du quadrilatère MM'PP' sont tangents à (E). En déduire qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits à (C) et circonscrits à (E), puis qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits à (C') et circonscrits à (C).

4° On désigne par K' le pied sur la droite FF' de la directrice associée au foyer F' [on rappelle que cette directrice est la polaire de F' par rapport au cercle principal (O)]. Montrer que F' et K' sont conjugués par rapport à (C). Montrer que les trois cercles (O), (C), (C') appartiennent à un même faisceau à points limites. [A cet effet il pourra être utile de considérer le faisceau de cercles orthogonaux aux cercles (O) et (C)]. *(Strasbourg.)*

● **826.** Soient deux droites D et D', concourantes en O, un point A sur (D) et un point A' sur (D').

1° Déterminer les rotations qui font correspondre les droites (D) et (D'), les points A et A' étant homologues; on appellera ω et ω' les centres de ces rotations.

2° Les droites (D), (D') et le point A sont fixes, le point A' se déplace sur (D'). Quel est le lieu des points ω, ω'?

3° La droite (D) et le point A restent fixes, mais la droite (D') pivote autour de O, la longueur OA' restant constante. A chaque position de (D') correspondent deux centres de rotation ω, ω' (1re question).

a) $\omega\omega'$ reste tangente à une courbe fixe, que l'on déterminera et dont on discutera la nature.

b) Déterminer les deux points de la droite (D) qui ont pour homologue le point O dans les rotations de centres ω et ω'. En déduire les lieux de ces points ω et ω'. *(Caen.)*

● **827.** 1° Dans un plan, A et B sont deux points fixes ($AB = a \neq 0$) et MM' deux points quelconques, distincts de A et B, homologues dans l'inversion de centre B, de puissance a^2. Montrer que $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{AB}$. Quel est l'inverse du lieu (ω) des points P tels que $\frac{PB}{PA}$ soit égal à un nombre k donné?

Utiliser l'inversion précédente pour comparer, suivant la position de M dans le plan par rapport au lieu (ω), le rapport $\frac{MA}{MB}$ au nombre k. On distinguera les cas suivants : $k > 1$, $k < 1$ et $k = 1$.

2° On considère les coniques (C) d'excentricité e donnée, dont un foyer est fixe et dont la directrice associée (D) passe par un point fixe I_0 (Pour simplifier, on se bornera dans cette question au cas où $e < 1$). Construire les coniques (C) passant par un point M donné. Discuter le nombre de solutions suivant la position du point M dans le plan. Trouver le lieu (m) des points M par lesquels ne passe qu'une seule conique (C). Prouver que pour tout point M de (m) la conique C passant par M est tangente à (m) en M et en un autre point.

3° On suppose maintenant e quelconque, différent de 1. Montrer que le cercle directeur (F') des coniques (C) centré au second foyer F' reste orthogonal à un cercle fixe (γ). FF' recoupant (γ) en G, prouver que $\frac{\overline{F'F}}{\overline{F'G}} = e^2$. En déduire les lieux du second foyer F', du centre O, ainsi que l'enveloppe de la directrice (D') associée à F'. *(Dijon.)*

● **828.** Deux cercles (C) et (C') de centres O et O', de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. La droite OO' recoupe (C) en K et (C') en K'. On appelle (Γ) tout cercle tangent à (C) et à (C').

1° Soient M et M' les contacts de (Γ) avec (C) et (C'). Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe S. En déduire la construction d'un cercle (Γ).

2° De S on mène une tangente à (Γ). Quel est le lieu (L) du point T de contact quand (Γ) varie? Réciproquement, T étant donné sur (L), combien existe-t-il de cercles (Γ) tangents en T à la droite ST? Effectuer la construction de ces cercles.

3° On transforme la figure dans une inversion de pôle A et de puissance $\overline{AK}.\overline{AK'}$; construire avec soin les transformés de (C), (C'), (Γ) et (L).

4° Quel est le lieu des centres ω des cercles (Γ)? Prenant OO' pour axe des x et la médiatrice du segment OO' pour axes des y, donner l'équation de ce lieu. Calculer le rayon ρ de (Γ) en fonction de l'abscisse x de son centre ω.

Discuter le nombre des cercles (Γ) ayant un rayon ρ donné suivant la valeur de ρ. *(La Réunion.)*

● **829.** 1° On considère les triangles ABC dans lesquels B = 2C. Montrer que les côtés de ces triangles satisfont à la relation $\overline{AC}^2 = AB\,(AB + BC)$.
(Pour établir cette relation, il peut être utile de tracer le cercle tangent à AB en B et passant par C).

2° On suppose connus, dans un tel triangle, le côté BC $= a$ et la différence AC — AB $= l$ des deux autres côtés. Écrire le système de deux équations à deux inconnues déterminant les longueurs x et y des côtés AB et AC; le résoudre et le discuter.

3° Le côté BC étant tracé, on se propose de construire géométriquement le point A. Montrer que la condition AC — AB $= l$ revient à placer le point A sur une courbe (H_1) dont on précisera la nature et les éléments principaux.

Montrer, de préférence géométriquement, que la condition B = 2C revient à placer le point A sur une hyperbole (H_2) ayant pour foyer le point B et pour directrice la médiatrice de BC.

Montrer alors qu'on peut construire les points communs à (H_1) et à (H_2) en utilisant seulement la règle et le compas. Discussion. *(Paris.)*

● **830.** On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R, un diamètre fixe AB de ce cercle, et une droite (D) perpendiculaire à AB en un point H situé du même côté de O que B, distinct de B, et tel que OH $= d$.

Un point M décrit la droite (D). Les droites MA et MB recoupent le cercle respectivement en P et Q.

1° Montrer que le cercle (Γ) circonscrit au triangle MPQ est orthogonal au cercle (C). (On pourra utiliser une inversion de pôle M).

Déterminer le lieu de son centre.

2° Montrer que la droite PQ passe par un point fixe S, dont on précisera la position par rapport à (C) et (D).

Trouver le lieu géométrique du deuxième point d'intersection N du cercle (Γ) et du cercle circonscrit au triangle MAB. *(Clermont.)*

● **831.** On donne dans un plan (P) deux points fixes A et A′ et le milieu O de AA′ (OA = OA′ $= a$).

1° On fait passer par A deux droites rectangulaires (Δ) et (Δ′). Construire un cercle (Γ) passant par A′ et tangent à (Δ) et (Δ′). Trouver, quand (Δ) et (Δ′) varient le lieu du centre de (Γ), les lieux des points de contact M et M′ de (Γ) avec (Δ) et (Δ′) et l'enveloppe de MM′.

2° On fait passer par A et A′ deux cercles orthogonaux (C) et (C′) de centres ω, ω′. On pose ωω′ $= d$. On désigne par N et N′ les points de contact de (C) et (C′) avec une tangente commune (D). Trouver les lieux des points N et N′ quand (C) et (C′) varient en restant orthogonaux; montrer que $\overline{NN'}^2 = 2\,ad$. *(Lyon.)*

● **832.** Soit un cercle fixe C de centre O et une droite fixe D qui coupe C en deux points A et B.

1° Démontrer que tout point M du plan tel que sa puissance par rapport au cercle C soit égale au carré de sa distance MK à la droite D (K étant la projection orthogonale de M sur D) est centre d'un cercle λ tangent à D et orthogonal à C.

Enoncer et démontrer la réciproque.

2° A l'aide d'une inversion de pôle A, démontrer que les cercles λ (c'est-à-dire les cercles tangents à D et orthogonaux au cercle C) sont aussi tangents au cercle fixe γ qui passe en A, en B et en O.

3° A l'aide de la même inversion, démontrer que les cercles tangents à D et tangents à γ comprennent, outre les cercles λ, une deuxième famille de cercles λ_1 qui sont tous orthogonaux à un cercle fixe C_1 qu'on précisera.

4° Démontrer que le lieu géométrique des points M définis au 1° est une parabole P dont le foyer est F, centre de γ et dont on précisera la directrice. *(Lyon.)*

● **833.** On donne sur une droite orientée trois points fixes : A, F, F′, tels que :

$$\overline{AF} = m;\ \overline{AF'} = m';\ 0 < m < m'.$$

On appellera (F) le cercle de centre F, de rayon m, (F′) le cercle de centre F′, de rayon m' et (C) tout cercle tangent à (F) et à (F′); C sera le centre de (C), P son point de contact avec (F), P′ son point de contact avec (F′).

1° Démontrer que le lieu de C se compose d'une ellipse et d'une droite.

2° Démontrer que, si P et P′ sont distincts, la droite PP′ passe par un point fixe I. Qu'est le point I par rapport à (F) et (F′)? Calculer $\overline{AI}$ en fonction de m et m'.

3° Déduire du 2° une construction géométrique de l'intersection de l'ellipse (E) de foyers F et F′ et passant par A avec une droite issue de F (ou F′).

4° Qu'est le lieu géométrique du point de rencontre des tangentes en P et P' à (C)? Déduire une construction géométrique des tangentes menées à (E) d'un point de la perpendiculaire en A à FF'.

5° Que sont, dans l'inversion de pôle A et de puissance 4 *mm'*, les inverses de (F), (F'), (C)? Qu'est l'inverse de la droite PP'?

Utiliser cette inversion :

a) pour retrouver tous les résultats du 2°;

b) pour démontrer que les cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe si P et P' sont distincts; calculer $\overline{AK}$, K étant le centre de ce cercle. *(Caen.)*

● **834.** Soient dans un plan deux axes rectangulaires, $x'Ox$ et $y'Oy$, et A le point de Ox d'abscisse positive donnée a.

A tout point M du plan, on fait correspondre le point M' défini par la condition que la similitude de centre O qui transforme M en A transforme A en M' (ce qui revient, en général, à dire que les triangles OMA et OAM' sont directement semblables).

1° *a*) Montrer que a est moyenne proportionnelle entre les longueurs OM et OM'. Montrer qu'on peut transformer M en M' par le produit d'une inversion et d'une symétrie par rapport à une droite, l'ordre dans lequel sont effectuées ces deux transformations étant indifférent.

b) Lieu de M' quand M décrit l'une des lignes suivantes : une droite Δ passant par O; un cercle (Ω) passant par O et A; un cercle (Φ) centré sur $x'Ox$ et orthogonal au cercle de centre O et de rayon a.

c) Calculer les coordonnées x', y' de M', connaissant a et les coordonnées x, y de M.

2° *a*) Démontrer que le cercle OMA est tangent à M'A et le cercle OM'A à MA; I et I' étant les milieux de AM et AM', démontrer que A, I, O, I' sont sur un même cercle (Γ).

b) (Γ) coupe $y'Oy$ en O et B (qui peuvent être confondus). Démontrer que B est le centre du cercle MAM'. Calculer l'ordonnée b de B en fonction de a et des coordonnées x, y de M.

c) MM' étant supposé non parallèle à $y'Oy$, soient K le milieu de MM' et C le point où la dolte MM' coupe $y'Oy$. Démontrer que $x'Ox$ est la polaire de C par rapport au cercle AMM'. Démontrer que B, C, A K sont sur un même cercle.

d) Construire les points M et M', connaissant la droite (D) qui les porte.

e) Lieux de M et M' quand K décrit le cercle de centre O et de rayon a. *(Maroc.)*

● **835.** On considère les deux droites joignant un point fixe O à deux points A et A' variables sur une droite (D) ne passant pas par O, ces deux points restant homologues dans une inversion donnée de pôle I (sur D), de puissance k ($\overline{IA}.\overline{IA'} = k$). On coupe ces deux droites par une droite quelconque (Δ) ou un cercle (C) passant par O et on se propose d'étudier la correspondance entre les deux points M et M' ainsi obtenus.

1° Si $k > 0$, montrer que les deux droites OA, OA' restent conjuguées harmoniques par rapport à deux droites fixes. En conclure que sur (Δ), M et M' se correspondent aussi par inversion. Cas particulier?

Dans la suite k est quelconque.

2° On considère un cercle (C_0) dont la tangente en O est parallèle à (D). Montrer que la droite M_0M_0' passe par un point fixe. [On pourra faire l'inversion de pôle O qui échange (C_0) et (D)].

3° Un cercle (C) quelconque coupe (C_0) en O et ω. Déduire de l'étude du triangle $\omega M_0 M$ la correspondance entre M_0 et M. En conclure que la droite MM' passe aussi par un point fixe.

4° Montrer que les points M et M' sur (Δ) se correspondent par inversion, quel que soit le signe de k [On pourra introduire un cercle (C) dont la tangente en O est parallèle à (Δ)]. *(Caen.)*

● **836.** On considère deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, F le point de l'axe $x'Ox$ d'abscisse donnée a positive. On désigne par (P) la parabole de foyer F et de directrice $y'Oy$, par (D) la droite d'équation $x = 2a$, par (C) une conique de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité variable et supérieure à un tiers.

1° M étant un point de (P) d'abscisse x, MH la distance de M à (D), évaluer en fonction de a et de x le rapport $z = \dfrac{\overline{MF}^2}{\overline{MH}^2}$. Variations de ce rapport quand M décrit (P). Courbe représentative.

2° A tout point M de (P) est associée une conique (C) passant par M. Discuter suivant la position de M sur (P) la nature de (C). Comment sont disposés les points qui donnent une même conique (C)? Enveloppe des asymptotes des hyperboles de la famille (C).

3° L'excentricité e étant donnée, comment peut-on construire les points communs à la conique (C) correspondante, et à la parabole (P)? Discuter suivant la valeur de e le nombre de points obtenus. Dans le cas particulier où $e = 2$, calculer en grades les angles des tangentes à (P) et (C) en chacun des points communs.

4° Déterminer M sur la parabole (P) de manière que la conique (C) associée admette pour centre un point donné de l'axe $x'Ox$. Discuter. *(Alger.)*

● **837.** I. On considère un cercle (C) de rayon a et deux points intérieurs F et F symétriques par rapport au centre O et tels que $OF = OF' = c$ $(c < a)$. On fait passer par F et F' deux droites parallèles FGH et F'G'H' qui coupent le cercle respectivement en GH et G'H'. On mène les tangentes au cercles en ces quatres points; elles forment le quadrilatère UVU'V'.

1° Montrer que deux des sommets (qui seront appelés V et V') décrivent des droites quand la direction de FG varie.

2° On désigne par u et v les longueurs de OU et OV. Trouver la relation qui lie ces longueurs. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre v, la plus grande valeur que peut prendre u et la plus petite valeur que peut prendre l'aire du quadrilatère.

II. 1° On considère une ellipse dont les foyers s'appellent F_1 et F_2, dont le centre s'appelle O et une de ses tangentes G_1G_2; les foyers F_1 et F_2 se projetant respectivement sur la tangente en G_1 et G_2. La tangente touche l'ellipse en M. Montrer que F_1M est parallèle à OG_2.

2° On prend un point P sur le cercle qui a pour diamètre le grand axe AA' de l'ellipse (cercle dit « principal »). On mène les deux tangentes à l'ellipse issues de P; elles touchent l'ellipse en K et K'. Montrer que (si les notations K et K' sont convenablement choisies) F_1K et F_2K' sont parallèles.

3° La réciproque de cette dernière proposition est-elle exacte?

III. Revenant au problème (I), montrer que le lieu des points U et U' est une ellipse. *(Montpellier.)*

● **838.** AE et DD' sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle (O), de centre O, et de rayon R. On appelle triangle (T) tout triangle ABC, de sommet A, inscrit dans le cercle (O) et dont les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, vérifient la relation : $b^2 + c^2 - a^2 = d^2$, où d désigne une longueur donnée non nulle. On appelle M, N, P, les milieux respectifs de BC, CA, AB; AA', BB' CC', les hauteurs d'un triangle (T).

1° Montrer que l'angle A est aigu. Montrer que l'expression $\overline{MA}^2 + \overline{MO}^2$ est constante. En déduire que le lieu de M, s'il existe, est un arc de cercle (Γ). Quels sont son centre et son rayon? M, étant donné sur (Γ), construire le triangle (T) correspondant. Déduire de la discussion que la condition d'existence des triangles (T) est $d < 2R\sqrt{2}$. Montrer que le cercle (Γ) coupe le diamètre DD', en des points T et T' tels que $OT = OT' = d/2$. En déduire une construction simple de (Γ). Dans toute la suite du problème, on supposera $d = 2R$.

2° Montrer que l'enveloppe de BC est une demi-ellipse. Préciser ses foyers et ses axes. Construire les triangles (T), connaissant l'un des sommets B ou C. Déduire de la discussion que les sommets B et C ne peuvent décrire tout le cercle (O). Construire les positions limites de ces points. Construire les triangles (T) rectangles en B ou en C.

3° Lieux des points A', N et P. Limiter ces lieux. Montrer que :

$$\overline{AB}.\overline{AC'} = \overline{AC}.\overline{AB'} = 2R^2.$$

Lieux des points B' et C'. Limiter ces lieux. Montrer que les hauteurs BB' et CC' enveloppent un arc de parabole (π). Préciser les éléments de (π). *(Dijon.)*

● **839.** Une parabole (P) a pour foyer F et pour directrice Δ. L est le milieu d'une corde fixe M_1M_2 de (P) et λ, m_1 m_2 les projections orthogonales de L, M_1, M_2 sur Δ.

1° Montrer que Fλ est perpendiculaire à M_1M_2.

2° N étant un troisième point de (P), on désigne par n sa projection orthogonale sur Δ, par n_1 et n_2 les milieux de nm_1 et nm_2 et par n' le symétrique de n par rapport à F. Montrer que les angles de droites (NM_1, NM_2) et $(n'm_1, n'm_2)$ sont égaux à un multiple près de π.

3° Construire les points d'intersection de (P) avec un cercle (C) de centre O passant par M_1 et M_2.

Montrer qu'il peut exister deux points d'intersection N_1 et N_2 généralement distincts de M_1 et M_2 et que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le point O soit sur une certaine demi-droite O_1X que l'on déterminera. Que peut-on dire du cercle (C_1) de centre O_1 passant par M_1 et M_2?

4° Montrer que, lorsque O décrit O_1X, N_1N_2 se déplace parallèlement à elle-même et qu'une bissectrice de l'angle (M_1M_2, N_1N_2) est parallèle à l'axe de la parabole.

J étant le milieu de N_1N_2 et I le milieu de JL, démontrer que I est sur l'axe de (P).

(Aix-Marseille.)

● **840.** On donne une demi-droite Ax, un point B de cette demi-droite tel que $AB = a$ (a longueur donnée). Dans le plan orienté deux demi-droites perpendiculaires Au, Av, telles que $(Au, Av) = \frac{\pi}{2}$, pivotent autour de A.

I. 1° La demi-droite Au étant placée, construire le carré AMNP ayant le sommet M sur Au, le sommet P sur Av et tel que $\overline{AN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2$ (on montrera que BN doit être perpendiculaire à AB). Lieux du centre I du carré et des sommets M et P quand Au varie autour de A.

2° A quelle courbe (C) la droite PN reste-t-elle tangente? Préciser ses éléments.

II. Le carré AMNP n'est plus soumis à la condition : $\overline{AN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2$, mais à cette autre : $\overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{BP}^2 = 9a^2$; résoudre alors les deux questions proposées au n° 1. (On montrera que $BM^2 + \overline{BN}^2 + \overline{BP}^2$ s'exprime en fonction de IO et de a, O étant le milieu de AB).

III. — On remplace la condition précédente par cette autre :

$$\overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{BF}^2 = ka^2,$$

k étant une constante donnée; discuter suivant les valeurs de k, la nature de l'enveloppe de la droite PN. *(Caen.)*

● **841.** Etant donnés un cercle (C) de centre O, de rayon R et une droite D de son plan, à une distance OH = 2 R du centre, on appelle (γ) tout cercle tangent à D et orthogonal à (C).

1° Construire un cercle (γ) de rayon donné r. Discuter.

2° Construire un cercle (γ) passant par un point A donné de (C). Discuter.

3° Construire un cercle (γ) tangent à D en un point B. Que devient la solution si B s'éloigne indéfiniment sur D?

4° B décrivant la droite D, trouver l'enveloppe des cercles (γ) et le lieu de leur centre.

5° Construire le cercle γ' inverse d'un cercle γ dans l'une des inversions qui font se correspondre D et (C). Retrouver, grâce à cette inversion, l'enveloppe des cercles (γ) du 4°. *(Lille.)*

● **842.** On donne un point fixe F, une droite fixe D ne passant pas par F, et on considère les hyperboles (H) qui admettent pour foyer le point F et pour asymptote la droite D.

1° Lieu du deuxième foyer F'. Enveloppes de la deuxième asymptote et de l'axe non focal. Que peut-on dire du cercle directeur relatif au foyer F'? de la directrice relative à F?

2° Construire F', sachant que (H) satisfait à l'une des conditions supplémentaires suivantes: a) (H) a une excentricité donnée ; b) (H) est tangente à une droite donnée ; c) (H) passe par un point donné M. Dans le dernier cas, le problème admet deux solutions. Comment choisir M pour que les deux hyperboles se coupent orthogonalement au point M? *(Montréal.)*

● **843.** (C_1) est un cercle de centre O_1 et de rayon R_1. M_1, un point de (C_1). Sur la tangente (D) en M_1 à (C_1) on prend un point M_2. On posera $M_1M_2 = a$.

I. 1° Montrer qu'il existe un cercle unique, (C_2), tangent à (C_1) et tangent à la droite M_1M_2 en M_2. On construira son point de contact T avec (C_1) et son centre O_2.

2° Vérifier que le rayon R_2 de (C_2) est donné par $R_2 = \frac{a^2}{4R_1}$.

3° Montrer qu'il existe un cercle unique (C) tangent à (C_1), à (C_2) et à la droite (D) en un point du segment M_1M_2.

On construira ses points de contact T_1, T_2 et M avec (C_1), (C_2) et (D). (Il sera commode d'utiliser une inversion de centre M_1 et de puissance a^2).

4° Calculer la longueur M_1M et le rayon R de (C) en fonction de R_1 et a.

II. 1° Montrer que T_1T_2 coupe O_1O_2 en un point I situé sur (D).

2° Préciser les points d'intersection :

a) de M_1T_2 avec (C_2) et de M_2T_1 avec (C_1);
b) de MT_1 avec (C_1) et de MT_2 avec (C_2);
c) de M_1T_1 avec (C) et de M_2T_2 avec (C).

3° Montrer que les quatre points M_1, M_2, T_1, T_2 sont sur un même cercle.

4° Montrer que le cercle circonscrit au triangle TT_1T_2 est orthogonal aux trois cercles (C), (C_1) et (C_2). *(Poitiers.)*

● **844.** On donne dans un plan une droite Δ et un point fixe A à une distance AH = a de Δ.

1° A tout point M de Δ on fait correspondre les points P et P′ définis par :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP}) = +\frac{\pi}{2}, \qquad MP = k\,MA,$$
$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP'}) = -\frac{\pi}{2}, \qquad MP' = \frac{MA}{k},$$

k étant un nombre positif donné. Montrer que, quand M décrit Δ, P et P′ décrivent deux droites D et D′ et le cercle (PAP′) passe par un point fixe Q autre que A.

2° On suppose que, A restant fixe, k varie. Trouver l'enveloppe des droites D et D′ et le lieu du point Q.

3° On suppose maintenant que, k restant constant, A varie. Montrer que la droite AQ reste parallèle à une direction fixe et que le milieu ω de AQ reste sur Δ. En déduire le lieu de Q quand A décrit une droite Δ_1 qui coupe Δ en un point B.

4° Calculer en fonction de k la tangente de l'angle $\alpha = (\Delta, AQ)$. Déterminer k pour que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. *(Grenoble.)*

● **845.** I. Calculer le rayon et la position du centre μ du cercle lieu des points ω tels que $\frac{\omega A}{\omega O} = \frac{1}{2}$, A et O étant deux points fixes.

II. On considère les cercles (Ω) du plan qui sont vus d'un point O de ce plan sous l'angle donné 2α.

1° Exprimer le rayon ρ d'un cercle (Ω) en fonction de α et de la distance Oω de O au centre ω du cercle (Ω) considéré. Indiquer quatre transformations ponctuelles du programme qui transforment un cercle (Ω) en un cercle de la même famille.

2° *Dans tout ce qui suit, on prend* $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Construire un cercle (Ω) passant par deux points A et B donnés. Discuter (on formera une relation entre OA, OB et AB).

3° Soient (Ω_1) les cercles (Ω) tangents à une droite (D) donnée [(D) ne passe pas par O]. Lieu de leur centre ω_1. Lieu de P_1 pied de la polaire de O par rapport à (Ω_1). On trouve deux coniques, dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice associée.

4° Soient (Ω_2) les cercles (Ω) centrés sur une droite (E) [(E) ne passe pas par O].

a) Lieu du pied de la polaire de O par rapport à (Ω_2) et enveloppe de cette polaire.
b) Construire un cercle (Ω_2) passant par un point A donné. Discuter.
c) Déduire de la discussion précédente l'enveloppe des cercles (Ω_2). *(Lyon.)*

TEXTES DE CONCOURS GÉNÉRAL

● **846.** On donne un cercle C et l'axe C′ de ce cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan de C, menée par le centre. Une inversion quelconque fait correspondre à C et à C′ deux cercles C_1 et C'_1. Une seconde inversion, également arbitraire, fait correspondre à C_1 et C'_1 deux nouveaux cercles C_2 et C'_2.

1° Indiquer des propriétés caractéristiques du couple de cercles C_1 et C'_1. Le couple C_2, C'_2 possède-t-il ces propriétés?

2° Les sommets opposés d'un quadrilatère gauche Q sont situés respectivement sur deux cercles C_1, C'_1 donnés, de l'espèce indiquée. Trouver la relation qui existe entre les longueurs des côtés de Q. Réciproquement, les côtés d'un quatrilatère Q donné satisfaisant à cette relation, est-il possible de trouver deux cercles C_1, C'_1 passant respectivement par les sommets opposés de Q et possédant les propriétés caractéristiques susvisées?

3° Deux sommets opposés d'un tel quadrilatère étant donnés, ainsi que la droite qui joint les deux autres, il y a une infinité de ces quadrilatères Q. Etudier le déplacement des sommets variables. Trouver le lieu géométrique du centre de la sphère circonscrite à Q.

4° Deux points A et B étant fixés sur C_1, et un point M se déplaçant sur C'_1, que peut-on dire des surfaces lieux géométriques des bissectrices des droites MA, MB? Comment se coupent ces surfaces?

5° Est-il possible de trouver deux cercles Γ et Γ′ tels qu'une inversion arbitraire leur fasse correspondre des cercles dont les plans se coupent sous un angle constant? (1922).

● **847.** On considère les hyperboles qui ont un foyer donné F qui passent par un point donné A et dont une asymptote est parallèle à une direction donnée D.

1° Démontrer que la directrice relative au foyer F passe par l'un ou l'autre de deux points fixes que l'on construira.

(Dans tout le problème, on n'envisagera que la famille des hyperboles (H) pour lesquelles la directrice passe par l'un des deux points trouvés; soit I ce point.)

Prouver que le lieu du second foyer de ces hyperboles est une parabole.

2° Soient (H) et (H′) deux hyperboles quelconques de la famille considérée, f et f' leurs foyers respectifs autres que F, (C_H) et $(C_{H'})$, les cercles directeurs qui ont pour centres f et f'.

Lieu du point de contact des cercles (C_H) et $(C_{H'})$ lorsqu'ils sont tangents.

Discuter leur intersection suivant la position de la droite ff'. Lieux de leurs points de rencontre quand la droite ff' varie en gardant une direction fixe ou en passant par un point fixe.

3° (H) et (H′) peuvent avoir des tangentes communes. Discuter l'existence de ces droites. Montrer qu'elles se coupent sur une droite fixe. Trouver la courbe fixe à laquelle elles restent tangentes quand la droite ff' a une direction fixe ou passe par un point fixe; appliquer au cas où les hyperboles (H) et (H′) se coupent orthogonalement au point A.

4° (H) et (H′) peuvent avoir des points communs autres que le point A et le point à l'infini sur D. Discuter leur existence. Quel est leur lieu :

a) Quand ils sont confondus;

b) Quand les deux hyperboles associées ont leurs asymptotes parallèles;

c) Quand elles ont même excentricité? (1923).

● **848.** On oriente les côtés d'un triangle ABC donné, respectivement de B vers C, de C vers A, de A vers B. Sur ces côtés, à partir de leurs milieux A_1, B_1, C_1, on porte des vecteurs $\overrightarrow{A_1A'}$, $\overrightarrow{B_1B'}$, $\overrightarrow{C_1C'}$, mesurés par les nombres $\lambda \cos A$, $\lambda \cos B$, $\lambda \cos C$, λ désignant un nombre algébrique arbitraire.

1° Montrer que les cercles circonscrits aux triangles B′C′A, C′A′B, A′B′C, sont égaux.

2° Trouver les courbes auxquelles sont tangents les côtés du triangle A′B′C′ quand λ varie.

3° Soit Γ le cercle circonscrit à ce triangle. Démontrer que si Γ tend vers une position limite Γ_0, les points communs à Γ_0 et Γ tendent vers des positions limites M_0, M'_0. On indiquera une construction géométrique simple des points M_0, M'_0 et on en cherchera le lieu.

4° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La tangente en O au cercle circonscrit au triangle $OM_0M'_0$ rencontre $M_0M'_0$ en un point E_0 dont on demande le lieu. On cherchera la courbe à laquelle sont tangentes les polaires de O par rapport aux cercles Γ.

5° Les perpendiculaires à BC en A', à CA en B', à AB en C' sont les côtés d'un triangle A"B"C". On demande de trouver la relation qui existe entre les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC, A'B'C', A"B"C".

6° Y a-t-il, en dehors des triangles A'B'C' précités, d'autres triangles A'B'C', inscrits au triangle ABC, et tels que les cercles circonscrits aux triangles B'C'A, C'A'B, A'B'C soient égaux? (1924).

● **849.** I. Soient P, P_1, P_2, P_3, des positions successives d'un plan mobile qui glisse sur un plan fixe; un point M de P a dans P_1, P_2, P_3 les positions M_1, M_2, M_3.

M décrivant une droite de P, trouver le lieu D du milieu de MM_1 et l'enveloppe de MM_1. Même question, M décrivant un cercle de P. Montrer que la projection de MM_1 sur D est constante.

II. Trouver le lieu Γ de M pour que M, M_1, M_2 soient en ligne droite; quelle est alors l'enveloppe de la droite MM_1M_2?

Trouver le lieu Γ' de M pour que le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ soit constant; dans ce cas, que sont les enveloppes des côtés du triangle MM_1M_2? Sous quel angle se coupent Γ et Γ'? Trouver le lieu de M pour que l'angle M_1MM_2 soit constant.

III. Déterminer M pour que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral, ou pour que les quatre points M, M_1, M_2, M_3 soient en ligne droite.

IV. Une droite Δ du plan a, dans P_1, P_2, P_3, les positions respectives Δ_1, Δ_2, Δ_3. Que doit être l'enveloppe de Δ pour que Δ, Δ_1, Δ_2 concourent? Trouver le lieu Σ de leur point de concours. Quelle relation présente Σ avec le lieu Γ? Déterminer Δ de manière que Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 soient concourantes.

V. Trouver l'enveloppe de Δ pour que le triangle formé par Δ_1, Δ_2, Δ_3, ait une aire constante.

Quel est le lieu de M pour que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ soit constante? (1926)

● **850.** Un cercle variable Γ passe par deux points A et B (AB $= 2a$). O étant le centre de ce cercle, on prend sur OB le point H tel que $\frac{\overline{HB}}{\overline{HO}} = -m$ (m, nombre positif donné) et on mène par ce point la perpendiculaire à OB, qui coupe Γ en P et Q :

1° Lieu des points P, Q et enveloppe de PQ. Si l'on oriente convenablement AP et AQ, la somme $\overline{AP} + \overline{AQ}$ est constante.

2° Soit γ le cercle d'Euler relatif au triangle APQ; lieu du centre ω de ce cercle; montrer que la droite ωH passe par un point fixe.

Cas de $m = 1$; quel est, dans ce cas, le lieu des points de contact du cercle d'Euler avec les cercles inscrit ou exinscrits au triangle APQ, qui ont leurs centres sur AB?

3° Soient J et J_1 les points de contact de PQ avec lesdits cercles. Etudier, dans le cas général, la famille des cercles de diamètre JJ_1. Combien en passe-t-il par un point? Combien y en a-t-il qui sont tangents à une droite ou un cercle?

4° Montrer qu'il existe deux points fixes F_1 et F_2, tels que la corde de longueur minima, menée par F_1 (ou F_2) dans le cercle γ, soit vue du centre ω de ce cercle sous un angle constant 2β. On posera cos β $= e$ et on calculera e en fonction de m.

5° Combien y a-t-il de cercles γ qui passent par un point donné M? Discuter quand M se déplace.

6° Combien y a-t-il de cercles γ qui sont tangents à une droite donnée D? Discuter quand D se déplace.

7° Quel est le lieu du point M tel que deux cercles γ, qui passent par ce point soient orthogonaux? (1929).

● **851.** On donne deux cercles C et C', de rayons r et r', dans un plan P; d est la distance de leurs centres. Soit D une direction convenablement choisie, faisant un angle α avec le plan P. On fait subir aux cercles C et C' des translations respectives T et T', parallèles à D, de sorte que les positions nouvelles C_1 et C'_1 de ces cercles soient sur une même sphère S.

I. Calculer le rayon de S, en fonction de d, r, r', α. Déterminer α de sorte que le rayon de S soit minimum; évaluer ce minimum en supposant $r > r'$.

II. On projette sur le plan P, parallèlement à D, tous les cercles Γ_1 de S, dont les plans sont parallèles à P; on obtient ainsi dans le plan P une famille de cercles.

Γ, qui comprend les deux cercles donnés et qui dépend de α. Etudier les cercles Γ d'une famille :

a) Construire ceux qui passent par un point donné M du plan P; discuter.

b) Construire ceux qui sont tangents à une droite donnée Δ du plan P; discuter. Ces deux discussions conduisent à une séparatrice Σ que l'on qualifiera.

III. Par un point quelconque N, pris sur Σ, on mène une tangente à un cercle Γ; montrer que le rapport de la longueur de cette tangente à la distance de N à une droite fixe δ, convenablement associée à Γ, est un nombre constant, que l'on calculera. Cas où Γ a un rayon nul. Quelle relation peut-on en déduire entre les longueurs des tangentes menées de N à deux cercles Γ et Γ'?

IV. Soit γ le cylindre passant par Γ et dont les génératrices sont parallèles à D. Montrer que, par tout point Q de l'espace, on peut mener deux plans de sections circulaires du cylindre γ et que les deux sections sont sur une même sphère.

On appellera puissance du point Q par rapport au cylindre la puissance de ce point par rapport à la sphère. Trouver le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cylindres γ et γ'. Qu'en peut-on conclure pour les positions relatives de l'axe radical de deux cercles Γ et Γ', et des droites δ et δ' associées respectivement à Γ et Γ'?

V. Sur chaque cercle Γ d'une famille donnée, on considère les points où la tangente est parallèle à une direction donnée λ du plan P. Lieu de ces points. Quand γ varie, ce lieu se déforme; le caractériser par rapport à la séparatrice Σ du § II.

VI. D'un cercle Γ de rayon nul, on mène les tangentes à tous les cercles Γ; lieu de leurs points de contact.

Lieu des points communs aux cercles Γ qui sont orthogonaux. (1931).

● **852.** I. Etant donné un cercle (C) de centre C et de rayon R et un point fixe O ($OC = d$), on mène par O une droite quelconque qui coupe le cercle en A et A'. On considère le cercle (γ) dont un diamètre est AA'; soit γ son centre. Les cercles (γ) appartiennent à une famille (F) que l'on demande d'étudier.

On construira géométriquement les cercles (γ) qui passent par un point donné M ou qui sont orthogonaux à un cercle donné.

II. Soient (γ_1) et (γ_2) deux cercles orthogonaux de la famille (F). Trouver le lieu du milieu de $\gamma_1\gamma_2$ et ceux des pieds des hauteurs du triangle $O\gamma_1\gamma_2$. Trouver l'enveloppe de $\gamma_1\gamma_2$; discuter; construire la ou les droites $\gamma_1\gamma_2$ qui passent par un point donné γ_1.

III. On suppose que le point M occupe une position limite N, telle que les deux cercles (γ) qui passent par ce point soient confondus. Construire les deux points limites N et N' situés sur un cercle (γ). Quel est le lieu des symétriques de N et N' par rapport au diamètre OAA' de (γ)? Trouver la relation entre $\rho = ON$ et l'angle $\varphi = (OC, ON)$. Etudier la variation de ρ en fonction de φ et figurer la courbe (Γ), lieu de N.

IV. Montrer que, sous certaines réserves, il existe, sur OC, deux points O_1 et O_2, que l'on placera par rapport à O et C, tels que $\rho_1 = O_1N$ et $\rho_2 = O_2N$ s'expriment en fonctions linéaires de ρ (on pourra poser, s'il y a lieu, $d = R \sin\alpha$).

Peut-on rapprocher (Γ) de la projection de la courbe commune à deux cônes de révolution, d'axes parallèles, sur un plan perpendiculaire à ces axes? (1933).

● **853.** Dans un plan orienté, on donne une droite (D) et, sur cette droite, un point O et deux points A, A', tels que $\overline{OA} = -\overline{OA'} = a$. Soit (D') la perpendiculaire à (D) menée par O :

1° Le lieu des points M du plan tels que la somme de l'angle des droites portant OA, AM et de l'angle des droites portant OA, A'M soit égale à $\frac{\pi}{2}$ est une hyperbole équilatère (H). (H) est aussi le lieu des points de contact, avec les cercles (C) passant par A et A', des tangentes perpendiculaires à AA'. La considération de deux cercles (C), suivie d'un passage à la limite, conduit à une construction du point U où la tangente en M à (H) coupe (D'); cette tangente coupe (D) en T. La normale en M à (H) coupe D en N, (D') en P; M se projette orthogonalement en h et k sur (D) et (D'). A partir de l'un des points précédents, construire les autres.

2° Une droite passant par O coupe (H) en M et N; soient m et n les points de cette droite tels que : $\overline{OM}.\overline{Om} = \overline{ON}.\overline{On} = a^2$. Les points m et n (on le prouvera) sont les sommets d'une hyperbole équilatère passant par A et A'.

3° On associe au cercle (C) de centre K, circonscrit au triangle AMA', le cercle (C_1) de centre K_1, qui passe par les milieux des côtés de ce triangle. Soit, sur la

droite KK_1 le point I défini par : $\overline{IK} + \lambda \overline{IK_1} = 0$, λ désignant un nombre constant Lieu de I. Déterminer λ pour que KK_1 soit normale en I à ce lieu. Axe radical des cercles (C), (C_1) et enveloppe de cet axe radical.

4° Soient M et M', deux points quelconques de (H). Montrer que l'orthocentre de chacun des triangles AMN', A'MN' est sur le cercle circonscrit à l'autre. Soit θ le point de MM' situé sur (D); évaluer le rapport $\frac{\theta A}{\theta A'}$, en fonction des distances de M et M' à A et A'. Prouver que le rayon commun aux deux cercles tangents à (H) en M, et, passant l'un par A, l'autre par A' est $\frac{OM.Oh}{a}$. Ces deux cercles coupent de nouveau (D) en α, α'; quelles positions peuvent prendre α, α'? Que dire du milieu de $\alpha\alpha'$? Comment déterminer M connaissant la distance $\alpha\alpha'$?

5° On donne un triangle AMA'; construire deux cercles égaux, passant l'un par M et A, l'autre par M et A', et tangents en M. A quelle condition doit satisfaire AMA' pour que la tangente commune en M à ces deux cercles soit la droite conjuguée harmonique de la hauteur Mh par rapport à MA et MA'? Rattacher cette dernière partie du problème à la précédente. (1935).

● **854.** Toutes les sphères S envisagées dans ce problème coupent la droite donnée D sous l'angle aigu donné θ :

1° Parmi les sphères S, on considère les sphères S_1 qui ont leurs centres sur une droite donnée Δ. Soient O et ω les points où la perpendiculaire commune à D et Δ coupe respectivement ces deux droites ($O\omega = a \neq 0$). Soit α l'angle aigu de D et Δ; on appelle I le centre d'une sphère S_1 quelconque et on pose $\overline{\omega I} = x$. Démontrer qu'il existe sur la droite $\omega\omega_1$ deux points A et B tels que le rapport du rayon R de toute sphère S_1 à la distance de son centre I à l'un des points A et B reste constant. On donne sur D un point H ($\overline{OH} = h$); chercher si ce point est toujours point d'intersection d'une sphère S avec la droite D. Discuter.

2° On envisage de nouveau les sphères S_1. Soit C_1 un cercle donné d'axe Δ. Déterminer géométriquement celle des sphères S_1 qui passent par le cercle C_1. Aucune discussion générale n'est demandée, mais on montrera que, pour une disposition particulière des données, toutes les sphères S_1 sont solutions. Soit C le cercle C_1 particulier pour lequel il en est ainsi; chercher inversement à quelles conditions une droite et un cercle donnés peuvent jouer le rôle de la droite D et du cercle C. Prouver que les plans passant par D coupent C sous un angle constant.

3° On envisage encore les sphères S_1. Soit D' une droite donnée qui fait l'angle aigu α' avec Δ. Déterminer géométriquement celles des sphères S_1 qui coupent D' sous l'angle donné aigu θ'. Aucune discussion générale n'est demandée, mais on cherchera les droites D' particulières pour lesquelles toutes les sphères S_1 sont solutions; préciser leur disposition; α' et θ' peuvent-ils prendre toutes valeurs? Parmi ces droites, en existe-t-il qui soient tangentes à toutes les sphères S_1; en passe-t-il par un point quelconque de l'espace? Montrer que certains des résultats obtenus se rattachent à l'enveloppe des cercles de section des sphères S_1 par un plan fixe passant par Δ; trouver cette enveloppe.

4° Parmi les sphères S, on considère les sphères S_2 qui passent par un point donné F. Chercher le lieu de ceux des centres des sphères S_2 qui sont situés dans un plan donné perpendiculaire à D; en déduire que le lieu total des centres des sphères S_2 est une surface Σ de révolution. Etudier la section de Σ par un plan parallèle à D; montrer que cette section peut être formée de droites G; rattacher ce résultat au 2°. Prouver que le plan déterminé par F et par une droite G variable reste tangent à un cône de révolution; lieu du point où G touche ce cône. (1936).

● **855.** I. A et B étant deux points d'un cercle de centre O, M et N étant 2 points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'un diamètre de ce cercle, démontrer la relation angulaire :

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + 2h\pi \qquad [h \text{ entier}]$$

II. Dans un plan P deux cercles (A) et (B) de centres A et B se coupent aux points C', D'. On prend un point B' sur le cercle (A) et un point A' sur le cercle (B). On suppose les cercles (A) et (B) fixes et les points A' et B', variables de manière que l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'})$, soit invariable de grandeur et de sens. Quels sont les lieux du centre C du cercle (C) circonscrit au triangle A'B'D', et du centre D du cercle (D) circonscrit au triangle A'B'C'?

Montrer qu'il existe un point fixe E′ du plan P, autre que D′, tel que le rapport $\frac{CD'}{CE'}$ reste constant quand A′ et B′ varient de la manière indiquée. Calculer l'angle $(\overrightarrow{E'A}, \overrightarrow{E'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'}) = \theta$.

Déduire du résultat obtenu que les triangles E′AB′ et E′BA′ sont semblables et de même sens. Etablir que le rapport $\frac{DC'}{DE'}$ reste aussi constant.

III. Quatre points A, B, C, D donnés seuls dans un plan P_1 sont supposés non situés sur un même cercle, et tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On propose de trouver quatre cercles (A) (B) (C) (D) ayant ces points comme centres respectifs, de façon que :

(B) (C) (D) aient un point commun A′
(C) (D) (A) — B′
(D) (A) (B) — C′
(A) (B) (C) — D′

On détermine à cet effet une des droites AC′, AD′, AB′, pour fixer les idées AC′; puis d'une manière analogue la droite BC′.

Discuter la construction obtenue et justifier que le problème est possible. On considère les inversions positives dont les cercles d'inversion respectifs sont circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Prouver qu'un certain point E′ a comme homologues respectifs dans ces inversions les points A′B′C′D′. Montrer que les rayons des cercles (A) (B) (C) (D) sont proportionnels aux distances de E′ aux points A, B, C, D; que les angles AE′A′, BE′B′, CE′C′, DE′D′, ont leurs bissectrices portées par une même droite et que :

$$E'A \times E'A' = E'B \times E'B' = E'C \times E'C' = E'D \times E'D'.$$

IV. Une inversion dont le pôle est un point quelconque *e* du plan P [distinct de A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, E′] transforme ces points en les points *abcda′b′c′d′e′*.

On dira que *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, constituant une première *série* de points, *a′b′c′d′e′* sont leurs *associés* respectifs et constituent une seconde série. Démontrer que le cercle passant par 3 *quelconques* des points de l'une de ces séries est orthogonal à tous les cercles passant par les deux points de l'autre série, *non associés* aux trois points choisis.

Exemple : le cercle *abc* est orthogonal à tous les cercles passant par *d′* et *e′*; le cercle *a′b′c′* est orthogonal à tous les cercles passant par *d* et *e*.

V. On considère les sphères S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 et S'_1 S'_2 S'_3 S'_4 S'_5 tangentes au plan P aux points respectifs *a b c d e* et *a′ b′ c′ d′ e′ de la configuration étudiée dans IV.* Tous ces points sont supposés distincts et donnés. Former les relations entre les rayons *x y z t u* et *x′ y′ z′ t′u′* de ces sphères qui expriment les contacts mutuels :

de S_1 avec chacune des sphères $S'_2S'_3S'_4S'_5$
S_2 — — $S'_3S'_4S'_5S'_1$
S_3 — — $S'_4S'_5S'_1S'_2$
S_4 — — $S'_5S'_1S'_2S'_3$
S_5 — — $S'_1S'_2S'_3S'_4$

Résoudre et discuter le système ainsi obtenu de 20 équations aux inconnues *x y z t u* et *x′y′z′t′u′*. Quelle conclusion géométrique résulte de cette étude.

(1944).

● **856.** I. — Dans un plan on donne deux points fixes O et A ($OA = a \neq 0$). Au point quelconque *m* du plan on fait correspondre le point M situé sur la demi-droite symétrique de la demi-droite OA par rapport à la droite O*m*, à la distance OM du point O définie par la formule $a.OM = \overline{Om}^2$, M est dit associé au point *m*. De combien de points *m* un point M choisi quelconque dans le plan est-il associé? Lorsque *m* décrit une ligne (γ), M décrit une ligne (Γ) dite associée à (γ). Si dans la construction de (Γ) on remplace le point A par un autre point fixe A_1 du plan ($OA_1 = a_1 \neq 0$) sans modifier le point O, ni la ligne (γ), (Γ) est remplacée par une nouvelle ligne (Γ_1). Etablir que (Γ) peut être déduite de (Γ_1) par une similitude directe dont le centre, l'angle et le rapport sont indépendants de la ligne (γ).

II. — On désigne par I le centre du cercle inscrit au triangle OAM, par J, K, L les centres des cercles exinscrits de ce triangle intérieurs à ses angles respectifs de sommets O, A, M.

Montrer que *m* et son symétrique *m′* par rapport à O sont sur le cercle décrit sur KL comme diamètre, et que les points I et J sont conjugués par rapport à ce cercle.

III. — On considère les inversions de pôles I, J, K, L et de puissances respectives $\overline{Im}.\overline{Im'}$, $\overline{Jm}.\overline{Jm'}$, $\overline{Km}^2$, $\overline{Lm}^2$. Comment chacune d'elles transforme-t-elle les points O, A, M?

Quel est l'effet sur les points O, A, M du produit de ces inversions prises dans l'ordre I, J, K, L de leurs pôles. Comment se produit transforme-t-il :

a) Le cercle passant par O, A, M?

b) Un cercle passant par deux de ces points?

c) Un point arbitraire du plan?

Évaluer la somme algébrique des inverses des puissances de ces quatre inversions.

IV. — Lorsque *m* décrit une droite passant par A, distincte de OA, quelle est l'enveloppe de la droite *m*M? Quel est le lieu de M? En déduire, d'après le dernier alinéa de (I) que l'associée d'une droite ne passant pas par O est une parabole de foyer O. Toute parabole de foyer O est-elle l'associée d'une droite? De combien de façons.

V. — Démontrer qu'une ligne (γ) passant par A est tangente à son associée (Γ) en ce point A.

En déduire, d'après le dernier alinéa de (I) que les tangentes *mt* et MT aux points associés quelconques *m* et M de deux lignes associées (γ) et (Γ) forment avec les droites respectives O*m* et OM des angles égaux et de même sens.

VI. — Trouver la ligne associée à une hyperbole équilatère (H) de centre O. On commencera par traiter le cas où A est l'un des foyers de (H) caractérisée en outre par la directrice correspondante et son excentricité; du lieu du point I on déduira celui de M, quand *m* décrit (H).

Quelles sont les lignes dont les associés coïncident avec une droite quelconque indéfinie donnée?

VII. — Trouver, par la méthode indiquée au VI, l'associée d'une hyperbole de centre O et d'excentricité quelconque.

Même question pour une ellipse de centre O : le lieu de J, à la place de celui de I sera considéré dans ce cas.

Enoncer, comme aux derniers alinéas de IV et VI des réciproques des résultats obtenus.

VIII. — Construire un triangle *m*A*m'* connaissant la médiane OA = *a*, issue de A, l'angle θ de cette médiane avec la bissectrice intérieure de $\widehat{mAm'}$, enfin le produit A*m*.A*m'* = k^2. Calculer par voie trigonométrique l'angle en A du triangle inconnu Discussion (géométrique et algébrique). (1945).

● **857.** On considère un triangle ABC, son cercle circonscrit (O) de centre O, de rayon R, son cercle inscrit (I) de centre I, de rayon *r*. On désigne par α, β, γ les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle (I), par A′, B′, C′ les points de rencontre autres que A, B, C, de AI, BI, CI avec le cercle (O), par *l*, *m*, *n* les milieux de BC, CA, AB.

1° Etablir qu'il existe une conique (E), de foyer I, tangente à βγ, γα, αβ. Quel est son cercle directeur ayant I comme centre? Quelle position remarquable a le second foyer F de (E) par rapport au triangle αβγ?

Montrer qu'il existe une infinité de triangles, tels que αβγ, inscrits dans (I) et circonscrits à (E).

2° On passe du cercle principal de (E) au cercle (O) par une inversion de pôle I dont on indiquera le module. En déduire une relation entre OI = *d* et les rayons R, *r*.

Montrer qu'il existe une infinité de triangles, tels que ABC, inscrits dans (O) et circonscrits à (I).

3° Les cercles (O) et (I), *liés par la relation trouvée au paragraphe* 2, sont supposés fixes; on fait varier le triangle ABC inscrit dans (O) et circonscrit à (I); α, β, γ, A′, B′, C′, *l*, *m*, *n*, varient en conséquence. Quels sont les centres des cercles IBC, ICA, IAB? En déduire l'enveloppe des côtés du triangle A′B′C′.

Quelle est l'enveloppe des cercles IB′C′, IC′A′, IA′B′? Qu'est-ce que le point I pour le triangle A′B′C′? Prouver que les droites A′α, B′β, C′γ concourent en un point fixe Σ.

4° Soient M, L, N les points de rencontre, autres que α, β, γ, de Fα, Fβ, Fγ avec (I). Montrer que les symétriques de la droite FI par rapport aux droites βγ, γα, αβ passent respectivement par L, M, N et recoupent le cercle (I) en un même point, qu'on désigne par φ.

5° La droite βγ coupant la droite FI en U, montrer que U et la projection orthogonale *a* de A sur FI sont deux points conjugués par rapport au cercle (I).

Démontrer que les droites *a*φ et Iα sont parallèles. A cet effet, on pourra considérer

l'inversion (U), de pôle U, dont le module est la puissance du point U par rapport à (I), puis la symétrie (S) par rapport à la droite $\beta\gamma$, et étudier comment la succession des transformations (U), puis (S), transforme le point φ, la droite φ L, le cercle a Uφ, enfin l'angle en φ de la droite φI, avec ce cercle.

6° Comparer les angles orientés de droites (IO , IA) et (αl , $\alpha\varphi$). Etablir, en faisant intervenir la propriété du second alinéa de 5°, que les triangles AOI et $\varphi l\alpha$ sont des figures directement semblables.

Enoncer un résultat analogue concernant chaque triangle $\varphi m\beta$, $\varphi n\gamma$.

7° Les droites φl, φm, φn recoupent le cercle (I) en $l'm'n'$; évaluer en fonction de r et R les rapports $\frac{\overline{\varphi l'}}{\overline{\varphi l}}, \frac{\overline{\varphi m'}}{\overline{\varphi m}}, \frac{\overline{\varphi n'}}{\overline{\varphi n}}$. Qu'en résulte-t-il pour la position relative des cercles (I) et lmn?

8° Quand le triangle ABC varie dans les conditions du paragraphe 3°, préciser sur quelles courbes fixes se déplacent :

— le centre du cercle lmn;
— le point de concours des médianes du triangle ABC;
— l'orthocentre du triangle ABC. (1948)

● **858.** N. B. — La distance d'un point m à une droite désignée par (Δ) sera désignée par Δ (m).

I. — On considère, dans un plan (P) une conique (Γ) définie par un foyer F, la directrice correspondante (D), et son excentricité e, et un point fixe C distinct de F, *essentiellement supposé intérieur à* (Γ).

1° A un point quelconque m du plan (P), on fait correspondre le point n, dit « associé » de m, tel que :

a) Les droites Cm et Fn se coupent sur (D) ou, éventuellement, sont toutes deux parallèles à (D);

b) Les droites Fm et Cn sont parallèles.

On désigne par h le point de rencontre de Cm avec (D).

En d'autres termes, le point n est l'homothétique du point F dans une homothétie (H_m) de centre h où C est l'homothétique du point m; (H_m) varie évidemment avec le choix de m. Que devient cette homothétie lorsque Cm est parallèle à (D)?

Cette extension permet de définir l'associé de m même lorsque m est situé sur la droite CF. Quel est l'associé de C?

Où doit se trouver m pour qu'on puisse considérer son associé n comme rejeté à l'infini? Où doit se trouver n pour qu'on puisse considérer comme rejeté à l'infini le point m dont il est l'associé?

Démontrer que, lorsque m décrit une droite (M) de (P), n décrit une droite (N) et *vice versa*. (N) est appelé « droite associée » de (M). Etudier succinctement les cas particuliers.

2° Montrer que le lieu décrit par n quand m décrit (Γ) est un cercle (C) de centre C, dont on évaluera la rayon R à l'aide de e et de D (C) [voir le N. B. du début]. Situer F et (D) par rapport à ce cercle.

3° La polaire (Φ) du point F par rapport au cercle (C), étant supposée sécante à (D), coupe (D) au point I. Construire la droite (Δ) ayant (Φ) comme droite associée; caractériser à cet effet le point A de rencontre de (Δ) avec (D), la direction de (Δ).

n étant l'associé d'un point quelconque m de (P), quelle est la droite dont l'associée passe par n et est parallèle à (Φ)? On désignera par I, le point de rencontre avec (D) de cette parallèle à (Φ); et au besoin par J le point de (D) tel que mJ soit parallèle à CI.

Déduire de cette étude la relation :

$$\Phi(n) = K\frac{hC}{hm}\Delta(m), \tag{1}$$

K étant un coefficient qui reste constant *quand* m *est supposé variable sur* (Γ) *ce qu'on supposera dans la suite du problème.*

II. — Pour cette partie, on s'inspirera du procédé suivant, qui sera dit « procédé par affinité », destiné à éviter le tracé de figures de l'espace :

1° Soit (Z) une droite, *non située dans* (P), *et qui coupe* (P) en un point ω; soit (Π) le plan perpendiculaire à (Z) en ω.

u désignant un point arbitraire du plan (P), on considère le rabattement u' de la projection orthogonale v de u sur le plan (Π), lorsqu'on rabat (Π) sur (P) autour

de la charnière (X), intersection de (Π) avec (P). Montrer que le point u' se déduit du point u par une « affinité orthogonale » d'axe X, c'est-à-dire que u et u' sont sur une même perpendiculaire à X et que le rapport de leurs ordonnées par rapport à X est constant; on le précisera en fonction de l'angle de (Π) avec (P).

Construire dans (P), *en vraie grandeur*, la distance Z·(u) de u à (Z) en se servant du point u'.

Si u et u_1 sont denx points distincts de (P), montrer que la construction de leurs homologues u' et u'_1 dans l'affinité précédente, met en évidence l'angle des deux plans Zu et Zu_1 en *vraie grandeur.*

N. B. — Dans la suite il y aura lieu de préciser le choix de la droite Z et des points u et u_1 chaque fois qu'il sera utile d'employer un tel procédé.

2° On désigne par (Φ_1) l'une des droites qui sont perpendiculaires à CF en F et qui font avec (P) l'angle α défini par la relation

$$\cos \alpha = \frac{CF}{R}. \tag{2}$$

Du fait que l'affinité orthogonale d'axe CF, de rapport $\sin\alpha$, transforme le cercle (C) en une ellipse, dont on précisera les foyers et directrices, déduire, par application du procédé « par affinité » qu'il existe un rapport constant, quand n varie sur (C), entre ses distances $\Phi_1(n)$ et $\Phi(n)$ aux droites fixes (Φ_1) et (Φ).

3° h désignant le même point, variable sur (D), que dans le 1° de I, on considère deux plans orthogonaux passant par (Φ_1) et qui rencontrent (D), l'un en h, l'autre en un certain point k.

Montrer (procédé par affinité) que h et k se correspondent sur (D) dans une inversion négative fixe, lorsque h varie. En déduire qu'il existe dans (P) deux points fixes λ et μ, symétriques par rapport à (D), tels que, de chacun d'eux, le segment variable hk reste vu sous un angle droit.

4° Montrer que $\Phi_1(h)$ varie proportionnellement à la distance $h\lambda = h\mu$.

En considérant la position particulière A de h (voir I, 3°), établir que les *demi-droites* d'origine F contenant λ et μ sont symétriques par rapport à la droite FA et qu'on a :

$$\frac{|F\lambda - F\mu|}{F\lambda + F\mu} = \sin \alpha. \tag{3}$$

5° Déterminer une droite (Δ_1), sécante à (P) en C, telle que tous les couples de plans $\Delta_1 h$ et $\Delta_1 k$ restent orthogonaux quand h varie sur (D), k étant le point correspondant à h défini dans (II, 3°) : on situera par rapport aux demi-droites Cλ et Cμ la projection orthogonale de (Δ_1) sur (P), et l'on calculera l'angle β de (Δ_1) avec (P). Combien le problème a-t-il de solutions?

(Δ_1) étant l'une des droites fixes ainsi trouvées, que peut-on dire du rapport $\frac{\Delta_1(h)}{h\lambda}$?

6° De l'ensemble de ces propriétés et de la considération d'homothéties appropriées, déduire la conséquence suivante :

$$\Delta_1(m) = K' \frac{hm}{hC} \Phi_1(n) \tag{4}$$

K′ étant une constante quand m varie sur (Γ).

En faisant intervenir ensuite la relation (1) et la propriété qui fait l'objet de (II, 2°), conclure que lorsque m décrit (Γ) on a :

$$\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)} = \text{constante.} \tag{5}$$

III. — 1° Que peut-on dire, d'après (5), de la projection orthogonale de (Γ) sur un plan perpendiculaire à (Δ_1)? En déduire le lieu du point de rencontre des tangentes aux extrémités d'une corde de (Γ) passant par le point C.

2° Supposons, pour fixer les idées, que (Γ) soit une ellipse ou une parabole. On considère, outre C, un autre point C′ quelconque de (P) *intérieur* à (Γ), et la droite (Δ'_1) sécante à (P) en C′ ayant des propriétés analogues à celles de (Δ_1), sécante à (P) en C.

Soit m_0 un des points de rencontre de CC′ avec (Γ). On appelle θ la mesure de

l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta_1 m}$ et θ' celle de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta'_1 m}$. Etablir que lorsque m varie sur (Γ), θ et θ' sont liés par une relation de la forme

$$(5) \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}} = \text{constante.}$$

(1950)

● **859.** I. — Dans le plan (P), on considère deux cercles (C) et (C′) de même centre O et de rayons R, R′ ($R > R'$). Deux demi-droites opposées, d'origine commune O, coupent ces cercles respectifs en A et B. Une demi-droite d'origine O, distincte en général des précédentes, coupe (C) en E et (C′) en F.

1° Montrer que le point M, commun aux droites AE et BF, appartient au cercle (S) décrit dans (P) sur AB comme diamètre et au cercle (T) décrit dans (P) sur EF comme diamètre. On désigne par S et T les centres respectifs de (S) et (T) et par O′ le symétrique de O par rapport à S.

Étudier la figure formée par les points O, M, S, T.

Les cercles (S) et (T) se coupent en un point N, généralement distinct de M. Montrer que les angles ONM et O′MN sont droits.

Etudier le faisceau des quatres droites OM, ON, OS, OT.

2° Il existe dans (P) une similitude directe transformant E en F et A en B. Montrer que le centre de cette similitude n'est autre que N.

Montrer que les cercles OAE, OBF passent par N et sont orthogonaux. Quelles sont les bissectrices des angles en N des triangles NEA et NFB?

Montrer que les couples de demi-droites (NE, NB), (NA, NF), d'origine commune N, ont le même axe de symétrie qu'on appelle (D) et que les produits NA.NF, NB.NE sont égaux : on désigne par k^2 leur valeur commune.

En déduire que l'opération $(\mathfrak{T})$, produit de la symétrie d'axe (D) par l'inversion de pôle N et de puissance k^2, échange les points E et B, A et F; montrer qu'elle échange aussi les points O et M.

3° On suppose O, A, B fixes dans le plan fixe (P), et la demi-droite OFE variable. Trouver l'enveloppe de la droite MN.

On désigne par K le point commun aux droites AB et MN. Montrer que le point de contact H de MN avec son enveloppe est le conjugué harmonique de K par rapport à M, N, et qu'il est situé sur le segment de droite EF.

II. — 1° Dans l'espace, on considère les sphères (σ) et (τ) ayant respectivement (S) et (T) comme grands cercles, et leur cercle (Γ) d'intersection.

La perpendiculaire en H au plan (P) coupe (Γ) en deux points v et v'; montrer que ces points appartiennent aussi au cercle (Δ) coupant orthogonalement le plan (P) aux points E et F.

Quels sont les lieux des points v et v' dans les conditions de (I, 3°)? On trouve deux cercles (V) et (V′) admettant tous deux le segment AB comme diamètre. Montrer que, sur la sphère (σ), (V) et (V′) sont tangents à (Γ) aux points respectifs v et v'.

2° Toujours dans les conditions de (I, 3°) le cercle (Δ) engendre une surface (R) de révolution autour de l'axe OZ commun des cercles (C) et (C′). Déduire, de ce qui précède, que cette surface a en commun avec la sphère (σ) deux cercles.

Montrer que chacun des cercles (V) et (V′) forme avec le cercle (Δ), aux points respectifs v et v', un angle constant α : à cet effet, on appliquera aux cercles (Γ) et (Δ) l'opération $(\mathfrak{T})$ du dernier alinéa de (I, 2°).

Calculer, en fonction de R et R′ l'angle α (supposé aigu), ainsi que l'angle β de OZ avec les plans des cercles (V) et (V′), et comparer les résultats obtenus.

III. — 1° Sur un cercle (X) du plan (P), de centre O, de rayon $\sqrt{RR'}$, on prend un point fixe I. On soumet la figure précédente à l'inversion $(\mathcal{J})$ de pôle I et de puissance 2 RR′. Quel est l'inverse O_1 du point O?

D'une manière générale, l'inverse dans $(\mathcal{J})$ d'un élément (point, ligne ou surface) désigné, dans ce qui précède, par une lettre, sera désigné par la même lettre affectée de l'indice « 1 ».

Indiquer, puis tranformer par $(\mathcal{J})$, des propriétés des cercles IEF et IAB. Montrer que les cercles (C_1) et (C'_1) sont égaux.

Qu'est la droite (X_1) pour les cercles (C_1) et (C'_1)? Analyser les positions relatives de (S_1), (C_1) et (C'_1).

Dans les conditions de (I, 3°) le cercle (Δ_1) engendre une nouvelle surface (R_1) qui peut être engendrée aussi par la rotation de (C_1) ou (C'_1) autour de (X_1).
Déduire de (II, 2°) que (R_1) a en commun avec (σ_1) deux cercles passant par A_1 et B_1.
2° On considère, dans (P), deux cercles égaux sans point commun. Soit (Σ) une sphère orthogonale à (P) et tangente à ces cercles.
Comment une telle sphère coupe-t-elle la surface engendrée par la rotation de ces mêmes cercles autour de leur axe radical? (1952)

● **860.** Données : Dans tout le problème on considère, dans un plan (P), un triangle (T), dont les sommets sont désignés par A, B, C. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Pour la question I, 2°, on donne de plus, dans (P), un triangle (T_1) (*véritable* ou *aplati*) dont les sommets sont désignés par A_1, B_1, C_1. On pose $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$ $(a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0,\ c_1 \neq 0)$.
Dans la question I, 3°, on se donne seulement (T) et trois nombres *positifs* α, β, γ. On aura à envisager les deux points U et U' de la droite BC, tels que $\frac{UB}{UC} = \frac{U'B}{U'C} = \frac{\beta}{\gamma}$, les deux points V et V' de la droite CA, tels que $\frac{VC}{VA} = \frac{V'C}{V'A} = \frac{\gamma}{\alpha}$ et les deux points W et W' de la droite AB, tels que $\frac{WA}{WB} = \frac{W'A}{W'B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

I. — 1° Une inversion dont le pôle O, distinct des points A, B, C, appartient au plan (P), transforme les points A, B, C en les points respectifs A', B', C'.
Etablir l'égalité métrique $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} : \frac{OB}{OC}$ et l'égalité angulaire [entre mesures algébriques, dans le plan (P) orienté, d'angles orientés de vecteurs] :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ à } 2k\pi \text{ radians près } (k \text{ entier}).$$

2° On demande de déterminer le point O de manière que les points A', B', C', définis dans I, 1°, à une homothétie près, forment un triangle directement semblable au triangle (T_1), A', B', C' étant sommets homologues respectifs de A_1, B_1, C_1.
Discuter l'existence et le nombre des points O répondant au problème. Caractériser les triangles (T_1) particuliers pour lesquels ce problème est impossible.
3° Montrer (en premier lieu) qu'on peut ramener à un problème du type précédent la recherche d'un point m du plan (P) dont les distances aux sommets de (T) soient proportionnelles aux nombres α, β, γ; c'est-à-dire que $\frac{mA}{\alpha} = \frac{mB}{\beta} = \frac{mC}{\gamma}$.
Discuter ce nouveau problème. Préciser ses conditions de possibilité en faisant intervenir trois longueurs dont les mesures sont les produits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$.
Trouver (en second lieu) le lieu (Λ) des points M *de l'espace* tels que

$$\frac{MA}{\alpha} = \frac{MB}{\beta} = \frac{MC}{\gamma}.$$

Définir (Λ), quand il existe, à l'aide des sphères décrites sur les segments UU', VV', WW' comme diamètres.
En supposant α, β, γ inégaux, démontrer que les couples de points (U, U'), (V, V'), (W, W') sont les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet (Q), c'est-à-dire que : deux points étant prélevés de manière quelconque, l'un dans le premier couple, l'autre dans le deuxième couple, la droite joignant ces deux points contient *un* certain point du troisième couple.
4° Dans ce paragraphe, on suppose que les nombres α, β, γ soient tel que *le lieu* (Λ) *se réduise à un cercle point* (ce point sera encore désigné par la lettre M). Montrer qu'il existe alors des nombres *algébriques* α', β', γ' satisfaisant aux relations suivantes $|\alpha'| = \alpha$, $|\beta'| = \beta$, $|\gamma'| = \gamma$, $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$ et que, réciproquement, si α, β, γ sont les valeurs absolues de nombres non nuls, α', β', γ' tels que $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$, le lieu (Λ) est un cercle point.
Quel est le lieu du point M quand α', β', γ' varient en restant liés par la condition précédente?
On supposera désormais, pour préciser, que les points U, V, W, définis dans les *données*, sont tels que $\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = \frac{\beta'}{\gamma'}$, $\frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = \frac{\gamma'}{\alpha'}$, $\frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ ce qui établit une distinction entre les points de chacun des couples (U, U'), (V, V'), (W, W').

α', β', γ' variant comme il a été stipulé dans la question relative au lieu du point M, démontrer les propositions suivantes :

a) Chacune des droites MU, MV, MW, MU', MV', MW', passe par un point fixe.

b) Les côtés du quadrilatère (Q), qui sont les droites UVW, UV'W', U'VW', U'V'W, passent respectivement par des points fixes I, J, K, L.

On qualifiera la situation de tous ces points fixes, et notamment de I, J, K, L, par rapport au triangle (T).

c) Les couples suivants de droites

(MA,BC), (MB,CA), (MC,AB), (MI,UI), (MJ,UJ), (MK,VK) (ML,WL) sont *isogonaux*, c'est-à-dire ont tous les mêmes directions de bissectrices.

N.B. — L'ordre dans lequel on établira les propositions de *b* et de *c* est laissé à l'entière disposition des concurrents.

II. — 1° Mêmes données que dans I, 3°.

On considère les cercles (Γ) du plan (P) tels que les puissances de A, B, C, par rapport à un tel cercle soient respectivement proportionnelles à α^2, β^2, γ^2. Déterminer, en tant que transversale au triangle (T), l'axe radical d'un cercle (Γ) et du cercle (ABC) circonscrit au triangle ABC.

Etudier la famille (Φ) des cercles (Γ) ainsi obtenus. La discussion fera apparaître différents cas qu'on rattachera à l'existence ou à la non-existence du lieu (Λ) défini dans I, 3°. On qualifiera, dans les divers cas possibles, les cercles de la famille (Φ).

2° De cette étude, déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle (Γ_0) du plan (P), distinct du cercle (ABC), soit tangent à ce cercle.

3° Considérons le triangle XYZ dont les milieux des côtés YZ, ZY, XY sont respectivement les points A, B, C. Déduire de la condition visée à l'alinéa précédent II, 2°, que le cercle inscrit au triangle XYZ est tangent au cercle (ABC) [lorsqu'il ne se confond pas avec ce cercle].

Le point de contact μ de ces deux cercles est une position particulière du point M défini au début de I, 4°, et l'on vérifiera qu'il correspond aux valeurs suivantes de α', β', γ' : $\alpha' = b - c$, $\beta' = c - a$, $\gamma' = a - b$ (on supposera ici les longueurs a, b, c inégales).

On continuera à désigner par U, V, W, U', V', W' les points notés ainsi déjà dans I, 4°, et qui correspondent à μ comme ils correspondaient à M dans I, 4°.

Du fait que $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$, déduire que la droite UVW passe par le point de concours G des médianes de (T) et que les droites UV'W', U'VW', U'V'W passent respectivement par les points X, Y, Z.

4° Soit η le point de rencontre des droites XZ, U'W' et soit ζ le point de rencontre des droites XY, U'V'.

Montrer que les couples de points (U', W') et (η, Y) forment une division harmonique; puis que la droite $\eta\zeta$ passe par le milieu de WW'; on verra de même qu'elle passe par le milieu de VV'.

En déduire que $\eta\zeta$ est la tangente en μ au cercle (ABC).

Prouver que le point de rencontre n de la droite UVW avec XY est le symétrique de ζ par rapport à C.

Conclure, enfin, que la droite UVW, c'est-à-dire IG, et la tangente en μ au cercle ABC sont deux transversales réciproques par rapport au triangle XYZ.

N.B. — Deux transversales à un triangle sont dites *réciproques* par rapport à celui-ci lorsque le produit des deux rapports analogues dans lesquels ces deux droites divisent algébriquement *chacun* des côtés du triangle est égal à l'unité.

(1954)

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE : **ÉLÉMENTS ORIENTÉS**

DEUXIÈME PARTIE : **TRANSFORMATIONS**

TROISIÈME PARTIE : **CONIQUES**

Imprimerie de la Manutention à Mayenne — Octobre 1997 — N° 324-97
Dépôt légal : Octobre 1997

Georg CANTOR
- *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

Sadi CARNOT
- *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

Élie CARTAN
- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
- *Leçons sur la géométrie projective complexe*

suivies par
—*La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*
—*Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*

Augustin-Louis CAUCHY
- *Analyse algébrique*

Michel CHASLES
- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
- *La dualité et l'homographie*
- *Rapport sur les progrès de la géométrie*
- *Les porismes d'Euclide*

Jean CHAZY
- *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*

Émile CLAPEYRON
- *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur*

Rudolph CLAUSIUS
- *Théorie mécanique de la chaleur*

H. COMMISSAIRE et G. CAGNAC
- *Cours de Mathématiques spéciales (3 tomes)*

Antoine-Nicolas de CONDORCET
- *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*

Gaspard-Gustave CORIOLIS
- *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*

suivie des deux célèbres Mémoires
—*Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*
—*Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*

H.S.M. COXETER et S.L. GREITZER
- *Redécouvrons la géométrie*

Gaston DARBOUX
- *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*

suivies par
—*Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*
—*Principes de géométrie analytique*
(3 ouvrages en 3 volumes)

Jean-Baptiste DELAMBRE
- *Histoire de l'astronomie ancienne*
- *Histoire de l'astronomie au moyen âge*
- *Histoire de l'astronomie moderne*
- *Histoire de l'astronomie au dix-huitième siècle*

R. DELTHEIL et D. CAIRE
- *Géométrie et Compléments*

Arnaud DENJOY
- *L'énumération transfinie*
- *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*
- *Leçons sur la calcul des coefficients d'une série trigonométrique*

René DESCARTES
- *La Géométrie*

Jean DIEUDONNÉ
- *Éléments d'Analyse (9 tomes)*

Paul A.M. DIRAC
- *Les principes de la Mécanique quantique*

Jacques DIXMIER
- *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*
- *Les C*-algèbres et leurs représentations*
- *Algèbres enveloppantes*

Paul DU BOIS-REYMOND
- *Théorie générale des fonctions*

René DUGAS
- *Histoire de la Mécanique*

Pierre DUHEM
- *Les origines de la Statique*
- *Traité d'Énergétique*

ou de Thermodynamique générale

Jean-Baptiste DUMAS
- *Leçons sur la philosophie chimique*

Ernest DUPORCQ
- *Premiers principes de géométrie moderne*

Paul DUPUY
- *La vie d'Évariste Galois*

Albert EINSTEIN
- *Sur l'Électrodynamique des corps en mouvement*

suivi par
—*L'Éther et la Théorie de la Relativité*
—*La Géométrie et l'Expérience*
—*Quatre conférences sur la Théorie de la Relativité*
—*Théorie de la Gravitation généralisée*
—*Sur le Problème cosmologique*
—*Théorie relativiste du champ non symétrique*
- *Lettres à Maurice Solovine*

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
Tout ce qui a paru de l'édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK
- *Arithmétique et Algèbre*
- *Analyse*
- *Géométrie*
- *Mécanique*
- *Physique*
- *Géodésie et Géophysique*
- *Astronomie*
- *Table des matières*

Federigo ENRIQUES
- *Leçons de géométrie projective*

Federigo ENRIQUES et Oscar CHISINI
- *Courbes et fonctions algébriques d'une variable*

F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)
- *Exercices de géométrie*

comprenant l'exposé des méthodes et 1550 figures
- *Géométrie descriptive – Éléments et Exercices*

comprenant l'exposé des méthodes et 1680 figures
- *Trigonométrie – Éléments, Compléments et Exercices*

comprenant l'exposé des méthodes et les solutions de 875 exercices et problèmes

Pierre FERMAT
• *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante,* par Émile BRASSINNE

J. FITZ-PATRICK
• *Exercices d'arithmétique*

Joseph FOURIER
• *Théorie analytique de la chaleur*

Maurice FRÉCHET
• *Les espaces abstraits*

Maurice FRÉCHET & Ky FAN
• *Introduction à la Topologie combinatoire*

Augustin FRESNEL
• *Mémoire sur la diffraction de la lumière*

Évariste GALOIS
• *Œuvres mathématiques,* publiées par Joseph LIOUVILLE
suivies par
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques,* par Sophus LIE
• *Manuscrits,* publiés par Jules TANNERY
• *Écrits et mémoires mathématiques*
Édition critique intégrale publiée
par Robert BOURGNE et Jean-Pierre AZRA
Préface de Jean DIEUDONNÉ

George GAMOW
• *Trente années qui ébranlèrent la physique*
Histoire de la théorie quantique

Félix R. GANTMACHER
• *Théorie des matrices*

Carl Friedrich GAUSS
• *Recherches arithmétiques*

Denis GERLL et Georges GIRARD
• *Les Olympiades internationales de mathématiques*

Josiah-Willard GIBBS
• *Équilibre des systèmes chimiques*
suivi par
— *Josiah-Willard Gibbs,* par Pierre DUHEM

Lucien GODEAUX
• *Les Géométries*

Francisco GOMES TEIXEIRA
• *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches (3 tomes)*

Édouard GOURSAT
• *Cours d'Analyse mathématique (3 tomes)*

Alfred George GREENHILL
• *Les fonctions elliptiques et leurs applications*

Édouard GRIMAUX
• *Lavoisier, 1743-1794*
d'après sa correspondance, ses manuscrits, ses papiers de famille et d'autres documents inédits

Jacques HADAMARD
• *Leçons de géométrie élémentaires (2 tomes)*
• *Leçons sur le Calcul des variations*
• *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*
suivi par
— *L'Invention mathématique,* par Henri POINCARÉ

Paul R. HALMOS
• *Introduction à la théorie des ensembles*

Georges-Henri HALPHEN
• *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*
• *Œuvres (4 tomes)*

G. H. HARDY
Divergent Series (en anglais)

Werner HEISENBERG
• *Les principes physiques de la théorie des quanta*

Hermann von HELMHOLTZ
• *Optique physiologique (2 tomes)*
• *Théorie physiologique de la musique*

Charles HERMITE
• *Œuvres (4 tomes)*

Charles HERMITE et Thomas Jan STIELTJES
• *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*

David HILBERT
• *Les fondements de la géométrie*
• *Sur les problèmes futurs des mathématiques (Les 23 Problèmes)*
• *Théorie des corps de nombres algébriques*

Camille JORDAN
• *Traité des substitutions et des équations algébriques*
• *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*

E. JOUFFRET
• *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions*
suivi des
— *Mélanges de géométrie à quatre dimensions*

Émile JOUGUET
• *Lectures de Mécanique*

Erich KAMKE
• *Théorie des ensembles*

Stephen C. KLEENE
• *Logique mathématique*

Félix KLEIN
• *Le programme d'Erlangen*

Casimir KURATOWSKI
• *Topologie I et II*

Jean LADRIÈRE
• *Les limitations internes des formalismes*
Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques

Joseph-Louis LAGRANGE
• *Mécanique analytique*
• *Théorie des fonctions analytiques*
• *Traité de la résolution des équations numériques*
• *Leçons sur le calcul des fonctions*

Trajan LALESCO
• *La géométrie du triangle*

Gabriel LAMÉ
• *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*

Pierre-Simon LAPLACE
• *Traité de Mécanique céleste (6 tomes)*
• *Exposition du Système du Monde*
• *Théorie analytique des probabilités (2 volumes)*
Le premier volume contient le célèbre *Essai philosophique sur les probabilités*

Pierre LAROUSSE
• *Jardin des racines grecques* (Livre du Maître)
suivi du
—*Jardin des racines latines* (Livre du Maître)

Max von LAUE
• *La Théorie de la Relativité*

Charles-Jean de LA VALLÉE POUSSIN
• *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*
• *Cours d'Analyse infinitésimale*

Antoine-Laurent LAVOISIER
• *Traité élémentaire de chimie*

Henri LEBESGUE
• *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
• *Les coniques*
• *Leçons sur les constructions géométriques*

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY
• *Géométrie (classe de Mathématiques)*

Adrien-Marie LEGENDRE
• *Théorie des nombres*

Julien LEMAIRE
• *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées*
suivie par
—*Hypocycloïdes et épicycloïdes*

Tullio LEVI-CIVITA
• *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*

Paul LÉVY
• *Calcul des probabilités*
• *Processus stochastiques et mouvement brownien*
• *Théorie de l'addition des variables aléatoires*
• *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*

Alexandre LIAPOUNOFF
• *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ
• *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst LINDELÖF
• *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

Hendrik-Antoon LORENTZ
• *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (en anglais)

Édouard LUCAS
• *Théorie des nombres*

Nicolas LUSIN
• *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*
suivies du Mémoire
— *Sur les fonctions représentables analytiquement,* par Henri LEBESGUE

Ernst MACH
• *La Mécanique*
Exposé historique et critique de son développement

Saunders MacLANE et Garrett BIRKHOFF
• *Algèbre*
suivie par
— *Solutions développées des exercices*

Jean MANDEL
• *Cours de Mécanique des milieux continus*

James Clerk MAXWELL
• *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 tomes)*
• *La Chaleur*

Émile MEYERSON
• *La déduction relativiste*

Charles MICHEL
• *Compléments de géométrie moderne*
suivis par les solutions des questions proposées
—*Exercices de géométrie moderne,* de Julien LEMAIRE
et par
—*Les correspondances algébriques* de Gaston SINGIER

Gaston MILHAUD
• *Descartes savant*

Abraham de MOIVRE
• *The Doctrine of Chances* (en anglais)

Jules MOLK
voir ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Gaspard MONGE
• *Géométrie descriptive*
• *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*

Pierre Rémond de MONTMORT
• *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*

Jean Étienne MONTUCLA
• *Histoire des mathématiques (4 tomes)*

John von NEUMANN
• *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Isaac NEWTON
• *Principes mathématiques de la philosophie naturelle (2 tomes)*

Niels NIELSEN
• *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*

R. NOGUÈS
• *Théorème de Fermat. Son histoire*

Paul PAINLEVÉ
• *Les axiomes de la Mécanique*

Georges PAPELIER
• *Exercices de géométrie moderne précédés de l'exposé élémentaire des principales théories*
l'ouvrage comprend
I. *Géométrie dirigée*
II. *Transversales*
III. *Division et faisceau harmonique*
IV. *Pôles, polaires, plans polaires, dans le cercle et la sphère*
V. *Rapport anharmonique*
VI. *Inversion*
VII. *Homographie*
VIII. *Involution*
IX. *Géométrie projective. Application aux coniques*
• *Éléments de Trigonométrie sphérique*

D.P. PARENT
• *Exercices de théorie des nombres*

Julius PETERSEN
• *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*

Émile PICARD
• *Traité d'Analyse (3 tomes)*
• *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*
suivies par
— *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*
— *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*
— *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*

Johann Christian POGGENDORFF
• *Histoire de la physique*

Henri POINCARÉ
• *Théorie mathématique de la lumière*
• *Les oscillations électriques*
• *Cinématique et Mécanismes. Potentiel et Mécanique des fluides*
• *Leçons sur la théorie de l'élasticité*
• *Thermodynamique*
• *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*
• *Capillarité*
• *Leçons de Mécanique céleste*
• *Calcul des probabilités*
• *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
• *Théorie du potentiel newtonien*
• *Théorie des tourbillons*
• *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
• *Électricité et Optique*
• *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*
suivi par
— *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* (Thèse)
— *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*
et par C. BRIOT et J.-Cl. BOUQUET
— *Étude des fonctions d'une variable imaginaire*
— *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*
— *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*
• *Philosophie scientifique*
titres inclus
— *La Science et l'Hypothèse*
— *La Valeur de la Science*
— *Science et Méthode*
— *Dernières Pensées*
• *Œuvres (11 volumes)*

Siméon-Denis POISSON
• *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*

George POLYA
• *Comment poser et résoudre un problème*

Jean-Victor PONCELET
• *Traité des propriétés projectives des figures (2 tomes)*

Ilya PRIGOGINE
• *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles*

Alfred RÉNYI
• *Calcul des probabilités*
avec un appendice sur la théorie de l'information

Bernhard RIEMANN
• *Œuvres mathématiques*

Frédéric RIESZ et Béla SZ.-NAGY
• *Leçons d'analyse fonctionnelle*

Vasco RONCHI
• *Histoire de la lumière*

Eugène ROUCHÉ et Charles de COMBEROUSSE
• *Traité de géométrie*

Erwin SCHRÖDINGER
• *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Joseph-Alfred SERRET
• *Cours d'Algèbre supérieure (2 tomes)*
• *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*

Waclaw SIERPINSKI
• *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*
• *Leçons sur les nombres transfinis*

Jean-Marie SOURIAU
• *Calcul linéaire*
La solution détaillée des exercices termine l'ouvrage

Peter Guthrie TAIT
• *Traité élémentaire des quaternions*

Paul TANNERY
• *Pour l'histoire de la science hellène*
• *La géométrie grecque*
• *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*
• *Mémoires scientifiques (17 volumes)*

P.L. TCHEBYCHEF
• *Œuvres*

François-Félix TISSERAND
• *Traité de Mécanique céleste (4 tomes)*
suivi des
— *Leçons sur la détermination des orbites*

Édouard TOULOUSE
• *Henri Poincaré*
Enquête médico-psychologique sur sa supériorité intellectuelle

Georges VALIRON
• *Équations fonctionnelles – Applications*

Gustave VERRIEST
• *Leçons sur la théorie des équations selon Galois, précédées d'une introduction à la théorie des groupes*
suivies par
— *Évariste Galois et la théorie des équations algébriques*

Henri VILLAT
• *Mécanique des fluides*
• *Leçons sur l'hydrodynamique*
• *Leçons sur la théorie des tourbillons*
• *Leçons sur les fluides visqueux*

Vito VOLTERRA
• *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

Collection « PLUS DE LUMIÈRE »

Pierre DUGAC
• *Jean Dieudonné, mathématicien complet*



ÉDITIONS JACQUES GABAY

RÉIMPRESSIONS

Niels Henrik ABEL
• *Œuvres complètes (2 tomes)*
suivies par
— *Niels Henrik Abel – Sa vie et son action scientifique,* par C.-A. BJERKNES

Jean d'ALEMBERT
• *Traité de dynamique*
• *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*
• *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*
• *Opuscules mathématiques*

André-Marie AMPÈRE
• *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*
• *Considérations sur la théorie mathématique du jeu*
• *Essai sur la philosophie des sciences*

Paul APPELL
• *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes en 3 vol.)*
• *Éléments d'Analyse mathématique*

Emil ARTIN
• *Algèbre géométrique*

Louis BACHELIER
• *Théorie de la spéculation*
suivie par
— *Théorie mathématique du jeu*
• *Calcul des probabilités*
• *Le Jeu, la Chance et le Hasard*
• *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités*
suivies par
— *La spéculation et le calcul des probabilités*
— *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*
• *Collection de Mémoires*
titres inclus
— *Théorie des probabilités continues*
— *Les probabilités à plusieurs variables*
— *Mouvement d'un point ou d'un système soumis à l'action des forces dépendant du hasard*
— *Les probabilités cinématiques et dynamiques*

René BAIRE
• *Leçons sur les fonctions discontinues*
• *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*

W. W. Rouse BALL
• *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*
• *Histoire des mathématiques*

Stefan BANACH
• *Théorie des opérations linéaires*

Paul BARBARIN
• *La Géométrie non euclidienne*

Edmond BAUER
• *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique*

Jacques BERNOULLI
• *L'art de conjecturer*
Cette première partie de l'*Ars Conjectandi* (la traduction française des parties 2, 3 et 4 n'a jamais paru) contient le célèbre *Traité de la manière de raisonner dans les jeux de hasard,* par Christiaan HUYGENS

Joseph BERTRAND
• *Calcul des probabilités*

Niels BOHR
• *La théorie atomique et la description des phénomènes*

Marcel BOLL
• *La chance et les jeux de hasard*
• *Le mystère des nombres et des formes*

Ludwig BOLTZMANN
• *Leçons sur la théorie des gaz*

Tommy BONNESEN
• *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*

Émile BOREL
• *Leçons sur la théorie des fonctions*
• *Leçons sur les séries divergentes*

Émile BOREL & André CHÉRON
• *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*
suivie par
— *Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard,* par Émile BOREL & Jean VILLE
— *Valeur pratique et philosophie des probabilités,* par Émile BOREL

Z.I. BOREVITCH & I.R. CHAFAREVITCH
• *Théorie des nombres*

Max BORN
• *La Théorie de la Relativité d'Einstein et ses bases physiques*

Pierre BOUTROUX
• *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*

Ed. BRAHY
• *Exercices méthodiques de calcul différentiel et intégral*

Léon BRILLOUIN
• *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
• *La science et la théorie de l'information*

Marcel BRILLOUIN
• *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*

Louis de BROGLIE
• *Ondes et mouvements*

(Suite à l'intérieur)

EDITIONS JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Tél. : +33 (0)1 43 54 64 64
Fax : +33 (0)1 43 54 87 00
E-mail : jacques.gabay@wanadoo.fr

ISBN 2-87647-077-2

324 F